

VŠB-Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

VYUŽITÍ METOD NEHLADKÉ OPTIMALIZACE V TVAROVÉ
OPTIMALIZACI

Ing. Petr Beremlijski

Obor: Informatika a aplikovaná matematika
Školitel: Doc. Ing. Jiří Outrata, DrSc.

Ostrava, 2006

Na tomto místě bych rád poděkoval mému školiteli panu Doc. Ing. Jirímu Outratovi, DrSc. za trpělivost, mnoho cenných podnětů a ochotu, se kterou podporoval vznik této práce. Dále bych rád poděkoval panu Prof. RNDr. Jaroslavovi Haslingerovi, DrSc. za významnou pomoc s řešením úloh tvarové optimalizace, panu Doc. RNDr. Radkovi Kučerovi, Ph.D. za významnou podporu při řešení stavových úloh a panu Prof. RNDr. Zdeňkovi Dostálovi, DSc. za všestrannou pomoc a vytvoření podmínek, které pomohly ke vzniku této práce.

Anotace

V naší práci se zabýváme diskretizovanou úlohou tvarové optimalizace pružného tělesa v jednostranném kontaktu. Naším cílem je rozšířit současné výsledky pro případ kontaktu se třením popsáním Coulombovým zákonem. Matematický model problému s Coulombovým třením vede na řešení kvazivariační nerovnosti. Pro malý koeficient tření bylo dokázáno, že diskrétní úloha s Coulombovým třením má jediné řešení a toto řešení je popsáno lipschitzovskou funkcí řídicí proměnné popisující tvar pružného tělesa. Úloha tvarové optimalizace patří do třídy úloh nazývaných Matematické programy s rovnovážným omezením (MPEC). Díky jedinému řešení diskrétní úlohy pro fixovanou řídicí proměnnou, můžeme použít tzv. přístup implicitního programování (Implicit programming approach). Jeho hlavní myšlenkou je minimalizace nehladké funkce složené z cílové funkce a jednoznačného zobrazení, které řídicí proměnné přiřazuje stavovou proměnnou. V našem problému je toto zobrazení mnohem složitější než ve většině MPEC úloh řešených v odborné literatuře. Zobecnění podobných výsledků tudíž není možné. Naše numerické experimenty ukazují efektivnost a spolehlivost našeho přístupu. Náš postup je poté zobecněn i pro řešení úlohy tvarové optimalizace 3D kontaktní úlohy s Coulombovým třením.

Abstract

We are dealing with a discretized problem of shape optimization of elastic bodies in unilateral contact. The aim is to extend the existing results to the case of contact problems following the Coulomb friction law. Mathematical modelling of the Coulomb friction problem employs quasi-variational inequality. It is known that for small coefficients of friction, the discretized problem with Coulomb friction has a unique solution and that this solution is Lipschitzian as a function of a control variable, describing the shape of the elastic body. The shape optimization problem belongs to a class of so-called mathematical programs with equilibrium constraints (MPECs). The uniqueness of the equilibria for fixed controls enables us to apply the so-called implicit programming approach. Its main idea consists in minimization of a nonsmooth composite function generated by the objective and the (single-valued) control-state mapping. In our problem, the control-state mapping is much more complicated than in most MPECs solved so far in the literature, and the generalization of the relevant results is by no means straightforward. Our numerical experiments illustrate the efficiency and reliability of our approach. Our approach is followly generalized for shape otimization problem of 3D contact problem with Coulomb friction.

Obsah

Obsah	2
1 Úvod	4
1.1 Motivace a cíle práce	4
1.2 Historie	5
1.3 Význam	7
1.4 Struktura práce	7
1.5 Použité značení	8
2 Nehladký kalkul a alg. nehladké optimalizace	11
2.1 Nehladká analýza - Clarkeův kalkul	11
2.2 Nehladká analýza - Morduchovičův kalkul	16
2.3 PC^1 funkce	18
2.4 Příklady stacionárních bodů	21
2.5 Algoritmy nehladké optimalizace	23
3 Stavová úloha	34
3.1 Formulace kontaktního problému s Coulombovým třením	34
3.2 Otázky existence řešení pomocí aproximace variační rovností	36
3.3 Otázky existence řešení pomocí metody pevného bodu	38
3.3.1 Spojitý případ	38
3.3.2 Diskrétní případ	39
3.4 Zobecněná rovnost	41
4 Matematické programy s rovnovážnými omezeními	43
4.1 Úvod	43
4.2 Implicitní programování (Implicit programming approach)	45
4.3 Tvarová optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením	46
4.4 Citlivostní analýza	47
5 Numerické příklady	58
5.1 Numerické řešení stavového problému	58
5.2 Tvarová optimalizace	59
5.3 Podmínky optimality	69

<i>OBSAH</i>	3
6 Zobecnění na 3D případ	71
6.1 3D kontaktní problém s Coulombovým třením	71
6.1.1 Diskrétní formulace kontaktního problému se zadaným třením . . .	71
6.1.2 Diskrétní duální formulace kontaktního problému se zadaným třením	72
6.1.3 Diskrétní duální formulace kontaktního problému s Coulombovým třením	73
6.2 Citlivostní analýza pro 3D úlohu	74
7 Závěr	82
Literatura	82

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace a cíle práce

Na pracovišti, kde práce vznikala, tj. Katedře aplikované matematiky na Fakultě elektrotechniky a informatiky Vysoké školy báňské - Technické univerzity v Ostravě se již dlouho zabýváme řešením kontaktních úloh bez tření i se třením (zadaným i Coulombovým, které lépe popisuje danou úlohu). Pro tento typ úloh využíváme řadu rychlých řešičů obvykle založených na metodě pevného bodu. Při řešení těchto stavových kontaktních úloh, které nejsou obecně spojitě diferencovatelné, můžeme využít přechodu od primární úlohy, jejichž proměnné mají význam posunutí, k duální úloze, jejíž proměnné mají význam tečných a normálových napětí (viz [10], [8]), a tím se dostaneme k (hladké) úloze kvadratického programování s rovnostními a nerovnostními omezeními (pro řešení tohoto typu úloh viz [9]). Jinou možností je vyhlazení původní nehladké úlohy. Tyto přístupy používáme při řešení našich grantových projektů nebo i pro řešení některých průmyslových aplikací, např. při modelování tváření kovů, kde dochází ke kontaktu kovadla a polotovaru. Další problematika, která nás zajímá je tvarová optimalizace těchto typů úloh. Tyto úlohy lze obecně modelovat ve tvaru Matematických programů s rovnovážnými omezeními (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, zkráceně MPEC). Matematický program s rovnovážnými omezeními je v některých případech speciální typ dvouúrovňového problému (bilevel program), tj. optimalizační úlohy, jejíž množina proměnných je rozdělena do dvou vektorů x a y . Optimalizační úloha na „dolní“ úrovni spočívá v hledání minima funkce $f_2(x, y)$, která je řízena (parametrizována) vektorem x . Řešení této úlohy, tj. vektor, ve kterém nabývá funkce f_2 svého minima nazveme z . Vektor x je řešením optimalizační úlohy na „horní“ úrovni, tj. ve vektoru x nabývá svého minima funkce $f_1(x, z)$. V případě MPECu je úloha na „dolní“ úrovni často popsána zobecněnou rovností. Některé problémy tvarové optimalizace kontaktních úloh bez tření jsme schopni efektivně řešit již poměrně dlouho a při jejich řešení můžeme převést danou úlohu na minimalizaci hladkého funkcionálu, pro kterou existuje mnoho rychlých algoritmů (viz [11] nebo [41]). Jiná situace nastává při řešení problémů tvarové optimalizace kontaktních úloh se třením. Tento typ problémů již obvykle nejsme schopni řešit pomocí algoritmů pro hladkou optimalizaci. V této práci budeme využívat postupy

pro řešení MPECů k řešení úloh tvarové optimalizace kontaktních problémů s Coulombovým třením. Pro numerické řešení používáme metody vhodné pro řešení úloh nehladké optimalizace. Pro jejich robustnost a spolehlivost jsme zvolili bundle trust metody. Dále nás bude zajímat specifikace podmínek optimality pro tyto úlohy.

Cílem této práce je

- (i) vytvoření numerické metody pro řešení 2D úlohy tvarové optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením (tento cíl byl dosažen a prezentován v [3]),
- (ii) navržení alternativního postupu pro citlivostní analýzu 2D úlohy tvarové optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením,
- (iii) rozšíření postupu z bodu (i) na 3D kontaktní úlohy s Coulombovým třením.

1.2 Historie

Nyní se krátce podíváme na cestu vedoucí k možnosti řešit úlohy tvarové optimalizace s Coulombovým třením. Nejprve se seznámíme s předchůdci matematických programů s rovnovážnými omezeními a vývojem v oblasti variační analýzy, dále se podíváme na vývoj numerických metod, který vedl ke vzniku metod použitých pro naše úlohy. Než se začneme podrobněji věnovat MPECům, podíváme se stručně na cestu k tomuto typu úloh. Již jsme se zmínili, že některé MPECy jsou speciálním případem dvouúrovňových úloh. Tyto úlohy byly poprvé formulovány v roce 1934 H. F. v. Stackelbergem jako popis trhu (viz [40]) a následně byly tyto formulace používány v teorii her. Později byly dvouúrovňové úlohy využity při popisu některých úloh optimálního řízení. Tyto úlohy byly řešeny při práci s inženýrskými a fyzikálními problémy, kde formulace problému na „dolní“ úrovni modeluje daný fyzikální jev. Tento fyzikální jev bývá často popisován variační nerovnicí. První pokusy o řízení úloh, které jsou na „dolní“ úrovni popsány variačními nerovnicemi se objevovaly od začátku 70. let minulého století v pracích [1], [26] a [29]. Tyto variační nerovnice lze zapisovat též pomocí zobecněných rovností a tím se dotáváme k formulaci pomocí MPECu. Samotné slovo „rovnovážné“ se v MPECu objevuje právě díky tomu, že variační nerovnice popisující úlohu na „dolní“ úrovni modelují rovnovážný stav daného fyzikálního jevu (např. rovnováhu sil u mechanických úloh). MPECy se zabývá mnoho prací. Rozsáhlé množství informací, zejména popis numerických metod řešení MPECů a ověřování splnění podmínek optimality nalezených řešení lze nalézt v [27]. Mnoho úloh, které jsou formulovány jako MPEC je řešeno v [32]. Později se rozšířila množina úloh s rovnovážnými omezeními, jež bylo možno řídit. Postupně bylo možné řídit nejen problémy, jež jsou popsány variačními nerovnicemi prvního i druhého druhu, ale i úlohy popsané kvazivariačními či hemivariačními nerovnicemi. Toto rozšíření oblasti variačních nerovnic, které je možné řídit umožnil postupný vývoj variační analýzy. Variačními nerovnicemi popisujícími kontaktní úlohy s Coulombovým třením se zabývá [13]. Úlohy formulované jako MPEC můžeme použít k popisu úloh tvarové optimalizace, tj. úloh, kde řídicí proměnná určuje tvar tělesa, na kterém počítáme stavovou úlohu. Podrobně o těchto úlohách viz [19].

Pro samotné řešení stavové úlohy, tj. kontaktní úlohy s Coulombovým třením je nutné přejít od spojitě formulace k její diskretní verzi. Tato diskretizace je provedena pomocí

metody konečných prvků. O metodě konečných prvků lze nalézt více v [43]. Numerické metody, které používáme pro řešení stavové úlohy jsou založeny na rozštěpené variantě metody pevného bodu (viz [17]). Tímto způsobem řešíme postupně kontaktní úlohy se zadaným třením, jejichž řešení je založeno na duální formulaci původní úlohy, tím se dostaneme od nehladké úlohy (nehladkost je způsobena příspěvkem od členu se zadaným třením na kontaktní hranici) k (hladké) úloze kvadratického programování. Úloha se zadaným třením a její řešení je diskutováno např. v [15]. Jinou možností, jak řešit danou úlohu je aproximace variační nerovnice variační rovnicí a dále regularizace (nehladkého) třecího členu. Tato možnost je podrobně dokumentována v [12]. Její použití však není pro numerické účely příliš efektivní. Další možností, jak hledat řešení kontaktního problému s Coulombovým třením, je kombinace metody postupných aproximací a přímé řešení kontaktní úlohy se zadaným třením pomocí některé z metod vhodných pro nehladkou optimalizaci (viz [2]). Tento způsob funguje poměrně spolehlivě, ale v rychlosti nemůže v žádném případě soupeřit s metodou založenou na duální formulaci.

Nyní se podívejme ještě na vývoj algoritmů vhodných pro nehladkou optimalizaci, tj. algoritmů optimalizujících funkce, jež nejsou spojitě diferencovatelné a který vedl k bundle trust metodám používaných při řešení našich úloh. Tyto metody potřebujeme pro práci s MPECy. Prvními metodami, které se používaly pro řešení nehladkých problémů byly subgradientní metody. Subgradientní metody byly vyvinuty již v roce 1962 sovětským matematikem N. Z. Shorem a poprvé byly publikovány v [39]. Jeden z prvních podrobných popisů metody spolu s diskusí rychlosti konvergence metody byl uveřejněn v [14]. Tyto metody jsou založeny na metodě největšího spádu, ve které je gradient nahrazen jedním libovolným subgradientem. Pro své nedostatky (neexistence implementovatelné ukončující podmínky a malá rychlost konvergence způsobena zejména nutností volit délku kroku a priori) měly pouze omezené použití. Další metody, které jsou opět založeny na metodě největšího spádu, se objevily roku 1975, kdy byly poprvé publikovány bundle metody (svazkové metody), které využívají znalosti jednotlivých subgradientů z předchozích iterací shrnutých v tzv. svazku. Tyto metody byly nezávisle vyvinuty C. Lemarechalement a P. Wolfem (viz [25] a [42]). Implementaci v programovacím jazyce Fortran provedl C. Lemarechal v roce 1980, tento kód byl nazván M1FC1. Tento algoritmus má již implementovatelnou ukončující podmínku a jeho rychlost konvergence je vyšší než u subgradientní metody. Ale i když pro určení délky kroku lze použít line search, objevují se i při něm některé problémy, které způsobují v některých případech nestabilitu algoritmu. Směr největšího spádu je určen na základě celého svazku subgradientů a numericky vede k řešení úlohy kvadratického programování. Dopředu je nutné volit velikost okolí bodu, kde předpokládáme „dobrou“ shodu minimalizované funkce a jejího modelu založeného na znalosti svazku subgradientů. Jinou možností je využít pro minimalizaci cutting plane method (viz [21]). Tuto metodu použijeme pro aproximaci funkce založené na znalosti svazku subgradientů z předcházejících iterací. Tento postup použil K. C. Kiwiel (viz [23]). Numericky tato metoda opět vede k řešení úlohy kvadratického programování. Nevýhodou výše uvedeného postupu je opět určování délky kroku, při kterém je zase nutné jednu konstantu volit a priori (v tomto případě jde o konstantu penalizující příliš dlouhé kroky). Problémy s volbou kroku vyřešilo až použití trust region

metody, která odstraňuje nutnost volit některé parametry při volbě délky kroku a priori. Její kombinací s bundle metodou dostaneme velmi robustní metodu pro řešení nehladkých úloh - bundle trust metodu. Bundle trust metody byly vyvinuty H. Schrammovou a J. Zowem v roce 1992 (viz [37], [38] a [33]).

1.3 Význam

Možnost řešit úlohy tvarové optimalizace pro kontaktní úlohy s Coulombovým třením nabízí širokou škálu následného využití. Jednak je to návrh optimálních tvářecích a obráběcích nástrojů, při jejichž použití dochází ke tření mezi nástrojem a zpracovávaným polotovarem. Jako příklad lze uvést návrh tvaru kovádla, které má tvářet polotovar na výkovek předepsaného tvaru. Jinou možností je návrh tvaru průmyslové žehličky, která má působit na materiál předem stanovenou normálovou silou v předepsaném místě. Jinou možností je návrh optimálního tvaru technických nástrojů, např. návrh optimálního tvaru klíče, který bude působit rovnoměrně na kovovou matici při jejím utažení. Řešení tohoto typu úloh lze využít i v lékařství. Při modelování interakce mezi svaly a kostmi či klouby lze popisovat svaly a například klouby jako systém těles mezi nimiž dochází ke kontaktům s Coulombovým třením. Pomocí našeho aparátu tak můžeme například navrhovat optimální tvar umělého kloubu či protézy některé z končetin.

1.4 Struktura práce

Nyní se blíže seznámíme se členěním této práce. Ve 2. kapitole se seznámíme se základy nehladké analýzy potřebné pro práci s funkcemi, které nejsou spojitě diferencovatelné, zejména si zde zavedeme pojmy Clarkeova kalkulu, který je vhodný pro numerické řešení nehladkých problémů a na němž je postavena bundle trust metoda. Krátce se podíváme i na Morduchovičův kalkul. Dále nás budou zajímat základní vlastnosti po částech spojitě diferencovatelných funkcí, se kterými budeme pracovat v následujících kapitolách. Poté se budeme zabývat možnostmi řešení některých nehladkých problémů nepřímými metodami založenými na odstranění nehladkosti a převedením na hladkou úlohu. Nakonec se podíváme na přímé metody řešení nehladkých úloh, více se zaměříme na popis bundle trust metody. Ve 3. kapitole se budeme věnovat popisu a možnostem řešení naší stavové úlohy, tj. kontaktní úlohy s Coulombovým třením. Uvedeme si dvě možnosti řešení. Jedna je založena na aproximaci variační nerovnice popisující stavovou úlohu a regularizaci členu se třením, druhá využívá metody pevného bodu a principu duality. Ve 4. kapitole se budeme podrobněji zabývat MPECy a jejich řešením. Také se zde objeví způsob řešení MPECu popisujícího úlohu tvarové optimalizace, podrobně se seznámíme s citlivostní analýzou úlohy vedoucí k nalezení jednoho ze subgradientů v libovolném bodě z definičního oboru minimalizované funkce, který potřebujeme pro bundle trust metodu použitou k numerickému řešení úlohy. V 5. kapitole se objeví numerické experimenty pro 2D tvarovou optimalizaci kontaktních úloh s Coulombovým třením. Seznámíme se s řešením některých úloh a na závěr ověříme splnění podmínek optimality nalezených řešení. V 6. kapitole pak naznačíme možnost, jak postupovat při

řešení 3D úloh tvarové optimalizace s Coulombovým třením, zejména se budeme věnovat citlivostní analýze daných úloh.

1.5 Použité značení

Speciální symboly

□	konec důkazu
△	konec příkladu

Prostory

\mathbf{R}^n	reálný n –rozměrný prostor
\mathbf{R}	prostor reálných čísel
\mathbf{N}	prostor přirozených čísel

Kužely

K^*	polární kužel ke kuželu K
$\overline{T}_\Omega(x)$	Clarkeův tečný kužel k množině Ω v bodě x
$T_\Omega(x)$	tečný (kontingenční) kužel k množině Ω v bodě x
$\overline{N}_\Omega(x)$	Clarkeův normálový kužel k množině Ω v bodě x
$\check{N}_\Omega(x)$	regulární (Fréchetův) normálový kužel k množině Ω v bodě x
$\tilde{N}_\Omega(x)$	limitní normálový kužel k množině Ω v bodě x
$N_\Omega(x)$	standartní normálový kužel k množině Ω ve smyslu konvexní analýzy

Množiny

2^S	množina všech podmnožin množiny S
$\text{conv } S$	konvexní obal množiny S
$\text{cl } S$	uzávěr množiny S
\mathbf{B}	jednotková koule
$ S $	kardinalita množiny S
$\text{argmin}_{x \in \Omega} f(x)$	množina všech x , ve kterých nastává minimum reálné funkce f
$[a, b]$	uzavřený interval v \mathbf{R}
(a, b)	otevřený interval v \mathbf{R}

Matice a vektory

$A_{i,j}$	prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci matice A
$\ v\ $	eukleidovská norma vektoru v

Funkce

$\nabla f(x)$	gradient reálné funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ v bodě $x \in \mathbf{R}^n$
$\mathcal{J}F(x)$	Jacobián reálné funkce $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ v bodě $x \in \mathbf{R}^n$
$f^0(x; v)$	Clarkeova zobecněná směrová derivace funkce f v bodě x ve směru v
$\partial f(x)$	Clarkeův zobecněný gradient funkce f v bodě x
$\partial F(x)$	Clarkeův zobecněný Jacobián vektorové funkce F v bodě x
$\partial_M f(x)$	Morduchovičův subdiferenciál funkce f v bodě x
$\Gamma_f(x)$	pseudodiferenciál funkce f v bodě x
$\hat{D}^* \Phi(a, b)$	regulární koderivace multifunkce Φ v bodě (a, b)
f^{-1}	inverze funkce f

Prostory funkcí

$C^{0,1}([a, b])$	prostor lipschitzovsky spojitých funkcí na $[a, b] \subset \mathbf{R}$
$L^2(\Omega)$	prostor měřitelných funkcí integrovatelných s kvadrátem
$D^\alpha u$	$D^\alpha u = \frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
$H^1(\Omega)$	$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^2(\Omega), \alpha = 1\}$
W'	duální prostor k prostoru W

Kontaktní úloha se zadaným třením

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ (\mathbf{R}^3)	rovinné pružné těleso
$\partial\Omega$	hranice tělesa Ω
Γ_u	hranice s Dirichletovskou podmínkou
Γ_p	hranice, na kterou působí povrchové síly F
Γ_c	kontaktní hranice
$\tau(u)$	symetrický tenzor napětí
$\epsilon_{ij}(u)$	linearizovaný tenzor deformace
\mathcal{F}	koeficient tření
\mathbf{A}	matice tuhosti v diskretní formulaci kontaktního problému se zadaným třením
l	vektor sil v diskretní formulaci kontaktního problému se zadaným třením

Úloha tvarové optimalizace

\mathcal{J}	cenový funkcional
α	diskretizovaná řídicí proměnná
U_{ad}	množina přípustných řídicích proměnných

Zkratky

MPEC	Mathematical program with equilibrium constraints (Matematický program s rovnovážnými omezeními)
BP	Bilevel Problem (dvoúrovňová úloha)

IPA	Implicit programming approach (úloha implicitního programování)
PC¹	Piecewise continuous differentiable function (po částech spojitě diferencovatelná funkce)
GE	generalized equation (zobecněná rovnost)
VI	variační nerovnost
QVI	kvazivariační nerovnost

Kapitola 2

Nehladký kalkul a algoritmy nehladké optimalizace

V této kapitole se zblízka podíváme na základní nástroje potřebné pro práci s funkcemi, které nejsou spojitě diferencovatelné. Podrobněji se podíváme na rozšíření klasického diferenciálního počtu pro spojitě diferencovatelné (hladké) funkce. Toto rozšíření nám přináší Clarkeův kalkul zavádějící zobecněný gradient i v bodech funkce, kde uvažovaná funkce není spojitě diferencovatelná. Clarkeův kalkul je pro své vlastnosti vhodný k algoritmizaci hledání minima funkcí, jež nejsou spojitě diferencovatelné. Jiným kalkulem, který je vhodný pro práci s nehladkými funkcemi je Morduchovičův kalkul. Ten nám umožňuje „přísnější“ ověření podmínek optimality. Mnoho informací o těchto kalkulech lze najít v [5] a [35]. Nakonec se podíváme na možnosti řešení některých nehladkých problémů. Buď nepřímo převedením na hladkou úlohu anebo přímo použitím některého z algoritmů vhodného pro nehladkou optimalizaci.

2.1 Nehladká analýza - Clarkeův kalkul

Nyní se seznámíme s některými základními pojmy z oblasti nehladké analýzy.

Definice 2.1.1 *Nechť množina $M \subset \mathbf{R}^n$, funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a K je nezáporné reálné číslo:*

(i) *Nechť pro funkci f je splněna podmínka $|f(x') - f(x'')| \leq K \|x' - x''\| \forall x', x'' \in M$. Pak řekneme, že funkce f je Lipschitzovsky spojitá (s modulem λ) na množině M .*

(ii) *Nechť pro funkci f je splněna podmínka $\exists \varepsilon > 0 : |f(x') - f(x'')| \leq K \|x' - x''\| \forall x', x'' \in x + \varepsilon \mathbf{B}$. Pak řekneme, že funkce f je Lipschitzovsky spojitá v okolí bodu $x \in \mathbf{R}^n$ (s modulem λ).*

(iii) Necht funkce f je lipschitzovsky spojitá v okolí každého $x \in \mathbf{R}^n$. Pak řekneme, že funkce f je lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n .

Následující teorém nám dává informaci o „velikosti“ podmnožiny definičního oboru, kde není diferencovatelná lokálně lipschitzovsky spojitá funkce na \mathbf{R}^n .

Teorém 2.1.1 Rademacher Necht funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n a necht $D = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f \text{ je diferencovatelná v } x\}$. Potom Lebesguova míra μ množiny bodů, ve kterých funkce f není diferencovatelná, tj. množiny $(\mathbf{R}^n \setminus D)$, je nula.

Důkaz V [34]. □

Nyní si zavedeme základní pojmy Clarkeova kalkulu.

Definice 2.1.2 Necht funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x a necht v je vektor v \mathbf{R}^n . Clarkeova zobecněná směrová derivace funkce f v bodě x ve směru v , kterou značíme $f^0(x; v)$ je definována předpisem

$$f^0(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x, t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

kde y je vektor v \mathbf{R}^n a t je kladné reálné číslo.

Definice 2.1.3 Necht funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x . Clarkeův zobecněný gradient funkce f v bodě x , který značíme $\partial f(x)$, je množina

$$\partial f(x) = \{\zeta \in \mathbf{R}^n \mid f^0(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \forall v \in \mathbf{R}^n\}.$$

Prvky $\partial f(x)$ nazýváme Clarkeovými subgradienty funkce f v bodě x .

Poznámka 2.1.1 Jestliže funkce f je spojitě diferencovatelná v bodě x , pak $f^0(x; v) = f'(x; v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$, $\forall v \in \mathbf{R}^n$ a z toho vyplývá $\partial f(x) = \nabla f(x)$.

Vztah mezi Clarkeovou směrovou derivací a Clarkeovým zobecněným gradientem popisuje následující věta.

Věta 2.1.1

$$\forall v \in \mathbf{R}^n : f^0(x; v) = \max\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\}.$$

Důkaz V [32]. □

Díky Rademacherovu teorému (u lokálně lipschitzovsky spojitých funkcí máme zaručenu diferencovatelnost téměř všude ve smyslu Lebesguovy míry) máme také jinou možnost,

jak zkonstruovat Clarkeův zobecněný gradient.

Teorém 2.1.2 *Nechť funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x . Potom*

$$\partial f(x) = \text{conv} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin \Omega_f \right\},$$

kde $\Omega_f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f \text{ není diferencovatelná v } x\}$.

Důkaz V [32]. □

Pro hledání lokálních extrémů funkcí, které nejsou spojitě diferencovatelné, potřebujeme nástroj, který nám umožní rozpoznat, zda funkce f má v bodě x lokální extrém. To nám poskytuje následující věta.

Věta 2.1.2 (O lokálním extrému) *Jestliže funkce f , která je lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n , nabývá v bodě x svého lokálního maxima nebo minima, potom platí $0 \in \partial f(x)$.*

Důkaz V [5]. □

Body splňující výše uvedenou podmínku nazýváme Clarkeovými stacionární body optimalizační úlohy

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x),$$

kde funkce f je lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n .

Pro práci s lokálně lipschitzovsky spojitými funkcemi na \mathbf{R}^n budeme potřebovat ještě některé další poznatky z nehladkého kalkulu. S nimi se setkáme nyní.

Definice 2.1.4 *O funkci f řekneme, že je regulární v bodě x , pokud splňuje následující podmínky:*

- (i) *Existují směrové derivace $f'(x; v)$ pro všechny vektory v .*
- (ii) *Platí rovnost $f'(x; v) = f^0(x; v)$ pro všechny vektory v .*

Teorém 2.1.3 (O derivaci složené funkce) *Nechť máme funkce $h : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ a $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a složenou funkci $f = g \circ h$. Složky funkce h označíme h_i ($i = 1, \dots, n$). Předpokládejme, že každá složka h_i je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x a dále předpokládáme lipschitzovskou spojitost funkce g v okolí bodu $h(x)$. Clarkeův subgradient α funkce g v bodě $h(x)$ je n -rozměrný vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Potom platí*

$$\partial f(x) \subset \text{conv} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \zeta_i : \zeta_i \in \partial h_i(x), \alpha \in \partial g(h(x)) \right\}.$$

Rovnosti místo inkluze je dosaženo při splnění následující podmínky:
 Funkce g je regulární v bodě $h(x)$, každá h_i je regulární v bodě x a každý prvek α zobecněného Clarkeova gradientu $\partial g(h(x))$ má nezáporné složky.

Důkaz V [5]. □

Podobně jako jsme dosud pracovali s reálnými funkcemi $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, můžeme pracovat i s reálnými vektorovými funkcemi $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Zejména nás bude zajímat rozšíření pojmu zobecněného gradientu na takoveto funkci.

Definice 2.1.5 *Nechť vektorová funkce $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x (tím máme na mysli, že každá složka funkce $F(x) = [F^1(x), F^2(x), \dots, F^m(x)]$, tj. každá funkce $F^i(x)$, je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x). Clarkeův zobecněný Jacobián funkce F v bodě x , který značíme $\partial F(x)$, je podmnožinou $\mathbf{R}^{m \times n}$ (prostor matic $[m \times n]$) definovanou předpisem*

$$\partial F(x) = \text{conv} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{J}F(x_i) \mid x_i \rightarrow x, x_i \notin \Omega_F \right\},$$

kde $\Omega_F = \{x \in \Omega \mid \mathcal{J}F(x) \text{ neexistuje}\}$.

Další důležitou vlastností funkce, kterou využijeme v dalších kapitolách, je polohladkost, která souvisí se vztahem mezi směrovou derivací vektorové funkce F a jejím Clarkeovým zobecněným Jacobiánem.

Definice 2.1.6 *O funkci $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ řekneme, že je polohladká v bodě x , jestliže funkce f je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x a dále platí, že pro všechny $v \in \mathbf{R}^n$ existuje limita*

$$\lim_{\substack{V \in \partial f(x+tv') \\ v' \rightarrow v, t \downarrow 0}} \{Vv'\}.$$

O funkci $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ řekneme, že je slabě polohladká v bodě x , jestliže funkce f je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x a dále platí, že pro všechny $v \in \mathbf{R}^n$ existuje limita

$$\lim_{\substack{V \in \partial f(x+tv) \\ t \downarrow 0}} \{Vv\}.$$

Je zřejmé, že polohladkost funkce v bodě implikuje slabou polohladkost. Vztah mezi Clarkeovým zobecněným Jacobiánem a směrovou derivací vektorové funkce F popisuje následující věta.

Věta 2.1.3 *Nechť funkce $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je slabě polohladká v bodě x . Potom směrová derivace*

$$F'(x; v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t}$$

existuje pro všechny $v \in \mathbf{R}^n$ a platí

$$F'(x; v) = \lim_{\substack{V \in \partial F(x+tv) \\ t \downarrow 0}} \{Vv\}.$$

Důkaz V [32]. □

Později využijeme ještě následující lemma popisující skládání spojitě diferencovatelné a polohladké funkce.

Lemma 2.1.1 *Nechť $x_0 \in \mathbf{R}^n$, funkce $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je polohladká v x_0 a funkce $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitě diferencovatelná na okolí $h(x_0)$. Potom platí, že funkce $f(x) = g(h(x))$ je slabě polohladká v x_0 .*

Důkaz V [32]. □

Pro stanovování podmínek optimality úloh omezené optimalizace je nyní potřebné zavést dva další pojmy a to Clarkeův tečný a Clarkeův normálový kužel.

Definice 2.1.7 *Nechť množina Ω je podmnožinou \mathbf{R}^n a bod $x \in \Omega$. Potom Clarkeův tečný kužel k množině Ω v bodě x , který označujeme jako $\overline{T}_\Omega(x)$, definujeme předpisem*

$$\overline{T}_\Omega(x) = \{v \in \mathbf{R}^n \mid \text{dist}_\Omega^0(x; v) = 0\},$$

kde $\text{dist}_\Omega(x) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$.

Definice 2.1.8 *Nechť množina Ω je podmnožinou \mathbf{R}^n a bod $x \in \Omega$. Potom Clarkeův normálový kužel k množině Ω v bodě x , který označujeme jako $\overline{N}_\Omega(x)$, definujeme předpisem*

$$\overline{N}_\Omega(x) = \{\zeta \in \mathbf{R}^n \mid \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \ \forall v \in \overline{T}_\Omega(x)\}.$$

S využitím Clarkeova normálového kuželu můžeme zavést podmínku optimality pro úlohu omezené optimalizace.

Teorém 2.1.4 *Nechť Ω je uzavřená podmnožina \mathbf{R}^n a $x \in \Omega$. Dále nechť funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je lipschitzovsky spojitá v okolí bodu x a nechť bod x je (vázané) lokální minimum funkce f na množině Ω . Pak platí*

$$0 \in \partial f(x) + \overline{N}_\Omega(x).$$

Důkaz V [5]. □

Body splňující výše uvedenou podmínku nazýváme Clarkeovy stacionární body optimalizační úlohy

$$\min_{x \in \Omega} f(x).$$

2.2 Nehladká analýza - Morduchovičův kalkul

Nejprve si pro naše účely zavedeme dvě množinové limity.

Definice 2.2.1 Pro posloupnost $\{C_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ podmnožin patřících do \mathbf{R}^n je vnější limita definována jako množina

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} C_i = \{x \mid \exists x_i \rightarrow x, x_i \in C_i\}.$$

Vnitřní limitou pak nazveme množinu

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} C_i = \{x \mid \forall x_i \rightarrow x, x_i \in C_i\}.$$

S využitím těchto limit nyní zavedeme další skupinu tečných a normálových kuželů. Díky nim můžeme zavést další definici zobecněného gradientu, která se liší od definice Clarkeovy. K tomu si potřebujeme ještě zavést funkci $o : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ splňující podmínku $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Definice 2.2.2 Nechť množina Ω je podmnožinou \mathbf{R}^n a bod $x \in \Omega$. Potom tečný (kontingenční) kužel k množině Ω v bodě x , který označujeme jako $T_\Omega(x)$, definujeme předpisem

$$T_\Omega(x) = \limsup_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\Omega - x}{\tau}.$$

Definice 2.2.3 Nechť množina Ω je podmnožinou \mathbf{R}^n a bod $x \in \Omega$. Potom regulární (Fréchetův) normálový kužel k množině Ω v bodě x , který označujeme jako $\hat{N}_\Omega(x)$, tvoří množina všech vektorů v , které splňují

$$\langle v, x' - x \rangle \leq o(|x' - x|) \quad \forall x' \in \Omega.$$

Limitní normálový kužel k množině Ω v bodě x , který označujeme jako $\tilde{N}_\Omega(x)$, tvoří množina všech vektorů v , které jsou limitou nějaké posloupnosti v_i , která je tvořena členy $v_i \in \hat{N}_\Omega(x_i)$ a $\{x_i\}$ je nějaká posloupnost splňující $x_i \rightarrow x$ a $x_i \in \Omega$.

Všimněme si, že platí $\tilde{N}_\Omega(x) = \limsup_{x'_i \rightarrow x} \hat{N}_\Omega(x'_i)$. Také si uvědomme, že pokud je Ω konvexní, pak regulární normálový kužel $\hat{N}_\Omega(x)$ je ekvivalentní se standardním normálovým kuželem $N_\Omega(x)$ ve smyslu konvexní analýzy.

Po zavedení tzv. polárního kužele, který zavádíme níže, si můžeme povšimnout vztahu mezi tečným a regulárním normálovým kuželem. K libovolnému kuželu $K \in \mathbf{R}^n$ je polární kužel (značíme K^*) definován předpisem

$$K^* = \{v \mid \langle v, w \rangle \leq 0 \ \forall w \in K\}.$$

Teorém 2.2.1 *Nechť množina $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ a bod $x \in \Omega$, pak platí $\hat{N}_\Omega(x) = T_\Omega(x)^*$.*

Důkaz V [35]. □

Nyní je dobré si uvědomit vztah Clarkeova normálového kužele a výše zavedeného limitního normálového kužele.

Teorém 2.2.2

$$\overline{N}_\Omega(x) = \text{cl conv } \tilde{N}_\Omega(x),$$

Důkaz V [35]. □

Nyní už nám nic nebrání v zavedení dalšího objektu popisující lokální chování funkce - Morduchovičova subdiferenciálu (někdy limitního subdiferenciálu).

Definice 2.2.4

$$\partial_M f(x) = \left\{ v \mid (v, -1) \in \tilde{N}_{\text{epi } f}(x, f(x)) \right\}.$$

Podobně je možné nahradit definici (2.1.3) Clarkeova zobecněného gradientu předpisem

$$\partial f(x) = \left\{ v \mid (v, -1) \in \overline{N}_{\text{epi } f}(x, f(x)) \right\}.$$

Mezi Morduchovičovým subdiferenciálem $\partial_M f(x)$ a Clarkeovým zobecněným gradientem $\partial f(x)$ platí pro lokálně lipschitzovské funkce následující vztah $\partial f(x) = \text{cl conv } \partial_M f(x)$.

S využitím pojmu zobecněného gradientu můžeme zkoumat Morduchovičovu stacionaritu. To nám přináší následující definice.

Definice 2.2.5 *Mějme lokálně lipschitzovsky spojitou funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ na \mathbf{R}^n a bod $x \in \mathbf{R}^n$. Pokud platí $0 \in \partial_M f(x)$, pak bod x nazveme jako Morduchovičův stacionární.*

Podmínka Morduchovičovy stacionarity je silnější než podmínka Clarkeovy stacionarity, tj. platí, že Morduchovičův stacionární bod lokálně lipschitzovsky spojitě funkce

na \mathbf{R}^n je také Clarkeovsky stacionárním bodem, ale neplatí to obecně naopak. Dále si uvědomme, že pro funkci f , která je lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n platí, že pokud nabývá v bodě x svého lokálního minima, potom $0 \in \partial_M f(x)$.

2.3 PC^1 funkce

Nyní se budeme zabývat funkcemi po částech spojitě diferencovatelnými (PC^1). Tyto funkce můžeme získat jako výběr konečně mnoha spojitě diferencovatelných funkcí. A tento typ funkcí a jejich minimalizace nás bude zajímat v následujících kapitolách.

Definice 2.3.1 Funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ nazveme po částech spojitě diferencovatelnou (budeme používat označení PC^1) v bodě x' , jestliže existuje otevřené okolí $U(x')$ bodu x' a konečný počet spojitě diferencovatelných funkcí $f^i : U(x') \rightarrow \mathbf{R}^m$, $i = 1, \dots, k$ takových, že f je spojitá na $U(x')$ a $f(x) \in \{f^1(x), \dots, f^k(x)\} \forall x \in U(x')$.

Dále zavedeme indexovou množinu aktivních funkcí f^i v bodě x' , tuto množinu označíme $I_f(x')$ a zavedeme ji předpisem

$$I_f(x') = \{i \in \{1, \dots, k\} : f^i(x') = f(x')\}.$$

Také zavedeme množinu, která nám popíše oblast, kde je aktivní funkce f^i :

$$\text{Supp}(f, f^i) = \{x : f(x) = f^i(x)\}.$$

A nakonec zavedeme indexovou množinu esenciálně aktivních funkcí f^i v bodě x' .

$$I_f^0(x') = \{i : x' \in \text{cl int Supp}(f, f^i)\}.$$

Tyto indexové množiny použijeme při ověřování podmínek optimality u PC^1 funkcí.

Vztah mezi po částech diferencovatelnými a lipschitzovsky spojitými funkcemi nám dává následující věta.

Věta 2.3.1 Každá PC^1 funkce je lipschitzovsky spojitá. Modul lipschitzovské funkce v okolí bodu x_0 je dán jako maximum modulů výběrových funkcí.

Důkaz V [6]. □

V předchozí sekci jsme se setkali s pojmem polohladkosti, ale nezkoumali jsme, za jakých podmínek jsou lipschitzovsky spojitě funkce polohladké. V případě PC^1 funkcí víme více.

Teorém 2.3.1 Každá PC^1 funkce je polohladká.

Důkaz V [6]. □

Nyní se, podobně jako v předchozí části u lipschitzovsky spojitých funkcí, budeme věnovat pravidlům rozpoznávajícím stacionaritu PC^1 funkcí. K tomu nám slouží pojem pseudodiferenciálu zavedený Michalevičem v [28]. Nejprve si ale potřebujeme zavést pojem shora polospojitého zobrazení.

Definice 2.3.2 *Nechť $\Gamma : \mathbf{R}^n \rightsquigarrow \mathbf{R}^m$ je mnohoznačné zobrazení.*

Zobrazení Γ nazveme shora polospojitém v bodě $x \in D\Gamma$, jestliže pro každé okolí V množiny $\Gamma(x)$ existuje kladné číslo ε takové, že platí

$$\Gamma(x') \subset V \text{ pro všechna } x' \in x + \varepsilon \mathbf{B}.$$

$D\Gamma$ značí definiční obor zobrazení Γ , tj. $D\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \Gamma(x) \neq \emptyset\}$.

Zobrazení Γ nazveme shora polospojitém, jestliže je shora polospojité v každém bodě z $D\Gamma$.

Definice 2.3.3 *Funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ nazveme pseudodiferencovatelnou v bodě x' , jestliže existuje otevřené okolí $U(x')$ bodu x' a shora polospojité mnohoznačné zobrazení $\Gamma_f : U(x') \rightarrow 2^{\mathbf{R}^n}$ s neprázdnými, konvexními a kompaktními hodnotami takové, že*

$$f(x) = f(x') + g(x - x') + o(x, x', g) \quad \forall x \in U_\varepsilon(x'),$$

kde $g \in \Gamma_f(x)$ a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o(x^k, x', g^k)}{\|x^k - x'\|} = 0$$

pro každé posloupnosti $\{x^k\}_{k=1}^\infty$, $\{g^k\}_{k=1}^\infty$, kde $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x'$, $g^k \in \Gamma_f(x^k)$ pro všechna k . Zobrazení $\Gamma_f(x')$ pak nazýváme pseudodiferenciálem funkce f v bodě x' .

O pseudodiferencovatelných funkcích víme, že jsou lipschitzovsky spojitě a naopak lipschitzovsky spojitě funkce, které jsou navíc polohladké, jsou pseudodiferencovatelné. Všimněme si, že pro spojitě diferencovatelné funkce platí, že jsou také pseudodiferencovatelné a pseudodiferenciál $\Gamma_f(x) = \{\nabla f(x)\}$. Následující teorém nám dává užitečný návod, jak zkonstruovat pseudodiferenciál funkce v bodě.

Teorém 2.3.2 *Nechť $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkce, která je výběrem konečně mnoha pseudodiferencovatelných funkcí:*

$$f(x) \in \{f^i(x) : i = 1, \dots, k\}.$$

Funkce $f^i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ mají pseudodiferenciály Γ_{f^i} , $i = 1, \dots, k < \infty$. Potom je funkce f pseudodiferencovatelná a pseudodiferenciál funkce f je

$$\Gamma_f(x) = \text{conv} \bigcup_{i \in I_f(x)} \Gamma_{f^i}(x).$$

Důkaz V [6]. □

S využitím pojmu pseudodiferenciálu můžeme zkoumat pseudostacionaritu. To nám přináší následující definice.

Definice 2.3.4 *Mějme pseudodiferencovatelnou funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a bod $x \in \mathbf{R}^n$. Pokud platí $0 \in \Gamma_f(x)$, pak bod x nazveme pseudostacionárním.*

Nyní platí pro každou funkci f , která je lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n , že pokud nabývá v bodě x svého lokálního minima nebo maxima, potom $0 \in \Gamma_f(x)$.

Další možností, jak charakterizovat stacionaritu funkce v bodě nám dává použití Clarkeova kalkulu. Jak konstruovat Clarkeův zobecněný gradient jsem viděli už v předcházející části. Nyní si ukážeme další možnost konstrukce Clarkeova zobecněného gradientu a to speciálně pro PC^1 funkce.

Teorém 2.3.3 *Nechť funkce $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je PC^1 . Potom*

$$\partial f(x') = \text{conv} \{ \nabla f^i(x') : x' \in \text{cl int Supp}(f, f^i) \}.$$

Důkaz V [6]. □

Nyní můžeme opět připomenout pojem Clarkeovy stacionarity.

Definice 2.3.5 *Mějme lokálně lipschitzovsky spojitou funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a bod $x \in \mathbf{R}^n$. Pokud platí $0 \in \partial f(x)$, pak bod x nazveme jako Clarkeův stacionární bod.*

Uvědomme si, že podmínka Clarkeovy stacionarity je silnější než pseudostacionarita, tj. Clarkeův stacionární bod pseudodiferencovatelné funkce je také pseudostacionárním bodem, ale opět to neplatí obecně naopak.

Nyní si ukážeme ještě jednu možnost, jak charakterizovat stacionaritu. Tuto možnost nám dává zavedení Bouligandovy stacionarity. K tomu potřebujeme zavedení následujícího pojmu.

Definice 2.3.6 *Směrově diferencovatelnou funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ nazveme Bouligandovsky diferencovatelnou v bodě x , jestliže platí*

$$\lim_{x_h \rightarrow x} \frac{f(x_h) - f(x) - f'(x; x_h - x)}{\|x_h - x\|} = 0.$$

O lokálně lipschitzovsky spojitých funkcích, které jsou navíc směrově diferencovatelné víme, že jsou také Bouligandovsky diferencovatelné. Další definice nám přináší pojem Bouligandovy stacionarity.

Definice 2.3.7 *Mějme směrově diferencovatelnou funkci $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a bod $x \in \mathbf{R}^n$. Pokud platí $f'(x, r) \geq 0$ pro všechny směry $r \in \mathbf{R}^n$, pak bod x nazveme Bouligandovým stacionárním bodem.*

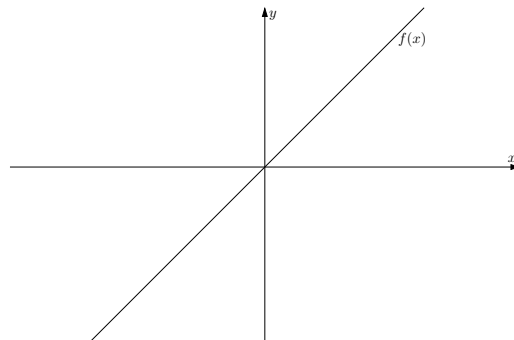
Podmínka Bouligandovy stacionarity je opět silnější než podmínka Clarkeovy stacionarity, tj. platí, že Bouligandův stacionární bod lokálně lipschitzovsky spojitě a směrově diferencovatelné funkce je také Clarkeovsky stacionárním bodem, ale opět to neplatí obecně naopak.

2.4 Příklady stacionárních bodů

Na několika následujících příkladech si ilustrujeme výše uvedené případy stacionarity, tj. případy, ve kterých je bod pseudostacionárním, Clarkeovsky stacionárním, Morduchovičovsky stacionárním či Bouligandovsky stacionárním bodem funkce.

Příklad 2.4.1

$$f(x) = \begin{cases} \max\{x, -x\}, & x \geq 0 \\ \min\{x, -x\}, & x < 0 \end{cases}$$



Obrázek 2.4.1.

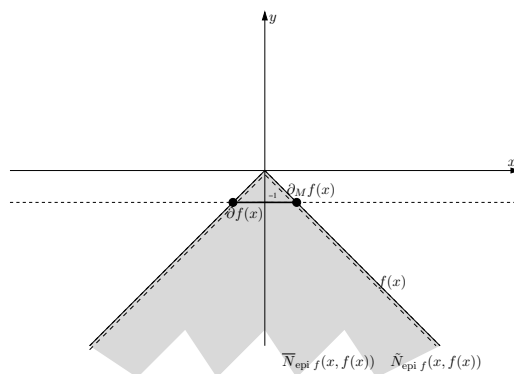
$$\partial_M f(0) = \{1\}, \partial f(0) = \{1\}, \Gamma_f(0) = [-1, 1]$$

Bod $x = 0$ je pseudostacionárním bodem funkce $f(x)$, ale není to ani Clarkeův, ani Morduchovičův a ani Bouligandův stacionární bod.

△

Příklad 2.4.2

$$f(x) = -|x|$$



Obrázek 2.4.2.

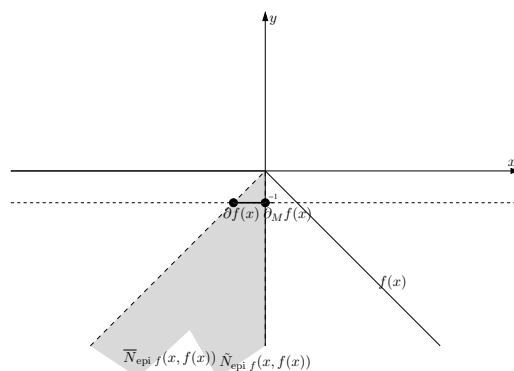
$$\partial_M f(0) = \{-1; 1\}, \quad \partial f(0) = [-1, 1], \quad \Gamma_f(0) = [-1, 1]$$

Bod $x = 0$ je pseudostacionárním bodem funkce $f(x)$ a také je to Clarkeův stacionární bod, nejde však ani o Morduchovičův a ani o Bouligandův stacionární bod.

△

Příklad 2.4.3

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Obrázek 2.4.3.

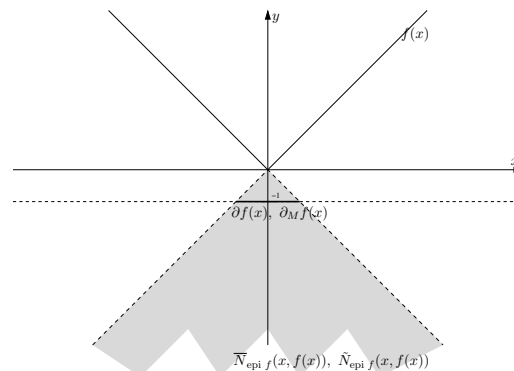
$$\partial_M f(0) = \{-1; 0\}, \partial f(0) = [-1, 0], \Gamma_f(0) = [-1, 0]$$

Bod $x = 0$ je pseudostacionárním bodem funkce $f(x)$, také je to Clarkeův stacionární bod a Morduchovičův stacionární bod, není to Bouligandův stacionární bod.

△

Příklad 2.4.4

$$f(x) = |x|$$



Obrázek 2.4.4.

$$\partial_M f(0) = [-1, 1], \partial f(0) = [-1, 1], \Gamma_f(0) = [-1, 1]$$

Bod $x = 0$ je pseudostacionárním bodem funkce $f(x)$, také je to Clarkeův, Morduchovičův i Bouligandův stacionární bod.

△

2.5 Algoritmy nehladké optimalizace - nepřímé metody, subgradientní metody, bundle metody, cutting plane method, bundle trust metody

V této části se seznámíme s některými algoritmy, které jsou určeny k řešení úloh nehladké optimalizace. Nejméně propracovanou možností, jak minimalizovat funkci, která není spojitě diferencovatelná, je aproximovat tuto funkci funkcí spojitě diferencovatelnou. Toho lze dosáhnout například pomocí penalizace (viz následující příklad). Nevýhodou tohoto postupu je jednak velmi omezené použití pouze na úzký okruh problémů a dále nutnost volit velikost penaly předem bez znalosti struktury problému.

Příklad 2.5.1

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^m |f_i(x)|,$$

kde funkce $f_i(x)$ jsou spojitě diferencovatelné. Pomocí penalty o velikosti $\varepsilon > 0$ modifikujeme výše uvedenou úlohu na hladkou úlohu

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^m (f_i(x)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

△

Jiným způsobem řešení může být převedení nehladké minimalizační úlohy na úlohu nalezení sedlového bodu a její následnou dualizaci, kterou získáme již hladký problém. Tento přístup si přiblížíme v následujícím příkladě, kde budeme řešit tuto úlohu - variační nerovnost druhého typu, která se svou strukturou příliš neliší od kontaktního problému se zadaným třením. Pokud pro řešení duální úlohy použijeme některou z metod založených na principu rozložení oblasti, ať už s využitím konečných prvků (FETI) či hraničních prvků (BETI), získáme nástroj pro velmi efektivní řešení úloh daného typu, který lze použít po jistých modifikacích i pro 2D kontaktní úlohy s Coulombovým třením. Jak vyplývá z následujících tabulek, jde o úlohu numericky škálovatelnou. Numerickou škálovatelností máme na mysli zachování stejného počtu iterací algoritmu sdružených gradientů, který tvoří jádro různých variant FETI a BETI metod, bez závislosti na diskretizaci úlohy při fixovaném poměru mezi velikostmi primární a duální sítě. Práce s využitím FETI a BETI metod nadále pokračuje a zdá se, že přinese velmi rychlé řešiče pro kontaktní úlohy s Coulombovým třením.

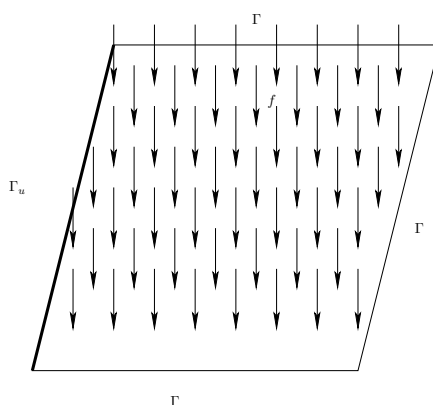
Příklad 2.5.2

$$\min_{\substack{u=0 \\ \text{na } \Gamma_u}} J(u), \text{ kde } J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u) + j(u),$$

dále platí

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega, \\ (f, u) &= \int_{\Omega} f u \, d\Omega, \\ j(u) &= \int_{\Gamma} g |u| \, d\Gamma, \\ \Gamma_u &= \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Úloha se řeší na membráně $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Membrána má předepsanou Dirichletovu podmínku na levé straně ($x = 0, 0 \leq y \leq 1$). Síla působící na membránu je konstantní a má hodnotu $f = -1$. Koeficient g má hodnotu 1. Membrána je zobrazena na obrázku 2.5.1.



Obrázek 2.5.1.

Spojité úloha, která je zadaná na začátku příkladu 2.5.2, je diskretizována pomocí metody konečných nebo hraničních prvků, tím dostáváme úlohu

$$\min_{\substack{U=0 \\ \text{na } \Gamma_u}} J(U), \text{ kde } J(U) = \frac{1}{2}U^T A U - F^T U + |b^T U|,$$

kde U je vektor popisující průhyb jednotlivých bodů sítě diskretizované membrány, A je globální matice tuhosti a F popisuje vektor sil.

Poté odstraníme nehladký člen z diskretizované úlohy převedením na následující úlohu

$$\min_{\substack{U=0 \\ \text{na } \Gamma_u}} \max_{|\mu| \leq 1} \frac{1}{2} U^T A U - F^T U + \mu b^T U.$$

Ke zmenšení velikosti úlohy pak můžeme navíc použít metodu rozložení oblasti (tj. oblast Ω rozložíme na podoblasti Ω_i , $i = 1, \dots, n$) a tím dostaneme úlohu

$$\min_{\substack{U=0 \\ \text{na } \Gamma_u, \\ BU=0}} \max_{|\mu| \leq 1} \frac{1}{2} U^T A U - F^T U + \mu b^T U,$$

kde podmínka $BU = 0$ zajišťuje spojitost průhybu membrány na hranicích mezi jednotlivými podoblastmi Ω_i . Langrangian příslušný předchozí úloze je zadán takto

$$L(U, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} U^T A U - F^T U + \mu b^T U + \lambda^T B U.$$

Je známo (viz [4]), že řešení předchozí úlohy je ekvivalentní řešení této sedlobodové úlohy

$$\text{Najděte } (\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \text{ takové, že } L(\bar{U}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sup_{\lambda, |\mu| \leq 1} \inf_U L(U, \lambda, \mu). \quad (\text{SPP})$$

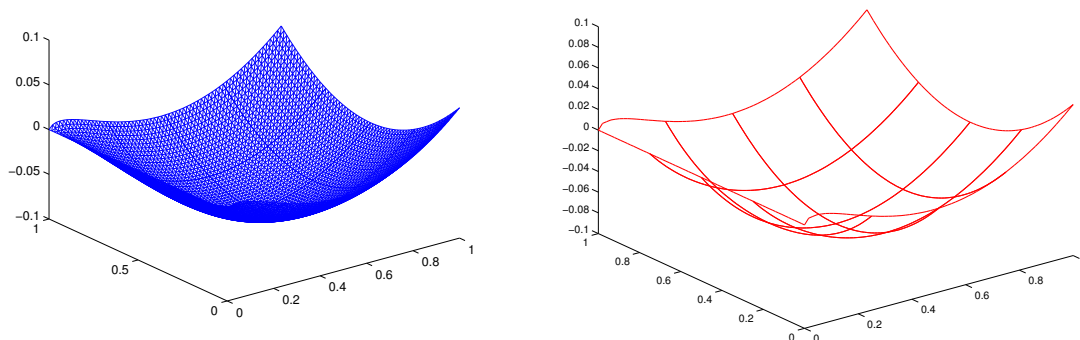
Pro fixované λ a μ splňuje U minimalizující $L(\cdot, \lambda, \mu)$ následující rovnost

$$A U - F + \mu b^T + B^T \lambda = 0.$$

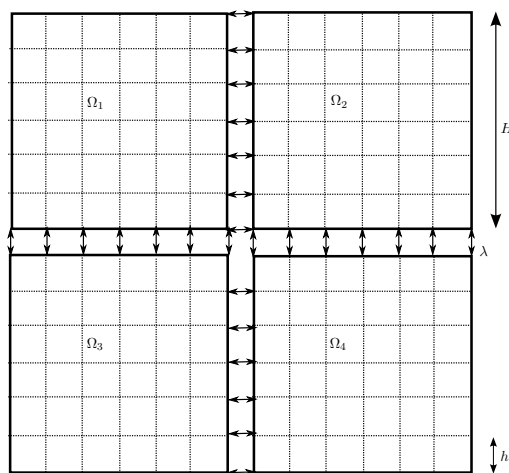
Pokud z této rovnice vyjádříme U a dosadíme zpět do úlohy (SPP) a změnímme znaménka, dostaneme duální úlohu kvadratického programování s nerovnostními a rovnostními omezeními. Tuto úlohu můžeme velmi efektivně řešit s použitím projekcí (viz [7]).

Řešení této úlohy, která se svou strukturou blíží 2D kontaktní úloze s Coulombovým třením, lze vidět na následujících obrázcích. Na obrázku 2.5.2. je zobrazeno řešení úlohy s využitím metody konečných prvků spojených s metodou rozložení oblasti (FETI1), na obrázku 2.5.3. je vykresleno řešení úlohy při použití metody hraničních prvků spojených s metodou rozložení oblasti (BETI). Tuto úlohu lze interpretovat jako model průhybu membrány, na kterou působí shora síla a na hranici Γ působí síla proti průhybu membrány.

Následující tabulky dokumentují numerickou škálovatelnost řešení dané úlohy. H/h udává poměr mezi duální a primární sítí, tj. diskretizaci každé jednotlivé podoblasti. H udává velikost duální sítě, tj. dělení celé membrány na podoblasti (viz obrázek 2.5.4.).



Obrázek 2.5.2., 2.5.3.



Obrázek 2.5.4.

V tabulce horní řádek každého pole ukazuje velikost primární úlohy (tj. velikost primární sítě)/velikost duální úlohy (tj. velikost duální sítě)/čas řešení úlohy v sekundách, spodní řádek udává počet iterací metody sdružených gradientů potřebných pro řešení úlohy. Úloha byla řešena s přesností $\epsilon = 10^{-4} \cdot \|b\|$. Tabulka 2.5.1. popisuje počty iterací a další charakteristiky úlohy při použití algoritmu FETI1, tabulka 2.5.2. popisuje totéž při použití metody Total FETI (podobná jako FETI1, navíc je ale Dirichletova podmínka zajištěna omezeními na rovnost, tuto rovnost opět vynutíme pomocí Lagrangeových multiplikátorů, kterými předepíšeme rovnostní vazbu), tabulka 2.5.3. dokumentuje rychlost řešení úlohy při použití hraničních prvků, tj. BETI.

△

$H/h \parallel H$	1/2	1/4	1/6	1/8
16	1156/67/0.02 9	4624/399/0.44 18	10404/995/2.63 20	18496/1855/11.60 24
8	324/35/0.02 14	1296/207/0.14 13	2916/515/0.52 14	5184/959/1.88 16
4	100/19/0.03 11	400/111/0.05 19	900/275/0.31 24	1600/511/0.96 25

Tabulka 2.5.1.

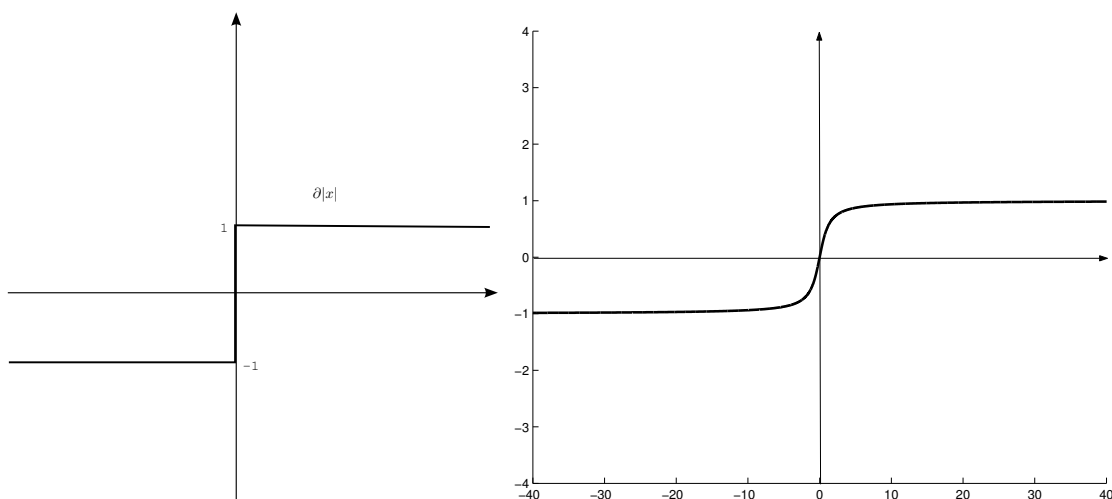
$H/h \parallel H$	1/2	1/4	1/6	1/8
16	1156/67/0.04 19	4624/399/0.81 32	10404/995/4.89 38	18496/1855/17.69 42
8	324/35/0.03 16	1296/207/0.21 23	2916/515/0.98 26	5184/959/3.66 31
4	100/19/0.06 13	400/111/0.06 17	900/275/0.24 21	1600/511/0.73 19

Tabulka 2.5.2.

$H/h \parallel H$	1/2	1/4	1/6	1/8
16	256/68/0.02 10	1024/400/0.36 14	2304/996/2.54 20	4096/1856/6.50 17
8	128/36/0.02 8	512/208/0.12 11	1152/516/0.59 15	2048/960/1.52 12
4	64/20/0.04 7	256/112/0.06 9	576/276/0.17 10	1024/512/0.39 10

Tabulka 2.5.3.

V předchozím případě jsme se poprvé v této práci seznámili s problémem, který svou strukturou odpovídá kontaktnímu problému se zadaným třením a lze jej upravit i na kontaktní problém s Coulombovým třením. Jinou možností je nenahrazovat nehladký člen hladkým členem jako při použití penalty či eliminace nehladkého členu jako v předchozím příkladě, ale nahrazovat přímo Clarkeův zobecněný gradient původní funkce. Např. Clarkeův zobecněný gradient funkce $|x|$ lze poměrně dobře nahradit členem $\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\gamma_0}\right)$, kde γ_0 udává strmost funkce \arctan . Pro funkci $|x|$, můžeme porovnat Clarkeův zobecněný gradient této funkce (viz obrázek 2.5.5.) a funkci $\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\gamma_0}\right)$, kde $\gamma_0 = 1$ (viz obrázek 2.5.6.). Navíc se v případě nahrazení zobecněného gradientu funkce $|x|$ funkcí $\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\gamma_0}\right)$, dá velmi snadno získat i derivace druhého řádu dané funkce. Nevýhodou tohoto postupu je citlivost algoritmů na volbu γ_0 , která v některých případech způsobuje zhoršení rychlosti konvergence.



Obrázek 2.5.5., 2.5.6.

Výše uvedený postup se používá např. v časově závislých průmyslových aplikacích při simulacích tváření kovů jako v následujícím příkladě. Podrobněji se lze s těmito typy úloh setkat v [24].

Nyní se již budeme věnovat metodám, které přímo pracují s nehladkými problémy. Další možností pro řešení úloh nehladké optimalizace je použití subgradientní metody. Subgradientní metoda potřebuje pro své fungování existenci procedury, která je schopna v každém bodě $x \in \mathbf{R}^n$ vypočítat hodnotu funkce $f(x)$ a jeden (libovolný) Clarkeův subgradient $g \in \partial f(x)$. Tato metoda pak na základě znalosti tohoto jednoho subgradientu vygeneruje směr kroku d pro stávající iteraci. Pro své nevýhody je tato metoda pro naše úlohy nevhodná.

Další širokou skupinou algoritmů, které jsou určeny pro minimalizaci nehladkých funkcí jsou bundle metody a jejich modifikace. Základní verze bundle metod byla vyvinuta nezávisle C. Lemarechaem a P. Wolfem a publikována byla v roce 1975. Tato metoda potřebuje opět proceduru, která vrací v každém bodě $x \in \mathbf{R}^n$ funkční hodnotu $f(x)$ a jeden (libovolný) Clarkeův subgradient $g \in \partial f(x)$. Narozdíl od subgradientní metody ale bundle metoda uchovává subgradientní informaci nejen z aktuální iterace x_k , ale též subgradients g_i z minulých iterací y_i , množinu indexů sbgradientů z minulých iterací uchovávaných ve svazku označíme J_k . Na základě těchto informací pak bundle metoda aproximuje Clarkeův zobecněný gradient v aktuální iteraci, tj. metoda má „úplnější“ informaci o chování funkce. Tyto uložené subgradients g_i modelují funkci f v aktuálním bodě x_k s různou přesností. Tato přesnost, která udává vzdálenost $g_i \in \partial f(y_i)$ od Clarkeova zobecněného gradientu $\partial f(x_k)$, je dána u konvexních funkcí číslem $\alpha(x_k, y_i) = \alpha_i^k = f(x_k) - (f(y_i) + g_i^T(x_k - y_i))$. U nekonvexních funkcí popisuje tuto vzdálenost funkce $\beta(x_k, y_i) = \beta_i^k = \max\{\alpha_i^k, \|x_k - y_i\|^2\}$. Díky znalosti aproximace Clarkeova zobecněného gradientu je snadné implementovat ukončující podmínku (s využitím věty 2.1.2). Pro směr poklesu generovaný bundle metodou v bodě x_k platí $d_k = -z_k$, přičemž z_k je určeno konvexní kombinací subgradientů ze svazku. Navíc platí, že čím je větší chyba subgradientu β_i^k (příp. α_i^k), tím méně ovlivňuje daný subgradient g_i směr poklesu d_k . Budle metoda má také vypracovanou strategii volby délky kroku - u základní verze je to klasický line search a tím má tato metoda zaručen vyšší řád konvergence než subgradientní metoda. Bundle se také umí vyrovnat s případným „špatným“ směrem d_k . Pokud směr d_k nalezený bundle metodou v bodě x_k na základě aproximovaného Clarkeova zobecněného gradientu nevede k dostatečnému poklesu funkční hodnoty, provedeme tzv. *null step*, tj. obohatíme náš model přidáním dalšího subgradientu v blízkosti bodu x_k a tím „vylepšíme“ aproximaci Clarkeova zobecněného gradientu v bodě x_k a zůstaneme v bodě $x_{k+1} = x_k$. V opačném případě (při dostatečném poklesu funkční hodnoty ve směru d_k) provedeme tzv. *serious step*, tj. přejdeme do nového bodu $x_{k+1} = x_k + td_k$, kde velikost kroku t je generována pomocí line search. Protože velikost počítačové paměti je omezená a také kvůli zajištění efektivity výpočtu je nutné omezit počet subgradientů, kterými modelujeme Clarkeův zobecněný gradient. K tomu slouží tzv. *reset*, tj. při překročení únosného počtu subgradientů vybereme pouze některé subgradients z původního svazku a zbylé z něj vymažeme. Lemarechalův algoritmus pro minimalizaci nehladkých nekonvexních funkcí realizovaný v jazyce Fortran vedl k úloze vyhledávání směru ve tvaru kvadratického programu

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i g_i \right\|^2, \\ & \text{s omezením} \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i \in J_k, \\ & \sum_{i \in J_k} \lambda_i = 1, \\ & \sum_{i \in J_k} \lambda_i \beta_i^k \leq \varepsilon_k. \end{aligned} \tag{BP}$$

Směr $d_k = -\sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$, kde λ_i^k , $i \in J_k$ je řešením kvadratického programu (BP). Slabým místem takto navrženého algoritmu je nutnost volit dopředu koeficient ε_k .

Další modifikaci bundle metod zajistilo využití cutting plane method. Na základě cutting plane method modifikujeme bundle metodu tak, že odstraníme nepříjemnou volbu ε_k a priori, tj. volbu velikosti oblasti, na které se aproximuje Clarkeův zobecněný gradient $\partial f(x_k)$. Cutting plane method převádí problém minimalizace nehladké nekonvexní funkce $\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x)$ na iterační problém $\min_d \hat{f}_k(x_k + d) + \frac{1}{2t_k} \|d\|^2$, kde $\hat{f}_k(x_k + d) = \max_{i \in J_k} \{f(y_i) + g_i^T(x_k + d - y_i)\} = f(x_k) + \max_{i \in J_k} \{g_i^T d - \beta_i^k\}$. Řešení dané úlohy označíme d_k a toto d_k je opět směr poklesu, ve kterém provedeme line search následovaný serious stepem či null stepem stejně jako v předchozím případě. Z numerických důvodů je výhodné řešit duální formulaci výše uvedené úlohy, tím dostaneme opět úlohu kvadratického programování, pro kterou existují rychlé řešiče. Duální formulace úlohy vypadá takto

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i g_i \right\|^2 + \frac{1}{t_k} \sum_{i \in J_k} \lambda_i \beta_i^k, \\ & \text{s omezením} \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i \in J_k, \\ & \sum_{i \in J_k} \lambda_i = 1. \end{aligned} \tag{BCPP}$$

Směr poklesu d_k dostaneme jako $d_k = -t_k \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$, kde λ_i^k , $i \in J_k$ je řešením kvadratického programu (BCPP). Očekávaný pokles ve směru d_k , je modelován funkcí $v(t_k) = -t_k \left\| \sum_{i \in J_k} \lambda_i g_i \right\|^2 - \sum_{i \in J_k} \lambda_i \beta_i^k$. Problematickým místem takto navrženého algoritmu je nyní nutnost volit dopředu koeficient t_k . Toto slabé místo je odstraněno použitím strategie pro určování délky kroku, kterou používá trust region metoda. Hlavní myšlenka trust region metody je minimalizace funkce f pouze na okolí bodu x_k , ve kterém očekáváme „dobrou“ shodu funkce f s jejím modelem. Toto okolí, přesněji velikost tohoto okolí se mění v průběhu výpočtu. To je implementováno následujícím způsobem:

(i) Jestliže (skutečný pokles $\leq k_1 \cdot$ očekávaný pokles), pak zvětšete velikost okolí, na kterém minimalizujete funkci

(ii) Jestliže (skutečný pokles $\geq k_2 \cdot$ očekávaný pokles), pak zmenšete velikost okolí, na kterém minimalizujete funkci

(iii) Jinak neměňte velikost okolí, na kterém minimalizujete funkci

Mezi parametry k_1 a k_2 je následující vztah $0 < k_2 \leq k_1 < 1$. Touto strategií nahra-
zujeme line search v předchozí verzi bundle metody.

Spojením této strategie určování délky kroku a bundle metody vzniklé na základě cutting plane method dostáváme tzv. bundle trust metodu. Tato velmi efektivní metoda je použita i pro naše úlohy, které jsou formulovány jako MPEC. Její stručný kompletní algoritmus uvádíme níže. Podrobně viz [37] a [33].

Algoritmus bundle trust metody:

1. Zvolte počáteční bod $x_1 \in \mathbf{R}^n$ a parametry $T > 0$, $0 < m_1 < m_2 < 1$, $0 < m_3 < 1$, $\varepsilon \geq 0$ a omezení velikosti svazku $j_{max} \geq 3$
2. Spočítejte $f(x_1)$, $g_1 \in \partial f(x_1)$ a položte $y_1 = x_1$, $J_1 = \{1\}$ a $k = 1$.
3. Vnitřní iterace: Spočítejte x_{k+1} a g_{k+1} pomocí vnitřní iterace uvedené níže nebo zjistěte, že x_k je „téměř stacionární“ (v tom případě skončete)
4. Jestliže $|J_k| = j_{max}$, pak jděte do 5., jinak položte $J = J_k$ a pokračujte 6.
5. Reset: Vyberte $J \subset J_k$ při splnění $|J| \leq j_{max} - 2$ a $\max\{i \in J_k, \beta_{k,i} = 0\} \in J$. Dále zaved'me další index \tilde{k} a definujme s použitím agregací $z_k = \sum_{i \in J_k} \lambda_i^k g_i$, $\sigma = \sum_{i \in J_k} \lambda_i \beta_i^k$: $g_{\tilde{k}} = z_k$, $\beta_{\tilde{k}}^k = \sigma$, $J = J \cup \{\tilde{k}\}$.
6. Update: Jestliže výstupem vnitřní iterace byl Serious Step, potom položte: $\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k + f(x_{k+1}) - f(x_k) - g_i^T d_k$ pro $i \in J$, $\beta_i^{k+1} = \max\{\alpha_i^{k+1}, \|x_{k+1} - y_i\|^2\}$, $\beta_{k+1}^{k+1} = 0$. Jestliže výstupem vnitřní iterace byl Null Step, potom položte: $\beta_i^{k+1} = \beta_i^k$ pro $i \in J$, $\beta_{k+1}^{k+1} = \beta(x_k, y_{k+1})$.
Položte $J_{k+1} = J \cup \{k+1\}$ a pokračujte 2.

Vnitřní iterace $x_k \rightarrow x_{k+1}$:

1. Vyberte $t^1 = t_{k-1}$. Položte $l^1 = 0$, $u^1 = T$ a $j = 1$.
2. Spočítejte řešení $(v^j, d^j) = (v(t^j), d(t^j))$ úlohy (BCPP). Jestliže $\frac{1}{t^j} \|d^j\| \leq \varepsilon$ a $-\frac{1}{t^j} \|d^j\|^2 - v^k \leq \varepsilon$, potom skončete: x_k je „téměř stacionární“. Jinak položte $y^j = x_k + d^j$ a spočítejte $g^j \in \partial f(y^j)$.
3. (a) Jestliže je splněna podmínka $f(y^j) - f(x_k) < m_1 v^j$, potom proved'te Serious Step, tj. $x_{k+1} = y_{k+1} = y^j$, $g_{k+1} = g^j$ a skončete.
(b) Jestliže je splněna podmínka $f(y^j) - f(x_k) \geq m_1 v^j$ a současně $\alpha(x_k, y^j) \leq m_3 \sigma_{k-1}$ nebo $|f(x_k) - f(y^j)| \leq \|z_{k-1}\| + \sigma_{k-1}$ a ještě podmínka $(g^j)^T d^j - \beta_{k,j} \geq m_2 v^j$, potom proved'te Null Step, tj. $x_{k+1} = x_k$, $y_{k+1} = y^j$, $g_{k+1} = g^j$ a skončete.
(c) Jestliže je splněna podmínka $f(y^j) - f(x_k) \geq m_1 v^j$ a současně $\alpha(x_k, y^j) \leq m_3 \sigma_{k-1}$ nebo $|f(x_k) - f(y^j)| \leq \|z_{k-1}\| + \sigma_{k-1}$, ale není splněna podmínka $(g^j)^T d^j - \beta_{k,j} \geq m_2 v^j$, potom:
 - i. Jestliže platí $|f(x_k) - f(y^j)| \leq \|z_{k-1}\| + \sigma_{k-1}$, potom položte $d_k = d^j$, $v_k = v^j$ a proved'te line search podél $x_k + s d_k$, $s \geq 0$.

- ii. Jinak položte $u^{j+1} = t^j$, $l^{j+1} = l^j$, $t^{j+1} = \frac{1}{2}(u^{j+1} + l^{j+1})$, $j = j + 1$ a vraťte se do 2.
- (d) Jestliže je splněna podmínka $f(y^j) - f(x_k) \geq m_1 v^j$, ale není splněna podmínka $\alpha(x_k, y^j) \leq m_3 \sigma_{k-1}$ nebo $|f(x_k) - f(y^j)| \leq \|z_{k-1}\| + \sigma_{k-1}$ položte $u^{j+1} = t^j$, $l^{j+1} = l^j$, $t^{j+1} = \frac{1}{2}(u^{j+1} + l^{j+1})$, $j = j + 1$ a vraťte se do 2.

Nyní se ještě v krátkosti podívejme na konvergenci bundle trust metody pro nekonvexní a lokálně lipschitzovské funkce na \mathbf{R}^n v případě, že v předchozím algoritmu platí $\varepsilon = 0$.

Teorém 2.5.1 *Nechť funkce f je slabě polohladká a lokálně lipschitzovsky spojitá na \mathbf{R}^n . Jestliže funkce f je omezená zdola a posloupnost iterací generována bundle trust metodou $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ je omezená, pak existuje hromadný bod \bar{x} posloupnosti $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ takový, že platí $0 \in \partial f(\bar{x})$.*

Důkaz V [37].

□

Protože se v následujících kapitolách budeme zabývat minimalizací slabě polohladkých zdola omezených funkcí máme při omezenosti posloupnosti $\{x_k\}$ zaručenu existenci hromadného bodu posloupnosti jednotlivých iterací bundle trust metody při řešení našich úloh.

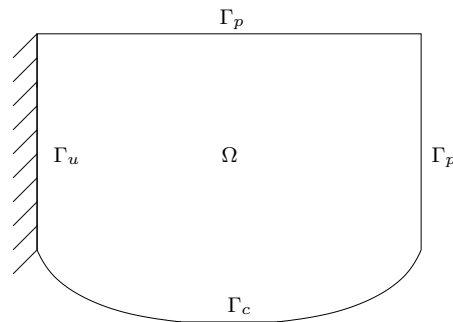
Kapitola 3

Stavová úloha - kontaktní problém s Coulombovým třením

V této části se nejprve seznámíme s formulací úlohy na „dolní“ úrovni Matematického programu s rovnovážnými omezeními, který v naší práci řešíme. V našem případě jde o úlohu popisující kontaktní problém s Coulombovým třením. Nejprve si představíme formulaci naší úlohy a pak se zaměříme na otázky řešení dané úlohy. Nejprve pomocí aproximace variační rovnosti a následně pomocí techniky pevného bodu. Na závěr se podíváme ještě na jinou formulaci naší úlohy vhodnou pro následné řešení MPECu popisujícího tvarovou optimalizaci kontaktní úlohy s Coulombovým třením. Tato formulace kontaktní úlohy s Coulombovým třením bude založena na zobecněné rovnosti.

3.1 Formulace kontaktního problému s Coulombovým třením

Zabývejme se rovinným pružným tělesem $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Hranice $\partial\Omega$ je složena ze tří nepřekrývajících se částí Γ_u , Γ_p a Γ_c . Viz obrázek 3.1.1.



Obrázek 3.1.1.

Na hranicích Γ_u , Γ_p a Γ_c jsou předepsány tři rozdílné okrajové podmínky. Γ_u je hranice, na které je těleso Ω pevně uchyceno, tj., Γ_u je hranice s Dirichletovskou podmínkou.

Povrchové síly $F = (F_1, F_2)$ působí na hranici Γ_p , $F \in L^2(\Gamma_p)$. Těleso Ω je zdola „podepřeno“ podél hranice Γ_c tuhou polorovinou $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 0\}$. Na této hranici Γ_c uvažujeme v našem modelu Coulombovo tření. Předpokládejme v této kapitole, že těleso Ω má svou kontaktní hranici Γ_c položenou celou na vnitřní překážce, tj.

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in (0, a), 0 < x_2 < 1\}.$$

Úkolem, kterým se zabýváme v této kapitole je nalezení rovnovážného stavu Ω , tj. hledáme takový vektor posunutí $u = (u_1, u_2)$, který je v rovnováze s povrchovými silami F . Nechtě $\tau(u) = (\tau_{ij}(u))_{i,j=1}^2$ je symetrický tenzor napětí daný vektorem u a nechtě $\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ je linearizovaný tenzor deformace. Vztah mezi tenzorem napětí a deformace je daný Hookovým zákonem

$$\tau_{ij}(u) = c_{ijkl}\epsilon_{kl}(u), \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (3.1.1)$$

kde $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ jsou pružnostní koeficienty splňující obvyklé podmínky symetrie a pružnosti pro $\Omega \forall i, j, k, l$:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl} = c_{klij} \text{ skoro všude v } \Omega, \\ \exists \alpha = \text{const.} > 0 : c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} &\geq \alpha\xi_{ij}\xi_{kl} \text{ skoro všude v } \Omega \\ &\text{pro libovolnou symetrickou matici } \xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^2. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Vektorem $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ označíme jednotkový vnější normálový vektor vzhledem k $\partial\Omega$ a vektorem $t = (t_1, t_2)$ označujeme jednotkový tečný vektor vzhledem k $\partial\Omega$. $\mathcal{F} \geq 0$ je koeficient Coulombova tření na Γ_c . Kontaktní problém s Coulombovým třením je popsán následujícími vztahy (3.1.3) - (3.1.9):

$$\frac{\partial \tau_{ij}(u)}{\partial x_j} = 0 \text{ v } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.3)$$

$$\tau_{ij}\nu_j = F_i \text{ na } \Gamma_p, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.4)$$

$$u_i = 0 \text{ na } \Gamma_u, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.5)$$

$$u_\nu T_\nu(u) = 0 \text{ na } \Gamma_c, \text{ kde } u_\nu \equiv u \cdot \nu \leq 0, \quad T_\nu(u) \equiv \tau_{ij}(u)\nu_i\nu_j \leq 0, \quad (3.1.6)$$

$$|T_t(u)| \leq -\mathcal{F}T_\nu(u), \text{ kde } T_t \equiv \tau_{ij}(u)\nu_j t_i \text{ na } \Gamma_c, \quad (3.1.7)$$

$$|T_t(u)| < -\mathcal{F}T_\nu(u)(x) \Rightarrow u_t(x) \equiv (ut)(x) = 0 \text{ na } \Gamma_c, \quad (3.1.8)$$

$$|T_t(u)| = -\mathcal{F}T_\nu(u)(x) \Rightarrow \exists \lambda(x) > 0 : u_t(x) = \lambda(x)\mathcal{F}T_\nu(u)(x) \text{ na } \Gamma_c. \quad (3.1.9)$$

Vztah (3.1.3) popisuje podmínku rovnováhy, (3.1.4) popisuje chování povrchových sil na Γ_p , vztahem (3.1.5) je předepsáno posunutí pružného tělesa na hranici Γ_u (tj. Dirichletova okrajová podmínka). Vztah (3.1.6) popisuje jednostrannou podmínku na hranici Γ_c a vztahy (3.1.7) - (3.1.9) je popsán Coulombův model tření.

Existuje také jiná možnost jak popsat kontaktní problém s Coulombovým třením. Řešení tohoto problému lze získat také jako řešení následující variační nerovnosti:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Najdeme } u \in \mathbf{K} = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_u \text{ a } v_\nu \leq 0 \text{ na } \Gamma_c\}, \text{ takové, že} \\ &\int_{\Omega} \tau_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v - u)dx + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}|T_\nu|(|v_t| - |u_t|)d\Gamma_c \geq \int_{\Gamma_p} F(v - u)d\Gamma_p \quad \forall v \in \mathbf{K}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

Nyní se blíže podíváme na dva způsoby řešení kontaktního problému s Coulombovým třením. První možnost je založena na aproximaci nerovnosti (3.1.10) variační rovnicí pomocí metody penalizace a poté s využitím nějaké „vyhlazovací“ procedury. Druhou možností je popis kontaktního problému se zadaným třením pomocí smíšené konečně-prvkové formulace a poté využití metody pevného bodu k řešení kontaktního problému s Coulombovým třením.

3.2 Otázky existence řešení pomocí aproximace variační rovností

Nyní nahradíme variační nerovnost (3.1.10) variační rovnicí. Pro toto nahrazení využijeme penalizace podmínky nepronikání a regularizace členu se třením.

Nejprve nahradíme podmínku nepronikání $u_\nu \leq 0$ na množině \mathbf{K} přidáním penalizačního funkcionálu $\int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon}[u_\nu]_+(v_\nu - u_\nu)d\Gamma_c$ k levé straně nerovnosti (3.1.10), kde $[\cdot]_+ \equiv \max\{0, \cdot\}$ a $\varepsilon > 0$.

Nyní jsme schopni nahradit hraniční normálové napětí $T_\nu(u)$ členem $-[u_\nu]_+/\varepsilon$ a tím dostaneme následující variační nerovnost:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdeme } u_\varepsilon \in \mathbf{V} = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, \text{ takové, že} \\ & \int_{\Omega} \tau_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v - u_\varepsilon) dx + \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon} [(u_\varepsilon)_\nu]_+ (v_\nu - (u_\varepsilon)_\nu) d\Gamma_c + \\ & \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon} [(u_\varepsilon)_\nu]_+ \mathcal{F}(|v_t| - |(u_\varepsilon)_t|) d\Gamma_c \geq \int_{\Gamma_p} F(v - u_\varepsilon) d\Gamma_p \quad \forall v \in \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

Ted' nahradíme nediferencovatelnou Eukleidovskou normu $|\cdot|$ hladkým a konvexním funkciónálem $\Phi_\eta(\cdot)$, např.

$$\Phi_\eta(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq \eta \\ -\frac{|x|^4}{8\eta^3} + \frac{3|x|^2}{4\eta} + \frac{3\eta}{8}, & |x| < \eta, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

kde gradient je

$$\nabla \Phi_\eta(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & |x| \geq \eta \\ -\frac{x^3}{2\eta^3} + \frac{3x}{2\eta}, & |x| < \eta \end{cases} \quad (3.2.3)$$

a tím jsme získali „vyhlazenou“ verzi (3.2.1).

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdeme } u_{\varepsilon,\eta} \in \mathbf{V} = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, \text{ takové, že} \\ & \int_{\Omega} \tau_{ij}(u_{\varepsilon,\eta}) \varepsilon_{ij}(v - u_{\varepsilon,\eta}) dx + \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,\eta})_\nu]_+ (v_\nu - (u_{\varepsilon,\eta})_\nu) d\Gamma_c + \\ & \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,\eta})_\nu]_+ \mathcal{F}(\Phi_\eta(v_t) - \Phi_\eta((u_{\varepsilon,\eta})_t)) d\Gamma_c \geq \int_{\Gamma_p} F(v - u_{\varepsilon,\eta}) d\Gamma_p \quad \forall v \in \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

Následuje několik technických úprav. Přidáme testovací funkci $v = u_{\varepsilon,\eta} \pm \lambda v$ do nerovnosti (3.2.4), poté podělíme výsledek členem λ a položíme $\lambda \rightarrow 0$. Jako výsledek dostaneme následující variační rovnost:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdeme } u_{\varepsilon,\eta} \in \mathbf{V} = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_u\}, \text{ takové, že} \\ & \int_{\Omega} \tau_{ij}(u_{\varepsilon,\eta}) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,\eta})_\nu]_+ v_\nu d\Gamma_c + \\ & \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\varepsilon} [(u_{\varepsilon,\eta})_\nu]_+ \mathcal{F}(\nabla \Phi_\eta((u_{\varepsilon,\eta})_t)) v_t d\Gamma_c = \int_{\Gamma_p} F v d\Gamma_p \quad \forall v \in \mathbf{V}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

Kontaktní problém s Coulombovým třením nyní můžeme vyřešit numericky po vhodné diskretizaci rovnice (3.2.5) s volbou parametrů ε a η . Hlavní nevýhoda tohoto přístupu pro numerické řešení kontaktní úlohy s Coulombovým třením je nutnost řešit soustavu rovnic závislejších na „malých“ parametrech ε a η .

Více podrobností a podrobnou diskuzi otázek existence řešení kontaktního problému s Coulombovým třením popsáno variační rovnicí (3.2.5) lze nalézt v [12].

3.3 Otázky existence řešení pomocí metody pevného bodu

Tento způsob řešení je založen na metodě pevného bodu. Nejprve sestavíme formulaci kontaktního problému se zadaným třením. Poté se budeme zabývat formulací kontaktního problému s Coulombovým třením pro spojitý případ. A po diskretizaci formulace kontaktní úlohy se zadaným třením, můžeme popsat kontaktní problém s Coulombovým třením jako úlohu hledání pevného bodu v diskrétním případě.

3.3.1 Spojitý případ

Nejprve si zavedeme následující množiny funkcí:

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, \quad \mathbf{V} = V \times V, \\ \mathbf{K} &= \{v \in \mathbf{V} \mid v_\nu \leq 0 \text{ na } \Gamma_c\}, \\ W_\nu &= \{\varphi \in L^2(\Gamma_c) \mid \exists v \in \mathbf{V} : \varphi = v_\nu \text{ na } \Gamma_c\}, \\ W_t &= \{\varphi \in L^2(\Gamma_c) \mid \exists v \in \mathbf{V} : \varphi = v_t \text{ na } \Gamma_c\}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Všimněme si, že \mathbf{K} značí stejnou množinu jako v (3.1.10).

Nechť W'_ν, W'_t označují duální prostory k prostorům W_ν, W_t . Dále se omezíme pouze na dostatečně hladkou hranici Γ_c , pro kterou platí

$$W_\nu = W_t = H^{1/2}(\Gamma_c) = \{\varphi \in L^2(\Gamma_c) \mid \exists v \in V : \varphi = v \text{ na } \Gamma_c\}. \quad (3.3.2)$$

Nadále budeme používat W místo W_ν a W_t . W' je opět duál k W . Dále nechť

$$\Lambda_\nu = \{\mu_\nu \in W' \mid \langle \mu_\nu, v_\nu \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}\} \quad (3.3.3)$$

je kužel nekladných funkcionalů na W' . Dále si zavedeme další množinu

$$\Lambda_t = \{\mu_t \in L^2(\Gamma_c) \mid |\mu_t| \leq 1 \text{ skoro všude na } \Gamma_c\}. \quad (3.3.4)$$

Nyní máme vše připraveno pro slabou formulaci kontaktního problému se *zadaným* třením. Pro libovolné pevné $g \in L^2(\Gamma_c)$ uvažujme následující úlohu:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najděme } (u, \lambda_\nu, \lambda_t) &\equiv (u(g), \lambda_\nu(g), \lambda_t(g)) \in \mathbf{V} \times \Lambda_\nu \times \Lambda_t \text{ takové, že} \\ a(u, v) &= L(v) + \langle \lambda_\nu, v_\nu \rangle + \langle \mathcal{F}g\lambda_t, v_t \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}, \\ \langle \mu_\nu - \lambda_\nu, u_\nu \rangle + \langle \mathcal{F}g(\mu_t - \lambda_t), u_t \rangle &\geq 0 \quad \forall (\mu_\nu, \mu_t) \in \Lambda_\nu \times \Lambda_t, \end{aligned} \right\} (\mathcal{P}(g))$$

kde

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int \tau_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \\ L(v) &= \int_{\Gamma_p} F v ds. \end{aligned}$$

¹Musíme používat pouze takové \mathcal{F} , pro které $\mathcal{F}g$ patří do W' .

Bylo dokázáno, že $(\mathcal{P}(g))$ má jednoznačné řešení pro libovolné $g \in L^2(\Gamma_c)$. Interpretace řešení je následující: u je vektor posunutí řešící kontaktní problém se zadaným třením, u kterého je normálové napětí T_ν nahrazeno předepsanou funkcí g .

Poznámka 3.3.1 Poznamenejme, že u řeší následující minimalizační úlohu:

$$u \in \mathbf{K} : J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathbf{K}, \quad (\overline{\mathcal{P}}(g))$$

kde

$$J(v) = J_0(v) + j(v)$$

je funkcionál potenciální energie a

$$\begin{aligned} J_0(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - L(v), \\ j(v) &= -\langle -\mathcal{F}g, |v_t| \rangle \end{aligned}$$

a $\lambda_\nu(u) = T_\nu(u)$, $\mathcal{F}g\lambda_t(u) = T_t(u)$.

Protože předcházející úloha $(\mathcal{P}(g))$ má jednoznačné řešení, můžeme zavést zobrazení $\Phi : L^2(\Gamma_c) \rightarrow \Lambda_\nu$:

$$\Phi(g) = \lambda_\nu(g) \quad \forall g \in L^2(\Gamma_c), \quad (3.3.5)$$

kde $\lambda_\nu(g)$ je druhá složka řešení $(\mathcal{P}(g))$. Nyní můžeme zavést řešení kontaktního problému s Coulombovým třením jako pevný bod zobrazení Φ , tj., $\overline{\lambda}_\nu \in L^2(\Gamma_c)$ je pevný bod zobrazení Φ definovaného předpisem $\Phi(\overline{\lambda}_\nu) = \overline{\lambda}_\nu$. Vektor posunutí \overline{u} řešící kontaktní úlohu s Coulombovým třením je dán první složkou řešení úlohy $(\mathcal{P}(\overline{\lambda}_\nu))$, tj., $\overline{u} = u(\overline{\lambda}_\nu)$. Tato cesta vede ke *kvazivariační* nerovnosti (tj. vstupní data úlohy $(\mathcal{P}(g))$ závisí na samotném řešení této úlohy). Bylo dokázáno, že při splnění potřebných předpokladů, má úloha řešení pro malé hodnoty \mathcal{F} .

3.3.2 Diskrétní případ

Pro účely numerických výpočtů se budeme zabývat aproximací kontaktního problému se zadaným třením. Tato aproximace je založena na diskretizaci $(\mathcal{P}(g))$. Necht' \mathbf{V}_h, W_H jsou konečněprvkové prostory, které diskretizují \mathbf{V}, W' a necht' to stejné platí pro $\Lambda_{H\nu}, \Lambda_{Ht}$ a Λ_ν, Λ_t .

Pro libovolné pevné $g_H \in \Lambda_{H\nu}$ uvažujme následující úlohu:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Najděme } (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_{H\nu}, \boldsymbol{\lambda}_{Ht}) \equiv (\mathbf{u}_h(g_H), \boldsymbol{\lambda}_{H\nu}(g_H), \boldsymbol{\lambda}_{Ht}(g_H)) \in \mathbf{V}_h \times \Lambda_{H\nu} \times \Lambda_{Ht} \\ &\text{takové, že} \\ &a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L_h(\mathbf{v}_h) + \langle \boldsymbol{\lambda}_{H\nu}, \mathbf{v}_{h\nu} \rangle + \langle \mathcal{F}g_H \boldsymbol{\lambda}_{Ht}, \mathbf{v}_{ht} \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ &\langle \boldsymbol{\mu}_{H\nu} - \boldsymbol{\lambda}_{H\nu}, \mathbf{u}_{h\nu} \rangle + \langle \mathcal{F}g_H(\boldsymbol{\mu}_{Ht} - \boldsymbol{\lambda}_{Ht}), \mathbf{u}_{ht} \rangle \geq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\mu}_{H\nu}, \boldsymbol{\mu}_{Ht}) \in \Lambda_{H\nu} \times \Lambda_{Ht}, \end{aligned} \right\} (\mathcal{P}_h(g_H))$$

kde $a_h : \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{R}$, $L_h : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{R}$ jsou aproximací bilineární formy a a lineárního zobrazení L . Bylo dokázáno, že úloha $(\mathcal{P}_h(g_H))$ má jednoznačné řešení pro libovolné $g_H \in \Lambda_{H\nu}$ pokud g_H splňuje Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi podmínku (viz [16]).

Poznámka 3.3.2 Podobně jako ve spojitém případě jsme schopni ukázat, že \mathbf{u}_h řeší následující minimalizační problém:

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h : J_h(\mathbf{u}_h) \leq J_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h, \quad (\overline{\mathcal{P}}_h(g_H))$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \mid \langle \boldsymbol{\mu}_{H\nu}, \mathbf{v}_{h\nu} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu}_{H\nu} \in \Lambda_{H\nu}\}, \\ J_h(\mathbf{v}_h) &= J_0(\mathbf{v}_h) + j_h(\mathbf{v}_h), \\ j_h(\mathbf{v}_h) &= \sup_{\boldsymbol{\mu}_{Ht} \in \Lambda_{Ht}} \langle \mathcal{F}g_H \boldsymbol{\mu}_{Ht}, \mathbf{v}_{ht} \rangle. \end{aligned}$$

Jednoznačnost řešení úlohy $(\mathcal{P}_h(g_H))$ nám dává možnost zavést zobrazení $\Phi_H : \Lambda_{H\nu} \rightarrow \Lambda_{H\nu}$ pomocí:

$$\Phi_H(g_H) = \boldsymbol{\lambda}_{H\nu}(g_H) \quad \forall g_H \in \Lambda_{H\nu}, \quad (3.3.6)$$

kde $\boldsymbol{\lambda}_{H\nu}(g_H)$ je druhá složka řešení $(\mathcal{P}_h(g_H))$. Zobrazení Φ_H je „aproximací“ zobrazení Φ . Nyní můžeme definovat řešení diskrétního kontaktního problému s Coulombovým třením (za předpokladu regularity) jako pevný bod zobrazení Φ_H , tj. $\overline{\boldsymbol{\lambda}_{H\nu}} \in \Lambda_{H\nu}$ je pevný bod zobrazení Φ_H zavedeného předpisem $\Phi_H(\overline{\boldsymbol{\lambda}_{H\nu}}) = \overline{\boldsymbol{\lambda}_{H\nu}}$. Vektor posunutí $\overline{\mathbf{u}_h}$, které řeší diskrétní kontaktní problém s Coulombovým třením je dáno jako první složka řešení $(\mathcal{P}_h(\overline{\boldsymbol{\lambda}_{H\nu}}))$, tj. $\overline{\mathbf{u}_h} = \mathbf{u}_h(\overline{\boldsymbol{\lambda}_{H\nu}})$. Diskrétní kontaktní problém s Coulombovým třením má, odlišně vzhledem k předchozímu případu, řešení pro libovolnou nezápornou hodnotu \mathcal{F} . A v případě, že \mathcal{F} je dostatečně malé, je zobrazení Φ_H kontraktivní (omezení \mathcal{F} , které zajistí kontraktivnost Φ_H je závislé na parametrech sítě).

Nyní popíšeme konstrukci prostorů \mathbf{V}_h , W_H , $\Lambda_{H\nu}$ a Λ_{Ht} . Předpokládejme dále, že těleso Ω je polygonální, hranice Γ_c je po částech lineární a koeficient \mathcal{F} je konstantní. Nechť \mathcal{T}_h je triangulací tělesa $\bar{\Omega}$, která je konsistentní s dělením hranice $\partial\Omega$ na tři nepřekrývající se části Γ_u , Γ_p a Γ_c . Definujme

$$\mathbf{V}_h = \{v_h \in (C(\bar{\Omega}))^2 \mid v_h|_T \in (P_1(T))^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ na } \Gamma_u\}.$$

Nyní se zabýváme konstrukcí prostoru W_H . Nechť $\{A_i\}_i^p$ je množina všech kontaktních uzlů z \mathcal{T}_h . Nechť δ_i je Diracova distribuce v uzlu A_i : $\delta_i(v) = v(A_i)$ pro všechna $v \in C(\bar{\Omega})$. Prostor W_H definujme jako $W_H = \{\delta_i, \dots, \delta_p\}$ a $H = 1/p$. Prostory $\Lambda_{H\nu}$ a Λ_{Ht} zavedeme pomocí

$$\Lambda_{H\nu} = \{\boldsymbol{\mu}_{H\nu} \in W_H \mid \boldsymbol{\mu}_{H\nu} = \boldsymbol{\mu}_\nu \odot \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\mu}_\nu = (\mu_{\nu 1}, \dots, \mu_{\nu p})^T \in \mathbf{R}^p, \mu_{\nu i} \leq 0 \quad \forall i\},$$

$$\Lambda_{Ht} = \{\boldsymbol{\mu}_{Ht} \in W_H \mid \boldsymbol{\mu}_{Ht} = \boldsymbol{\mu}_t \odot \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{t 1}, \dots, \mu_{t p})^T \in \mathbf{R}^p, |\mu_{t i}| \leq 1 \quad \forall i\},$$

kde $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ a $\mu \odot \delta = \mu^i \delta_i$.

Dále zavedme lineární zobrazení B_ν a B_t definované jako $v_{h\nu} = B_\nu v_h$ a $v_{ht} = B_t v_h$ $\forall v_h \in \mathbf{V}_h$ a \mathbf{B}_ν a \mathbf{B}_t jsou konstantní matice reprezentující zobrazení B_ν a B_t . Nyní můžeme zavést algebraickou formulaci úlohy ($\mathcal{P}_h(g_H)$).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najděme } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_\nu, \boldsymbol{\lambda}_t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_-^p \times \mathbf{R}_{[-1,1]}^p \\ \text{takové, že} \\ \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{l} + \mathbf{B}_\nu^T \boldsymbol{\lambda}_\nu + \mathcal{F} \mathbf{B}_t^T \boldsymbol{\lambda}_t^g, \\ (\boldsymbol{\mu}_\nu - \boldsymbol{\lambda}_\nu, \mathbf{B}_\nu \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} + \mathcal{F} (\boldsymbol{\mu}_t^g - \boldsymbol{\lambda}_t^g, \mathbf{B}_t \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu}_\nu \in \mathbf{R}_-^p, \boldsymbol{\mu}_t \in \mathbf{R}_{[-1,1]}^p, \end{array} \right\} (\mathcal{P}_A(g))$$

kde \mathbf{A} a \mathbf{l} jsou po řadě matice tuhosti a vektor sil a

$$\mathbf{R}_{[-1,1]}^p = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbf{R}^p \mid |x_i| \leq 1 \forall i \}.$$

Poznámka 3.3.3 Vzhledem k numerické efektivnosti používáme pro řešení stavové úlohy (tj. kontaktního problému s Coulombovým třením) rozštěpenou variantu metody pevného bodu (viz kapitolu 5.1).

3.4 Popis diskretizované kontaktní úlohy s Coulombovým třením pomocí zobecněné rovnosti

Nyní si ukážeme další možnost, jak zapsat rovnovážný stav tělesa Ω . Předtím si ale zavedeme rozdělení vektoru posunutí \mathbf{u} na $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu)$, kde \mathbf{u}_t přísluší tečnému posunutí a \mathbf{u}_ν odpovídá normálovému posunutí. Dále nechť \mathbf{A} je matice tuhosti a \mathbf{l} je vektor sil, které byly zavedeny v předchozí části. Nyní rozdělme matici \mathbf{A} a vektor \mathbf{l}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ff} & \mathbf{A}_{fc} \\ \mathbf{A}_{cf} & \mathbf{A}_{cc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_f \\ \mathbf{l}_c \end{bmatrix},$$

kde index c značí příslušnost k uzlům na kontaktní hranici a index f odpovídá volným uzlům. Dále se budeme zabývat pouze uzly na kontaktní hranici. K tomu musíme provést eliminaci volných uzlů. K této eliminaci využijeme Schurova komplementu a tím dostaneme restrikcí matice \mathbf{A} a vektoru \mathbf{l}

$$\mathbf{A}_{cont} = \mathbf{A}_{cc} - \mathbf{A}_{cf} \mathbf{A}_{ff}^{-1} \mathbf{A}_{fc}, \quad \mathbf{l}_{cont} = \mathbf{l}_c - \mathbf{A}_{cf} \mathbf{A}_{ff}^{-1} \mathbf{l}_f.$$

Nakonec zavedeme dělení matice \mathbf{A}_{cont} a vektoru \mathbf{l}_{cont} na tečné a normálové části

$$\mathbf{A}_{cont} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt} & \mathbf{A}_{t\nu} \\ \mathbf{A}_{\nu t} & \mathbf{A}_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_{cont} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_t \\ \mathbf{l}_\nu \end{bmatrix}.$$

Nyní již můžeme zapsat rovnovážný stav tělesa Ω pomocí zobecněné rovnosti. Tuto možnost nám dává následující věta.

Věta 3.4.1 *Trojice $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}_\nu) \in \mathbf{R}^{2p} \times \mathbf{R}_+^p$ je řešením diskrétního kontaktního problému s Coulombovým třením tehdy a jen tehdy, jestli řeší následující zobecněnou rovnost*

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &\in \mathbf{A}_{tt}\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}_\nu) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}_{\nu t}\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu - \boldsymbol{\lambda}_\nu \\ \mathbf{0} &\in \mathbf{u}_\nu + N_{\mathbf{R}_+^p}(\boldsymbol{\lambda}_\nu), \end{aligned} \right\}$$

kde

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}_\nu) = \partial_{(\mathbf{u}_t)} j(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}_\nu), \quad j(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}_\nu) = \mathcal{F} \sum_{i=1}^p \lambda_\nu^i |\mathbf{u}_t^i|$$

a $N_{\mathbf{R}_+^p}$ je standartní normálový kužel.

Důkaz V [3].

□

Kapitola 4

Matematické programy s rovnovážnými omezeními

V této části se budeme zabývat řešením Matematických programů s rovnovážnými omezeními. Podíváme se na vývoj v oblasti matematického programování, který jim předcházel a podrobněji se budeme věnovat typu úloh, které lze popsat pomocí MPECů a způsobu jejich řešení ve speciálním případě pomocí implicitního programování. Poté se zaměříme na typy rovnovážných omezení, které lze zapsat pomocí zobecněných rovností na „dolní“ úrovni MPECu. Nakonec se budeme zabývat citlivostní analýzou našich úloh.

4.1 Úvod

Než se budeme více věnovat MPECům, podíváme se na jejich předchůdce. Tím byly tzv. dvouúrovňové úlohy (Bilevel Problems), které byly poprvé formulovány v roce 1934 H. F. v. Stackelbergem jako popis ekonomického systému trhu. Později byly dvouúrovňové úlohy využity při modelování speciálních úloh optimálního řízení. Dvouúrovňová úloha je popsána takto

$$\left. \begin{array}{l} \min f_1(x, z) \\ \text{s omezeními} \\ z \in \operatorname{argmin} f_2(x, y), \\ x \in U, y \in V. \end{array} \right\} \quad (BP)$$

$f_1 : \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_2 : \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Úloha na „dolní“ úrovni dvouúrovňové úlohy, tj. minimalizace funkce f_2 , bývá často nahrazena jejími Karush-Kuhn-Tuckerovými podmínkami, ekvivalentní variační nerovností (prvního i druhého druhu) nebo kvazivariační nerovností. Tyto nerovnosti často modelují hledání rovnováhy v daném fyzikálním systému. Dvouúrovňovou úlohu s takto nahrazenou úlohou na „dolní“ úrovni nazveme Matematickým programem s rovnovážným omezením (MPEC). Mnoho inženýrských úloh je vyjádřeno pomocí MPECů. Také příklady v páté kapitole jsou tohoto typu. Podívejme se nyní na některé případy úloh na „dolní“ úrovni, které vedou

k MPECům.

Jestliže funkce $f_2(x, \cdot)$ je konvexní a diferencovatelná pro všechna x a V je konvexní a uzavřená, potom úloha na „dolní“ úrovni, tj. $\min_{y \in V} f_2(x, y)$ je ekvivalentní zobecněné rovnosti $0 \in \nabla_z f_2(x, z) + N_V(z)$.

Další možností je popsat úlohu na „dolní“ úrovni pomocí variační nerovnosti, tj.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najděte } y \in V \text{ takové, pro které platí} \\ \langle F(x, y), v - y \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \end{array} \right\} \quad (VI)$$

kde $F: \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}^m$ je spojitá funkce a V je neprázdná uzavřená konvexní podmnožina \mathbf{R}^m . Tato množina je často dána systémem rovnic a nerovnic, tj.

$$V = \{v \in \mathbf{R}^m \mid h^i(x, v) = 0, i = 1, \dots, l, g^j(x, v) \leq 0, j = 1, \dots, k\},$$

kde funkce $h^i: \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, l$ jsou afinní a funkce $g^j: \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, k$ jsou konvexní a spojitě diferencovatelné. Pokud funkce f_2 je spojitě diferencovatelná a $F = \nabla f_2(x, y)$, pak řešení úlohy (VI) je ekvivalentní řešení úlohy na „dolní“ úrovni problému (BP). Takto popsanou úlohu můžeme přepsat na zobecněnou rovnost $0 \in \nabla_y f(x, y) + N_V(y)$ nebo $0 \in F(x, y) + N_V(y)$. V případě, že V je dána systémem rovnic a nerovnic a je splněna Slater constraint qualification (Existuje $\bar{y} \in \mathbf{R}^m$ takové, že $g^j(\bar{x}, \bar{y}) < 0$, $j = 1, \dots, k$ a $h^i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $i = 1, \dots, l$), odpovídá výše uvedená zobecněná rovnost Karush-Kuhn-Tuckerovým podmínkám úlohy $\min_{y \in V} f(x, y)$:

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y) + \sum_{i=1}^l \mu^i \nabla_y h^i(x, y) + \sum_{i=1}^k \lambda^i \nabla_y g^i(x, y) = 0, \\ h^i(x, y) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ g^i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ \lambda^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ \lambda^i g^i(x, y) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{array} \right\} \quad (KKT)$$

Variační nerovnost (VI) může popisovat různé typy úloh. Mějme následující úlohu kvadratického programování $\min_{y \in V} \frac{1}{2} y^T A(x) y - b(x)^T y$, kde $A(x) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ je symetrická pozitivně definitní matice a vektor $b(x) \in \mathbf{R}^m$. Řešení této úlohy je ekvivalentní řešení následující variační nerovnosti, kde funkce $F(x, y) = A(x)y - b(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najděte } y \in V \text{ takové, pro které platí} \\ \langle A(x)y - b(x), v - y \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \end{array} \right\} \quad (VI 1)$$

a tuto variační nerovnost nazýváme variační nerovnost prvního druhu. Takovouto variační nerovností a její příslušnou zobecněnou rovností popisujeme např. kontaktní úlohy bez tření či stacionární úlohy vedení tepla.

Jestliže funkce $f_2(x, \cdot)$ není spojitě diferencovatelná, pak nemůžeme minimalizační úlohu přepsat pomocí úlohy (VI). Řešení úlohy $\min_{y \in V} \frac{1}{2} y^T A(x) y - b(x)^T y + g|c(x)^T y|$, kde $A(x) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ je symetrická pozitivně definitní matice a vektory $b(x) \in \mathbf{R}^m$ a $c(x) \in \mathbf{R}^m$, je ekvivalentní řešení následující variační nerovnosti:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najděte } y \in V \text{ takové, pro které platí} \\ \langle A(x)y - b(x), v - y \rangle + g|c(x)^T v| - g|c(x)^T y| \geq 0 \quad \forall v \in V, \end{array} \right\} \quad (VI\ 2)$$

a tuto variační nerovnost nazýváme variační nerovnost druhého druhu. Takovouto variační nerovností a její příslušnou zobecněnou rovností popisujeme např. kontaktní úlohy se zadaným třením.

Podívejme se ještě na možnost popsat úlohu na „dolní“ úrovni modelovanou pomocí kvazivariační nerovnosti:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najděte } y \in \Psi(x, y) \text{ takové, pro které platí} \\ \langle F(x, y), v - y \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V(y), \end{array} \right\} \quad (QVI)$$

kde $F : \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}^m$ je spojitá funkce a $\Psi(x, y)$ je uzavřená a konvexní mnohoznačná funkce $\mathbf{R}^{n \times m} \rightsquigarrow \mathbf{R}^m$. Kvazivariační nerovností a příslušnou zobecněnou rovností můžeme popsat např. kontaktní úlohy s Coulombovým třením, kterými se v této práci zabýváme. Všechny výše uvedené popisy úloh na „dolní“ úrovni lze obecně zapsat pomocí zobecněné rovnosti $0 \in F(x, y) + N_V(y)$. Vektorem x v předchozích úlohách řídíme danou variační nebo kvazivariační nerovnost, v případě kontaktní úlohy mu můžeme například přidělit význam řízení tvaru kontaktní hranice jako v následující kapitole (pak jde o úlohu tvarové optimalizace), velikosti koeficientu tření nebo jiné hodnoty určující vlastnosti tělesa, jehož kontakt řešíme. Řešení zobecněné rovnosti $0 \in F(x, y) + N_V(y)$ závislé na vektoru x můžeme popsat mnohoznačnou funkcí $S(x) = \{z \in \mathbf{R}^m \mid 0 \in F(x, z) + N_V(z)\}$. Úlohu (BP), ve které nahradíme úlohu na „dolní“ úrovni úlohou zadanou zobecněnou rovností, pak můžeme přepsat na úlohu

$$\left. \begin{array}{l} \min f_1(x, z) \\ \text{s omezeními} \\ z \in S(x), \\ x \in U, y \in V. \end{array} \right\} \quad (MPEC)$$

Protože v proměnné y řešíme „dolní“ úlohu popisující u fyzikálních aplikacích stav tělesa, budeme dále tuto proměnnou nazývat stavovou proměnnou. Proměnná x naopak řídí „dolní“ úlohu (v aplikacích tvarové optimalizace určuje tvar navrhovaného tělesa), dále ji proto budeme nazývat řídicí nebo návrhovou proměnnou.

4.2 Implicitní programování (Implicit programming approach)

Nyní předpokládejme výrazně jednodušší případ, kdy funkce $S(x)$ je jednoznačná na množině U a na stavovou proměnnou y nejsou kladena žádná omezení, tzn. $z = S(x)$. Potom se naše úloha (MPEC) dá převést na následující úlohu:

$$\left. \begin{array}{l} \min \Theta(x) \\ \text{s omezením} \\ x \in U, \end{array} \right\} \quad (IPA)$$

kde složené zobrazení $\Theta(x) = f_1(x, S(x))$. Úlohu (IPA) pak nazveme úlohou implicitního programování (Implicit programming approach).

Podmínky existence řešení výše uvedené úlohy nám popisuje následující věta.

Věta 4.2.1 *Nechť funkce f_1 je spojitá, množina U je kompaktní a funkce S je jednoznačná a spojitá na otevřené množině obsahující množinu U . Potom úloha (IPA) má řešení (\bar{x}, \bar{z}) .*

Důkaz V [32]. □

Protože složená funkce $\Theta(x)$ v úloze implicitního programování není obecně spojitě diferencovatelná, je nutné použít pro řešení úlohy (IPA) algoritmu pro nehladkou optimalizaci. V našem případě jsme zvolili iterační metodu založenou na metodě největšího spádu - bundle trust metody. Již víme díky teorému 2.5.1, že existenci hromadného bodu omezené posloupnosti iterací generovaných bundle trust metodou nám zaručuje slabá polohladkost zdola omezené minimalizované funkce. K zajištění její slabé polohladkosti použijeme předpoklady Lemmy 2.1.1, tzn. potřebujeme polohladkost zobrazení \mathcal{S} . Pro řešení úlohy implicitního programování pomocí bundle trust metody je tedy nutné zaručit splnění následujících podmínek:

- (I) f_1 je spojitě diferencovatelná na $\tilde{U} \times \mathbf{R}^m$, kde $U \subset \tilde{U}$ a \tilde{U} je otevřená,
- (II) S je polohladká na \tilde{U} ,
- (III) U je kompaktní.

Splnění podmínek (I), (II) a (III) nám zajišťuje díky větě 4.2.1 existenci řešení (IPA). Splnění podmínek (I) a (II) nám díky Lemmě 2.1.1 zajišťuje slabou polohladkost složené funkce $\Theta(x)$ a tím i existenci hromadného bodu posloupnosti iterací generovaných bundle trust metodou. Pro použití bundle trust metody je nutné mít ještě k dispozici rutinu, která v každé iteraci najde řešení stavové úlohy $z = S(x)$ a jeden libovolný Clarkeův subgradient $\xi \in \partial\Theta(x)$.

4.3 Tvarová optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením

Zaveďme si nyní úlohu tvarové optimalizace, kterou se budeme zabývat v příští kapitole. Zabývejme se úlohou tvarové optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením, kde řídicí proměnná $\alpha \in \mathbf{R}^n$ určuje tvar kontaktní hranice diskretizovaného tělesa Ω a stavová úloha řeší diskretizovanou kontaktní úlohu s Coulombovým třením na tělese Ω . Těleso Ω je narozdíl od předchozí kapitoly popsáno následovně

$$\Omega(\alpha) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in (0, a), l_\alpha(x_1) < x_2 < 1\},$$

kde $l_{\alpha}(x_1)$ je spojitá funkce závislá na proměnné α . Pro jednoduchost zvolme funkci $l_{\alpha}(x_1)$ jako po částech lineární funkci. Grafem této po částech lineární funkce je spojnice bodů $\left(\left(i-1\right) \cdot \frac{a}{n-1}, \alpha_i\right)$ a $\left(i \cdot \frac{a}{n-1}, \alpha_{i+1}\right)$, kde $i = 1, \dots, n-1$.

Algebraickou formulací stavové úlohy popisující kontaktní problém se zadaným třením na tělese $\Omega(\alpha)$, pak můžeme zavést takto

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najděme } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_{\nu}, \boldsymbol{\lambda}_t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_-^p \times \mathbf{R}_{[-1,1]}^p \\ \text{takové, že} \\ \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{l} + \mathbf{B}_{\nu}^T \boldsymbol{\lambda}_{\nu} + \mathcal{F} \mathbf{B}_t^T \boldsymbol{\lambda}_t^g, \\ (\boldsymbol{\mu}_{\nu} - \boldsymbol{\lambda}_{\nu}, \mathbf{B}_{\nu} \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} + \mathcal{F}(\boldsymbol{\mu}_t^g - \boldsymbol{\lambda}_t^g, \mathbf{B}_t \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} \geq -(\boldsymbol{\mu}_{\nu} - \boldsymbol{\lambda}_{\nu}, \tilde{\mathbf{B}} \boldsymbol{\alpha})_{\mathbf{R}^p} \\ \forall \boldsymbol{\mu}_{\nu} \in \mathbf{R}_-^p, \boldsymbol{\mu}_t \in \mathbf{R}_{[-1,1]}^p, \end{array} \right\} (\mathcal{P}_A(\boldsymbol{\alpha}, g))$$

kde \mathbf{A} a \mathbf{l} jsou po řadě matice tuhosti a vektor sil, $\tilde{\mathbf{B}}$ je konstantní matice realizující po částech lineární zobrazení l_{α} a

$$\mathbf{R}_{[-1,1]}^p = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbf{R}^p \mid |x_i| \leq 1 \forall i\}.$$

V tuto chvíli si změňme užívané značení. Funkci f_1 nyní budeme označovat jako \mathcal{J} , funkci popisující závislost mezi řídicí a stavovou proměnnou nazveme \mathcal{S} místo S , řídicí proměnnou řídicí tvar tělesa Ω budeme označovat α , stavové proměnné mající význam posunutí a normálových napětí na kontaktní hranici označíme u a λ . Množinu přípustných řídicích proměnných nazveme U_{ad} místo U . Dále předpokládejme, že dimenze vektoru řídicí proměnné α je d , tj. zobrazení $\mathcal{S} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{n \times p}$.

Úlohu tvarové optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením pak popíšeme takto:

$$\left. \begin{array}{l} \min \Theta(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})) \\ \text{s omezením} \\ \boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}. \end{array} \right\} (\mathcal{P})$$

4.4 Citlivostní analýza

V této části se budeme zabývat konstrukcí rutiny pro výpočet jednoho libovolného zobecněného Clarkeova subgradientu $\xi \in \partial \Theta(\boldsymbol{\alpha}) = \partial \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})) = \nabla_1 \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})) + R_i \nabla_2 \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}))$, $R_i \in \partial \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ v libovolném bodě $\boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}$. Nyní stejně jako v předchozí kapitole zavedeme rozdělení vektoru posunutí \mathbf{u} na $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{\nu})$, kde \mathbf{u}_t přísluší tečnému posunutí a \mathbf{u}_{ν} odpovídá normálovému posunutí. Stejně značí \mathbf{A} matici tuhosti a \mathbf{l} je vektor sil a stejným postupem jako v předchozí kapitole vyeliminujeme volné uzly, tj. budeme

se zabývat pouze kontaktními uzly, tzn. stavová úloha realizuje zobrazení $\mathcal{S} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{3p}$ (řídícímu vektoru $\boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}$ je přiřazeno řešení kontaktní úlohy s Coulombovým třením $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$). Zobrazení \mathcal{S} je pro malé koeficienty tření lokálně lipschitzovské (viz [3]). Podobně jako v předchozí kapitole popíšeme stavovou úlohu zobecněnou rovností, zde navíc vystupuje řídící proměnná $\boldsymbol{\alpha}$ určující tvar oblasti Ω :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &\in \mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}_{\nu t}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} &\in \mathbf{u}_\nu + \boldsymbol{\alpha} + N_{\mathbf{R}_+^p}(\boldsymbol{\lambda}), \end{aligned} \right\} \quad (GE)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) = \partial_{(\mathbf{u}_t)} j(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}), \quad j(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{F} \sum_{i=1}^p \lambda^i |\mathbf{u}_t^i|$$

a $N_{\mathbf{R}_+^p}$ je standartní normálový kužel.

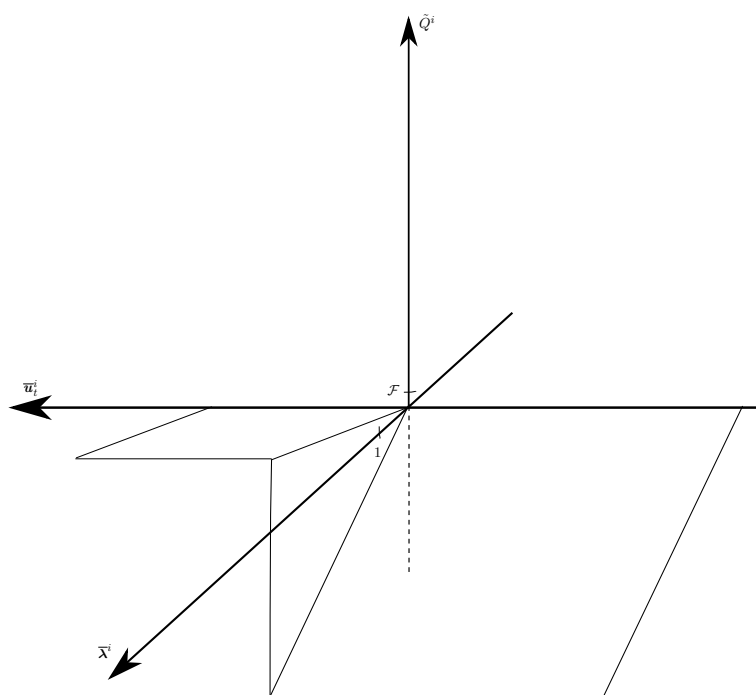
Multifunkce $\tilde{\mathbf{Q}}$ pro pevné $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ je dána následujícím předpisem:

$$\mathcal{F}\lambda^i \partial |\mathbf{u}_t^i| = \begin{cases} \mathcal{F}\lambda^i & \text{jestliže } \mathbf{u}_t^i > 0 \\ -\mathcal{F}\lambda^i & \text{jestliže } \mathbf{u}_t^i < 0 \\ [-\mathcal{F}\lambda^i, \mathcal{F}\lambda^i] & \text{jestliže } \mathbf{u}_t^i = 0. \end{cases}$$

Graf multifunkce $\tilde{\mathbf{Q}}$ pro pevné $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ je vykreslen na obrázku 4.4.1.

Označme $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ bod, který splňuje zobecněnou rovnost (GE) a zavedme pro tento bod následující indexové množiny:

$$\begin{aligned} K_+(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_t^i > 0\} \\ K_-(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_t^i < 0\} \\ K_{0+}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0, \tilde{\mathbf{Q}}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i\} \\ K_{0-}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0, \tilde{\mathbf{Q}}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = -\mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i\} \\ K_{00}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0, -\mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i < \tilde{\mathbf{Q}}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) < \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i\} \\ M(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_\nu^i + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i > 0\} \\ I_+(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0\} \\ I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_\nu^i + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i = 0, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i = 0\}. \end{aligned}$$



Obrázek 4.4.1.

Všimněme si významu předchozích indexových množin. Množina K_+ obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je kladné (dochází u nich k prokluzu), K_- obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je záporné (dochází u nich k prokluzu), K_{0+} obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nulové a $-\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu + \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}\bar{\lambda}^i$ (dochází u nich ke „slabému přilepení“ (weak stick)), K_{0-} obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nulové a $\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}\bar{\lambda}^i$ (dochází u nich ke „slabému přilepení“ (weak stick)), K_{00} obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nulové a $|\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu + \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha})| < \mathcal{F}\bar{\lambda}^i$ (dochází u nich k „silnému přilepení“ (strong stick)). Pokud uzel i leží v některé z indexových množin K_+ nebo K_- , pak se pohybujeme v části grafu, kde je \tilde{Q}^i jednoznačná. Pokud uzel i leží v některé z indexových množin K_{0+} , K_{0-} nebo K_{00} , pak pracujeme s částí grafu, kde je \tilde{Q}^i mnohoznačná. M obsahuje indexy uzlů, které nejsou v kontaktu s podloží, I_+ obsahuje indexy uzlů u nichž dochází k silnému kontaktu s tuhým podložím (tj. $\bar{\lambda}^i > 0$ a $\bar{u}_\nu^i + \bar{\alpha}^i = 0$), I_0 obsahuje indexy uzlů u nichž dochází ke slabému kontaktu (tj. $\bar{\lambda}^i = 0$ a $\bar{u}_\nu^i + \bar{\alpha}^i = 0$).

Nechť bod $\boldsymbol{\alpha}$ leží v blízkosti bodu $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, pak pro bod $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ jsou díky lokální lipschitzovosti zobrazení \mathcal{S} splněny následující inkluze:

$$\begin{aligned} K_+(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset K_+(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), & K_-(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset K_-(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ K_{00}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset K_{00}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ M(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset M(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), & I_+(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset I_+(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}). \end{aligned}$$

Z těchto inkluzí plynou následující inkluze:

$$\begin{aligned} K_{0+}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset K_{0+}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), & K_{0-}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset K_{0-}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ I_0(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}). \end{aligned}$$

Z výše uvedených inkluzí vyplývá, že v okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává pro každé $i \in K_{0+}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_t^i &\geq 0 & \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{u}_t^i &= 0 & \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &\leq \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

A pro každé $i \in K_{0-}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_t^i &\leq 0 & \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &= -\mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i, \\ \mathbf{u}_t^i &= 0 & \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &\geq -\mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Podobně, v okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává pro každé $i \in I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^i &\geq 0 & \mathbf{u}_\nu^i + \boldsymbol{\alpha}^i &= 0, \\ \boldsymbol{\lambda}^i &= 0 & \mathbf{u}_\nu^i + \boldsymbol{\alpha}^i &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Díky tomu dostaneme rozklad indexové množiny $K_{0+}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ na dvě podmnožiny, které označíme K_1 a K_2 a definujeme je vztahem (4.1) a rozklad indexové množiny $K_{0-}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ na dvě podmnožiny, které označíme K_3 a K_4 , které definujeme vztahem (4.2). A dále dostaneme rozklad množiny $I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ na dvě podmnožiny, které označíme J_1 a J_2 a definujeme je vztahem (4.3). Dále zanedbáme všechny nerovnosti v (4.1), (4.2) a (4.3) a získáme ze zobecněné rovnosti (GE) systém rovnic (GE2) uvedený níže, který je lineární ve stavových proměnných \mathbf{u}_t , \mathbf{u}_ν a $\boldsymbol{\lambda}$ a nelineární v řídicí proměnné $\boldsymbol{\alpha}$. Dále položíme $\beta := K_+ \cup K_1 \cup K_- \cup K_3$ a $\gamma := K_{00} \cup K_2 \cup K_4$ a označíme symbolem \mathbf{D} diagonální matici o rozměrech $[|\beta| \times |\beta|]$, její hodnoty na diagonále jsou dány následujícím vztahem.

$$d_{ii} = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{jestliže } i \in K_+ \cup K_1 \\ -\mathcal{F} & \text{jestliže } i \in K_- \cup K_3. \end{cases}$$

Výše zmíněný systém rovnic (GE2) má následující tvar

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha}))_{\beta} \mathbf{u}_t + (\mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha}))_{\beta} \mathbf{u}_{\nu} - (\mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}))_{\beta} + \mathbf{D} \boldsymbol{\lambda}_{\beta}, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}_{\nu t}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}_{\nu} - \mathbf{l}_{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda}, \\ 0 &= u_t^i \text{ jestliže } i \in \gamma, \\ 0 &= u_{\nu}^i + \alpha^i \text{ jestliže } i \in I_+ \cup J_1, \\ 0 &= \lambda^i \text{ jestliže } i \in M \cup J_2. \end{aligned} \right\} \quad (GE2)$$

Pokud použijeme větu o funkci zadané implicitně, můžeme systémem rovnic (GE2) implicitně zadat funkci $\mathcal{S}^*[\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^{3p}]$, která přiřazuje řídicí proměnné $\boldsymbol{\alpha}$ trojici $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{\nu}, \boldsymbol{\lambda})$. K tomu slouží následující věta (v jejím důkazu ověříme splnění předpokladů věty o funkci zadané implicitně).

Věta 4.4.1 *Uvažujme systém rovnic (GE2) na okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ (bod $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje zobecněnou rovnost (GE)). Předpokládejme, že matice*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \end{bmatrix}$$

je pozitivně definitní. Potom pro libovolnou volbu indexových množin $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$ existuje okolí \mathcal{O} řídicí proměnné $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ a spojitě diferencovatelná funkce $\mathcal{S}^*[\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^{3p}]$, která je definována implicitně systémem rovnic (GE2) a splňuje následující vlastnosti:

- (i) $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{S}^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$,
- (ii) body $(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}^*(\boldsymbol{\alpha}))$ splňují rovnost (GE2) pro všechny $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{O}$ pro „malý“ koeficient tření \mathcal{F} .

Důkaz Nechť indexové množiny $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$ jsou zvoleny libovolně. Nejprve ukážeme platnost $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathcal{S}^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$, kde \mathcal{S}^* je funkce zadaná implicitně systémem rovnic (GE2). Bod $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje zobecněnou rovnost (GE). Z toho plyne, že kromě první rovnice, splňuje i všechny rovnice ze systému rovnic (GE2). Uvažujme nyní vektor $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda})$. Potom platí $\mathbf{x}_{\beta} = \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\beta}$. Z toho plyne, že $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje i první rovnici ze systému (GE2) a tedy $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje celý systém rovnic (GE2).

Nyní musíme dokázat, že funkce \mathcal{S}^* je diferencovatelná a jednoznačná na okolí bodu $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$. Jestliže zanedbáme všechny nulové složky vektoru stavových proměnných $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{\nu}, \boldsymbol{\lambda})$, získáme redukovaný parciální Jacobián pravé strany systému (GE2) v bodě $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ vzhledem ke zbývajícím (nemulovým) složkám vektoru $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}))_{\beta, \beta} & (\mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}))_{\beta} & (I_+ \cup J_1) \mathbf{D} \\ \beta (\mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & -\mathbf{E}_{I_+ \cup J_1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{I_+ \cup J_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Nechť je matice $(I_+ \cup J_1) \mathbf{D}$ nulová, pak díky pozitivní definitnosti matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \end{bmatrix}$$

je matice $\mathbf{\Pi}$ regulární. Nyní opustíme předpoklad nulovosti matice $(I_+ \cup J_1)\mathbf{D}$, tzn. matici $\mathbf{\Pi}$ dostaneme jako součet regulární matice a matice

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (I_+ \cup J_1)\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Nenulové prvky matice $\overline{\mathbf{\Pi}}$ jsou rovny koeficientu tření \mathcal{F} nebo jeho opačné hodnotě. Protože koeficient tření je „malý“, můžeme použít perturbační lemmu (viz [30]). Tím ověříme regularitu matice $\mathbf{\Pi}$. Protože množiny $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$ byly zvoleny libovolně, vyplývá dokazované tvrzení z věty o funkci zadané implicitně. \square

Z Věty 4.4.1 plyne, že zobrazení \mathcal{S} je PC^1 funkce, jejíž aktivní funkce v bodě $\overline{\alpha}$ jsou dány libovolnou kombinací indexových množin $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$. Protože nemáme zaručeno, že všechny tyto aktivní funkce jsou také esenciálně aktivní (a výběr pouze těch, které jsou esenciálně aktivní, by byl časově náročný - museli bychom ověřovat splnění nerovností v (4.1), (4.2) a (4.3) v okolí bodu $\overline{\alpha}$, které jsme zanedbali), budeme konstruovat pouze „vnější“ aproximaci $\partial\mathcal{S}(\alpha)$ a následně pouze „vnější“ aproximaci $\partial\Theta(\alpha)$. K tomu zavedeme novou indexovou množinu \mathbb{L} takovou, která jednoznačně určuje kombinaci množin $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$, tj. existuje bijektivní zobrazení mezi indexy \mathbb{L} a indexovými množinami $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$. Dále označme symbolem $\mathbf{\Pi}_i$, kde $i \in \mathbb{L}$, matici

$$\mathbf{\Pi}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{tt}(\overline{\alpha}))_{\beta,\beta} & (\mathbf{A}_{t\nu}(\overline{\alpha}))_{\beta} & (I_+ \cup J_1)\mathbf{D} \\ \beta(\mathbf{A}_{\nu t}(\overline{\alpha})) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\overline{\alpha}) & -\mathbf{E}_{I_+ \cup J_1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{I_+ \cup J_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

kteřá je určena volbou $i \in \mathbb{L}$, tj. volbou indexových množin $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$. Dále označme symbolem $\mathbf{\Xi}_i$, kde $i \in \mathbb{L}$, matici

$$\mathbf{\Xi}_i = \begin{bmatrix} \nabla_{\alpha}((\mathbf{A}_{tt}(\overline{\alpha}))_{\beta,\beta}(\mathbf{u}_t)_{\beta}) + \nabla_{\alpha}((\mathbf{A}_{t\nu}(\overline{\alpha}))_{\beta}\mathbf{u}_{\nu}) - \nabla(l_t(\overline{\alpha}))_{\beta} \\ \nabla_{\alpha}(\beta(\mathbf{A}_{\nu t}(\overline{\alpha}))(\mathbf{u}_t)_{\beta}) + \nabla_{\alpha}(\mathbf{A}_{\nu\nu}(\overline{\alpha})\mathbf{u}_{\nu}) - \nabla l_{\nu}(\overline{\alpha}) \\ \mathbf{E}_{I_+ \cup J_1} \end{bmatrix},$$

kteřá je určena volbou $i \in \mathbb{L}$, tj. volbou indexových množin $K_1, K_2, K_3, K_4, J_1, J_2$. Všimněme si, že matice $\mathbf{\Xi}_i$ je parciální Jacobián pravé strany (GE2) v bodě $(\overline{\alpha}, \overline{\mathbf{u}}_t, \overline{\mathbf{u}}_{\nu}, \overline{\lambda})$ vzhledem k řídicí proměnné (α) . Při splnění podmínky pozitivní definitnosti matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt}(\overline{\alpha}) & \mathbf{A}_{t\nu}(\overline{\alpha}) \\ \mathbf{A}_{\nu t}(\overline{\alpha}) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\overline{\alpha}) \end{bmatrix}$$

platí, že pro každé $i \in \mathbb{L}$ je matice $-\mathbf{\Pi}_i^{-1}\mathbf{\Xi}_i$ rovna derivaci zobrazení $\alpha \mapsto ((\mathbf{u}_t)_{\beta}, \mathbf{u}_{\nu}, \lambda_{I_+ \cup J_1})$ v bodě $\overline{\alpha}$ definovaném rovností (GE2). Derivaci úplného zobrazení $\alpha \mapsto (\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{\nu}, \lambda)$ můžeme získat z matice $-\mathbf{\Pi}_i^{-1}\mathbf{\Xi}_i$ vložením nulových řádků nahrazujících derivace u_t^j , $j \in \gamma$ a λ^l , $l \in M \cup J_2$ do této matice. Tuto „zúplněnou“ $[3p \times d]$ matici nazveme R_i , $i \in \mathbb{L}$. Nyní již můžeme získat aproximaci $\partial\mathcal{S}(\overline{\alpha})$. Tu nám dává následující věta.

Věta 4.4.2 *Pokud jsou splněny předpoklady Věty 4.4.1, pak platí*

$$\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) \subset \text{conv}\{R_i \mid i \in \mathbb{L}\}.$$

Důkaz Tvrzení přímo vyplývá z předcházejícího rozboru a věty A.4.1 z [36], která je obdobou Teorému 2.3.3 pro Clarkeův zobecněný Jacobián. \square

Jak jsme již zmínili dříve pro použití bundle trust metody stačí mít k dispozici jeden libovolný subgradient z Clarkeova zobecněného gradientu složené funkce $\xi \in \partial\Theta(\bar{\alpha}) = \partial\mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$ a není nutné počítat matici z Clarkeova zobecněného Jacobiánu $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha})$. Výpočet tohoto subgradientu nám umožní následující teorém.

Teorém 4.4.1 *Nechť je funkce \mathcal{J} spojitě diferencovatelná a koeficient tření je „malý“. Nechť je dán bod $\bar{\alpha} \in U_{ad}$ a předpokládejme, že pro $i \in \mathbb{L}$ platí*

$$R_i \in \partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}).$$

Dále nechť \mathbf{p}_i je řešení adjungované rovnice

$$\mathbf{\Pi}_i^T \mathbf{p}_i + (\nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})))_i = 0,$$

kde matice $\mathbf{\Pi}_i$ je určena $i \in \mathbb{L}$, tj. volbou indexových množin K_1, K_2, K_3, K_4, J_1 a J_2 a $(\nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})))_i$ označuje vektor, který je vytvořen z vektoru $\nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$, ve kterém jsou vynechány složky odpovídající parciálním derivacím podle u_t^j , $j \in \gamma$ a λ^j , $j \in M \cup J_2$. Potom libovolný subgradient z Clarkeova zobecněného gradientu složené funkce $\xi = \partial\Theta(\bar{\alpha}) = \partial\mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$ dostaneme jako

$$\xi_i = \nabla_1 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})) + \mathbf{\Xi}_i^T \mathbf{p}_i \in \partial\Theta(\bar{\alpha}).$$

Důkaz K důkazu stačí použít Teorém 2.1.3. \square

Nyní máme splněny všechny předpoklady pro řešení úlohy tvarové optimalizace s Coulombovým třením jako úlohy implicitního programování pomocí bundle trust metody (polohladkost zobrazení \mathcal{S} je zaručeno díky tomu, že \mathcal{S} je PC^1). Podrobně viz [3].

Uvědomme si, ale že v tuto chvíli pouze víme, že $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) \subset \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$, tj. máme k dispozici pouze „vnější“ aproximaci množiny $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha})$ a tedy i $\partial\Theta(\bar{\alpha})$. Abychom zajistili $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) = \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$, musíme ověřit podmínku (MF1) z [32] (Věta 6.14). Jinou možností je použít postup z [6] určený pro (BP). K tomu je třeba ověřit modifikovanou podmínku (FRR) z [6]. Splnění této podmínky při současném splnění upravených podmínek (MFCQ), (SSOC) a (CRCQ) z [6] dává stejný výsledek $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) =$

$\text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$ (viz [6]). Podmínky (MFCQ), (SSOC) a (CRCQ) jsou splněny za předpokladu, že zobrazení \mathcal{S} je PC^1 , to víme, že je splněno.

Podmínka (MF1) v bodě (x_0, y_0) (po úpravě pro náš problém) vypadá takto

(MF1):

Matice

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{yx}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \vdots & & \vdots & (\mathcal{J}_y G_{I_0}(x_0, y_0))^T \\ -\mathcal{J}_x G_{I_+}(x_0, y_0) & \vdots & \mathcal{D}(x_0, y_0) & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathcal{J}_x G_{I_0}(x_0, y_0) & \vdots & -\mathcal{J}_y G_{I_0}(x_0, y_0) & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

má plnou řádkovou hodnost. Lagrangián $\mathcal{L}(x_0, y_0) = F(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^k \lambda^i \nabla g^i(x_0, y_0)$, $G(x_0, y_0) = (g^1(x_0, y_0), \dots, g^k(x_0, y_0))^T$ a

$$\mathcal{D}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{yy}\mathcal{L}(x_0, y_0) & (\mathcal{J}_y G_{I_+}(x_0, y_0))^T \\ -\mathcal{J}_y G_{I_+}(x_0, y_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

x je návrhová proměnná, y je stavová proměnná a indexové množiny I_+ a I_0 mají stejný význam jako na začátku této části.

Ověření podmínky (MF1) na testovacích úlohách provedeme v příští kapitole.

Jiný způsob, který vede k nalezení $\xi \in \partial\Theta(\bar{\alpha})$, je výpočet $\xi \in \partial_M\Theta(\bar{\alpha})$, tj. nalezení prvku z Morduchovičova subdiferenciálu, který je podmnožinou Clarkeova zobecněného gradientu. Vhodný způsob, jak nalézt $\xi \in \partial_M\Theta(\bar{\alpha})$ nabízí [31] (viz Teorem 5.1). K tomu si potřebujeme zavést následující multifunkci

$$\hat{D}^*\Phi(a, b)(\eta) := \{\xi \in \mathbf{R}^k \mid (\xi, -\eta) \in \hat{N}_{Gph \Phi}(a, b)\},$$

kde grafem multifunkce $\Phi : \mathbf{R}^k \rightsquigarrow \mathbf{R}^l$ je uzavřená množina, $(a, b) \in Gph \Phi$ a $\eta \in \mathbf{R}^l$. Tuto multifunkci nazveme regulární koderivací multifunkce Φ v bodě (a, b) . Dle [31] lze některé prvky Morduchovičova subdiferenciálu funkce $\Theta(\bar{x}) = f(\bar{x}, S(\bar{x}))$ nalézt následujícím postupem.

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitě diferencovatelná, dále $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \nabla_{x,y} f(\bar{x}, \bar{y})$ a $\bar{y} = S(\bar{x})$. Zobrazení $S(x)$ je zadáno předpisem $S(x) = \{y \in \mathbf{R}^m \mid 0 \in F(x, y) + Q(y)\}$, kde $F(x, y)$ je jednoznačná spojitě diferencovatelná funkce a $Q(y)$ je mnohoznačná funkce s uzavřeným grafem. Pak některé prvky z Morduchovičova subdiferenciálu jsou určeny

$$\bar{\xi} + (\nabla_x F(\bar{x}, \bar{y}))^T \bar{r} \in \partial_M\Theta(\bar{x}),$$

kde \bar{r} je řešení zobecněné rovnosti

$$0 \in \bar{\eta} + (\nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}))^T r + \hat{D}^*Q(\bar{y}, -F(\bar{x}, \bar{y}))(r).$$

Aplikujme tento postup na naši úlohu tvarové optimalizace

$$\left. \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})) \\ \text{s omezením} \\ \boldsymbol{\alpha} \in \Upsilon. \end{array} \right\}$$

Zobrazení $\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ je zadáno implicitně zobecněnou rovností

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{0} \in \mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{0} = \mathbf{A}_{\nu t}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} \in \mathbf{u}_\nu + \boldsymbol{\alpha} + N_{\mathbf{R}_+^p}(\boldsymbol{\lambda}). \end{array} \right\}$$

V naší úloze tvarové optimalizace tedy značíme symbolem $\boldsymbol{\alpha}$ návrhovou proměnnou x , $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$ odpovídá y , $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$ označuje $f(x, y)$, $\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ značí $S(x)$, $(\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{A}_{\nu t}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\nu + \boldsymbol{\alpha})^T = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) = F(x, y)$ a $(\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}), 0, N_{\mathbf{R}_+^p}(\boldsymbol{\lambda}))^T = \mathbf{Q}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) = Q(y)$. Nyní přistupme k určení $\hat{D}^* \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$. Nejkomplikovanější je výpočet $\xi \in \hat{D}^* \tilde{\mathbf{Q}}((\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \mathbf{l}_t(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_\nu)(r)$.

Lemma 4.4.1 *Prvky koderivace $\xi \in \hat{D}^* \tilde{\mathbf{Q}}((\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \mathbf{l}_t(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_\nu)(r)$ jsou ve tvaru $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)$, kde složky ξ^i jsou pro $i \in \{1, \dots, p\}$ dány předpisem:*

$$\left. \begin{array}{ll} \xi^i = (0, \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i r^i), & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i > 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0, \\ \xi^i = (0, \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i k), \quad k \leq r^i & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i > 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i = 0, \\ \xi^i = (0, -\mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i r^i), & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i < 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0, \\ \xi^i = (0, -\mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i r^i), \quad k \leq -r^i & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i < 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i = 0, \\ \xi^i = (k, \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i r^i), \quad k \leq 0, \quad r^i \leq 0, & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0 \wedge \\ & \wedge \mathbf{l}_t(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_\nu = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i, \\ \xi^i = (k, -\mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i r^i), \quad k \geq 0, \quad r^i \geq 0, & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0 \wedge \\ & \wedge \mathbf{l}_t(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_\nu = -\mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i, \\ \xi^i = (k, 0), \quad k \in \mathbf{R}, \quad r^i = 0, & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0 \wedge \\ & \wedge |\mathbf{l}_t(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_\nu| < \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i, \\ \xi^i = (0, \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i k), \quad k \leq -|r^i| & \text{jestliže } \bar{\mathbf{u}}_t^i = 0 \wedge \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i = 0. \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Důkaz K důkazu stačí zkonstruovat regulární normálový kužel ke grafu multifunkce $\tilde{\mathbf{Q}}$ v bodě $((\bar{\mathbf{u}}_t^i, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i), (\mathbf{l}_t(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) - \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})\bar{\mathbf{u}}_\nu)^i)$ (viz Definicí 2.2.3) pro všechny $i \in \{1, \dots, p\}$. \square

Dále je nutno vypočíst $\zeta \in \hat{D}^* N_{\mathbf{R}_+^p}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, -\bar{\mathbf{u}}_\nu - \bar{\boldsymbol{\alpha}})(r)$.

Lemma 4.4.2 *Prvky koderivace $\zeta \in \hat{D}^* N_{\mathbf{R}_+^p}(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, -\bar{\mathbf{u}}_\nu - \bar{\boldsymbol{\alpha}})(r)$ jsou ve tvaru $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^p)$, kde složky ζ^i jsou pro $i \in \{1, \dots, p\}$ dány předpisem:*

$$\left. \begin{aligned} \zeta^i &= 0, & \text{jestliže } \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i &> 0, \\ \zeta^i &= k, \quad k \in \mathbf{R}, & \text{jestliže } \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i &= 0 \wedge \bar{\mathbf{u}}_\nu + \bar{\boldsymbol{\alpha}} > 0 \text{ a } r^i = 0, \\ \zeta^i &= k, \quad k \leq 0, & \text{jestliže } \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i &= 0 \wedge \bar{\mathbf{u}}_\nu + \bar{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \text{ a } r^i \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Důkaz K důkazu stačí zkonstruovat regulární normálový kužel ke grafu multifunkce $N_{\mathbf{R}_+^p}$ v bodě $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i, (-\bar{\mathbf{u}}_\nu - \bar{\boldsymbol{\alpha}})^i)$ (viz Definici 2.2.3) pro všechny $i \in \{1, \dots, p\}$. \square

Vektory ξ a ζ skládáme z prvků ξ^i a ζ^i , kde $i \in \{1, \dots, p\}$, tj. pro každý kontaktní uzel určíme ξ^i a ζ^i . K sestrojení $\hat{D}^* \mathbf{Q}((\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), -\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}))(r)$ použijeme tvrzení Teorému 10.40 z [35], který dává návod, jak zkonstruovat „vnitřní“ aproximaci regulární koderivace multifunkce $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) = (\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}), 0, N_{\mathbf{R}_+^p}(\boldsymbol{\lambda}))^T$. Nejprve si zavedeme následující spojitě diferencovatelnou funkci $P : \mathbf{R}^{3p} \rightarrow \mathbf{R}^{4p}$ a multifunkci $R : \mathbf{R}^{4p} \rightsquigarrow \mathbf{R}^{3p}$. Funkce P je zadaná předpisem

$$P(a^1, b^1, c^1, \dots, a^p, b^p, c^p) = (a^1, c^1, 0, c^1, \dots, a^p, c^p, 0, c^p)^T$$

a multifunkce R je dána předpisem

$$R(a^1, b^1, c^1, d^1, \dots, a^p, b^p, c^p, d^p) = (\tilde{Q}^1(a^1, b^1), 0, N_{\mathbf{R}_+^p}(d^1), \dots, \tilde{Q}^p(a^p, b^p), 0, N_{\mathbf{R}_+^p}(d^p))^T.$$

Multifunkci $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$ můžeme s využitím funkce P a multifunkce R zapsat takto $\mathbf{Q}(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) = R \circ P(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$.

Věta 4.4.3 *Nechť spojitě diferencovatelná funkce P a multifunkce R jsou dány výše uvedeným předpisem. Pak platí*

$$\begin{aligned} \hat{D}^* \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})(r) &\supset (\nabla P(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}))^T \cdot \hat{D}^* R(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})(r) = \\ &= (\xi_1^1, 0, \xi_2^1 + \zeta^1, \dots, \xi_1^p, 0, \xi_2^p + \zeta^p)^T, \end{aligned}$$

kde vektory $(\xi_1^i, \xi_2^i) = \xi^i$, $i \in \{1, \dots, p\}$ jsou určeny (4.4) a ζ^i , $i \in \{1, \dots, p\}$ jsou dány (4.5) a $r \in \mathbf{R}^{3p}$.

Důkaz K důkazu stačí použít Teorém 10.40 z [35]. \square

Nyní již můžeme vypočítat prvek z Morduchovičova subdiferenciálu složené funkce $\xi \in \partial_M \Theta(\bar{\alpha}) = \partial_M \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$. Výpočet tohoto prvku nám umožní následující teorém.

Teorém 4.4.2 *Nechť je funkce \mathcal{J} spojitě diferencovatelná. Nechť je dán bod $\bar{\alpha} \in U_{ad}$. Dále nechť $\bar{r} \in \mathbf{R}^{3p}$ je řešení zobecněné rovnosti*

$$0 \in \nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})) + (\nabla_{\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{F}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}))^T r + \hat{D}^* \mathbf{Q}((\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), -\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}))(r).$$

Potom prvek z Morduchovičova subdiferenciálu složené funkce $\xi = \partial_M \Theta(\bar{\alpha}) = \partial_M \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$ dostaneme jako

$$\xi = \nabla_1 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})) + (\nabla_x F(\bar{x}, \bar{y}))^T \bar{r} \in \partial_M \Theta(\bar{x}).$$

Důkaz K důkazu stačí použít Teorém 5.1 z [31]. □

Poznámka 4.4.1 Jako příklad si ukažme pro jeden zvolený uzel (s indexem i) tvar první zobecněné rovnosti z předchozího teorému v případě silného kontaktu a „slabého přilepení“ ($-\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu + \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i$):

$$\begin{aligned} 0 \in \nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})) + (\nabla_{\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{F}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}))^T r^i + (k, 0, \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i r_1^i)^T, \\ k \leq 0, r_1^i \leq 0, r_2^i \in \mathbf{R}, r_3^i \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Tento alternativní postup využívající Morduchovičova kalkulu vede ke „skutečným“ prvkům z $\partial_M \Theta(\bar{x})$ a tedy i $\partial \Theta(\bar{x})$. Jeho nevýhodou je nutnost řešit zobecněnou rovnost z Teorému 4.4.2. Její řešení je dost obtížné a není ani zaručena existence aspoň jednoho řešení.

Kapitola 5

Numerické příklady

V této kapitole se budeme věnovat řešení některých tvarově-optimalizačních úloh. K řešení těchto problémů použijeme techniku citlivostní analýzy popsanou v předešlé kapitole. Připomeňme si, že problém tvarové optimalizace je definován následným způsobem:

$$\left. \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\alpha, \mathcal{S}(\alpha)) \\ \text{s omezením} \\ \alpha \in U_{ad}, \end{array} \right\} \quad (\mathcal{P})$$

zobrazení \mathcal{S} (z návrhových do řídicích proměnných) je lokálně lipschitzovsky spojitě na množině přípustných návrhových proměnných U_{ad} . Dále předpokládejme, že cenový funkcionál \mathcal{J} je spojitě diferencovatelný. To nám zaručuje lipschitzovskou spojitost složeného zobrazení $\Theta(\alpha) = \mathcal{J}(\alpha, \mathcal{S}(\alpha))$.

5.1 Numerické řešení stavového problému

Abychom mohli vyčíslit hodnotu cenového funkcionálu $J(\alpha, \mathcal{S}(\alpha))$, potřebujeme nejprve vyřešit stavový problém, tj. vypočítat hodnotu $\mathcal{S}(\alpha)$. Tato stavová úloha je řešena užitím rozštěpené varianty metody pevného bodu. Metoda pevného bodu je realizována numericky pomocí metody postupných aproximací:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{H\nu}^{(0)} \in \Lambda_{H\nu} \text{ dáno,} \\ \lambda_{H\nu}^{(k)} = \Phi(\lambda_{H\nu}^{(k-1)}), \quad k \in \mathbf{N}. \end{array} \right.$$

Nová iterace $\lambda_{H\nu}^{(k)}$ je dána jako druhá složka řešení diskretizovaného kontaktního problému se *zadaným* třením ($\mathcal{P}_h(\lambda_{H\nu}^{(k-1)})$).

Jedna třída metod řešící numericky diskrétní kontaktní problém se *zadaným* třením je založena na tzv. *reciproční variační formulaci* (viz [20] a [22]). Tato formulace je odvozena z $\mathcal{P}_A(g)$ eliminací proměnné \mathbf{u} . Výsledná variační formulace obsahuje pouze

duální proměnné definované na Γ_c . Výsledná úloha vede na problém kvadratického programování s jednoduchými nerovnostními omezeními omezujícími normálové (λ_ν) a tečné (λ_t) kontaktní napětí, tj. úloha vede na minimalizaci kvadratické funkce \mathcal{K} na množině $\mathbf{R}_-^p \times \mathbf{R}_{[-1,1]}^p$. Výhoda tohoto přístupu tkví v možnosti použití velmi efektivních postupů při řešení daného modelu. V naší úloze používáme metodu postupných aproximací zkombinovanou s technikou rozštěpení. Díky tomu místo minimalizace funkce se $2p$ proměnnými (λ_ν, λ_t) je minimalizační proces rozštěpen na dva oddělené minimalizační procesy hledající střídavě minimum vzhledem k normálovému (λ_ν) nebo tečnému (λ_t) kontaktnímu napětí a druhé (tečné nebo normálové) napětí je zafixováno. Tedy v každé iteraci je minimalizována funkce o p proměnných.

Rozštěpená verze metody pevného bodu se skládá ze dvou následujících kroků:

(I) (Pro $\lambda_\nu \in \mathbf{R}_-^p$ fixované.) Minimalizace \mathcal{K} vzhledem k λ_t na $\mathbf{R}_{[-1,1]}^p$ popisuje úlohu lineární pružnosti se *zadaným* třením a *předepsaným normálovým napětím* λ_ν na Γ_c (tj. bez *unilaterálních kontaktních podmínek* na Γ_c).

(II) (Pro $\lambda_t \in \mathbf{R}_{[-1,1]}^p$ fixované.) Minimalizace \mathcal{K} vzhledem k λ_ν na \mathbf{R}_-^p popisuje *kontaktní problém s předepsanými tečnými napětími* λ_t na Γ_c (tj. bez *tření* na Γ_c).

Pro kontaktní problémy se *zadaným* třením tento algoritmus konverguje (viz [15]). Tato metoda je následně rozšířena pro případ Coulombova tření aktualizací omezení na λ_t v (I) pomocí nového normálového napětí vypočteného ve (II). Detailnější popis algoritmu naleznete v [17].

5.2 Tvarová optimalizace

Nyní transformujeme řídicí proměnnou α a tím také úlohu tvarové optimalizace (\mathcal{P}). Tato úprava nám zaručí hladkost optimalizované hranice Γ_c . Tato hranice bude modelována Bezierovou křivkou a $\alpha \in \mathbf{R}^d$ je vektor řídicích bodů této křivky. Bezierova křivka $F(x)$ je konstruována v intervalu $[0, a]$ s použitím vektoru α předpisem

$$F(x) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \beta_i^d(x), \quad \beta_i^d(x) = \binom{d-1}{i-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{d-i}, \quad x \in [0, a],$$

kde d je rozměr vektoru α . Naši úlohu (\mathcal{P}) můžeme nyní přepsat tímto způsobem

$$\left. \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\alpha, \mathcal{S}(\alpha)) \\ \text{s omezením} \\ \alpha \in \Upsilon, \end{array} \right\} \quad (\mathcal{P}II)$$

kde Υ je dáno

$$\Upsilon = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}^d \mid 0 \leq \alpha_i \leq C_0, \quad i = 1, \dots, d; \quad |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq \frac{C_1}{d-1}, \quad i = 1, \dots, d-1; \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = C_2 d \right\}.$$

C_0, C_1, C_2 jsou dané kladné konstanty. Podmínky, které splňuje množina Υ zajišťují, že Bezierova křivka $F(x)$, která je generována vektorem α je z kompaktní množiny

$$U_{ad} = \{v \in C^{0,1}([0, a]) \mid 0 \leq v \leq C_0, |v(x_1) - v(x_2)| \leq C_1|x_1 - x_2| \forall x_1, x_2 \in [0, a], \text{meas}(\Omega(v)) = C_2\},$$

kde C_1 omezuje derivaci Bezierovy křivky $F(x)$ a C_2 určuje objem optimalizovaného tělesa Ω .

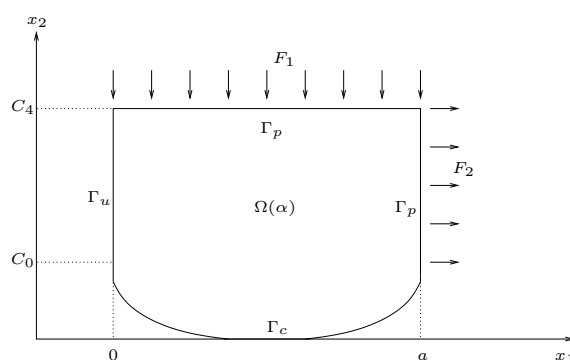
Protože řešení diskrétního kontaktního problému s Coulombovým třením je jednoznačné, můžeme k řešení úlohy tvarové optimalizace ($\mathcal{P}II$) použít přístup implicitního programování popsany v předchozí kapitole. V našem případě víme o cenovém funkcionálu $\mathcal{J}(\alpha, \mathcal{S}(\alpha))$, že je lipschitzovsky spojitý, stejně jsou splněny i další podmínky, které jsme požadovali v minulé kapitole. Pro řešení úlohy ($\mathcal{P}II$) použijeme, jak jsme již dříve uvedli bundle trust metodu. Bundle trust metoda vyžaduje v každém kroku iteračního procesu znalost jednoho libovolného subgradientu z Clarkeova zobecněného Jacobiánu a znalost hodnoty $\mathcal{J}(\alpha, \mathcal{S}(\alpha))$. Postup, který používáme pro hledání daného subgradientu byl navržen ve 4. kapitole. Nyní nám zbývá pouze určení rozkladu množin K_0 a I_0 . Vybrali jsme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_3 = \emptyset, \quad \mathbf{K}_2 = K_{0+}, \quad \mathbf{K}_4 = K_{0-} \\ \mathbf{J}_1 = \emptyset, \quad \mathbf{J}_2 = I_0. \end{aligned}$$

Nyní se podívejme na některé úlohy řešené s využitím bundle trust algoritmu. Všimněme si, že cenové funkcionály v našich příkladech jsou spojitě diferencovatelné. Všechny příklady jsou řešeny na elastickém dvojrozměrném tělesem $\Omega(\alpha)$. Tvar tohoto tělesa je dán předpisem

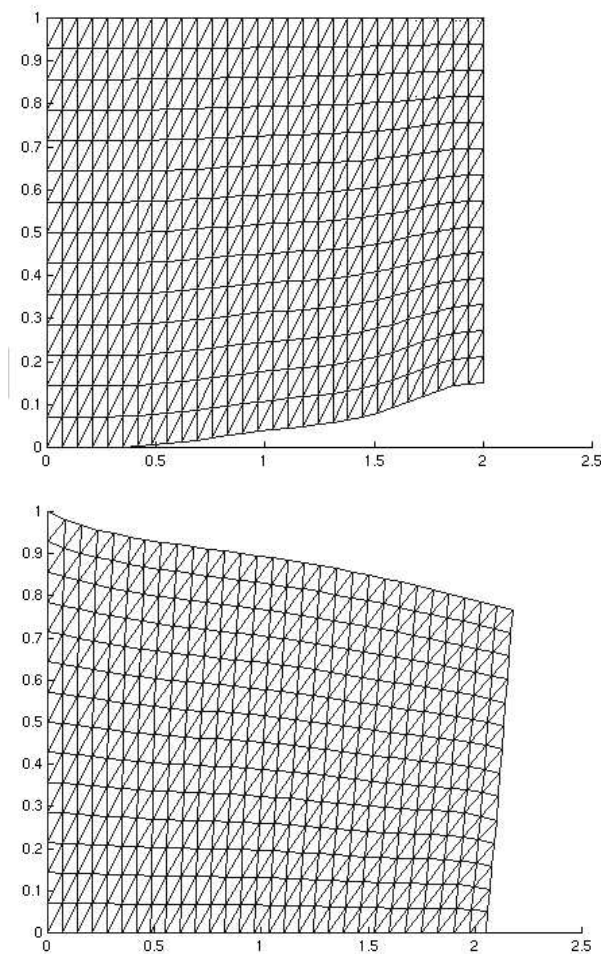
$$\Omega(\alpha) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in (0, a), F(x_1) < x_2 < C_4\}.$$

Viz obrázek 5.2.1.



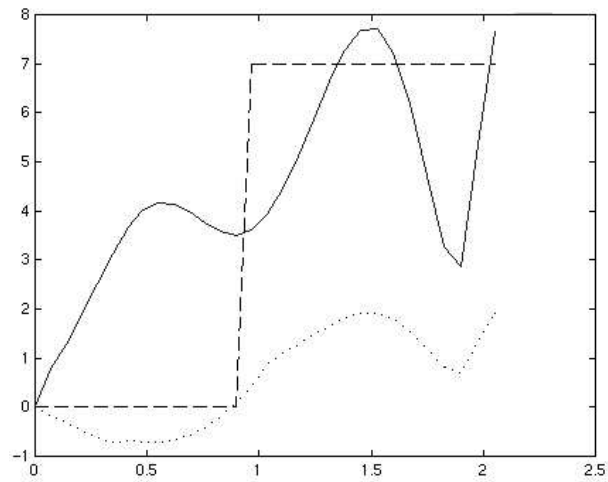
Obrázek 5.2.1.

Naši oblast jsme diskretizovali dvourozměrnou sítí s 450 uzly, tj. řešili jsme stavovou úlohu s 900 neznámými. Úloha byla vyřešena v Mathworks Matlab. Ukončovací kritérium pro bundle trust metodu mělo hodnotu $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$. Počáteční tvar pružného tělesa $\Omega(\boldsymbol{\alpha})$ a jeho deformace je zobrazena na obrázcích 5.2.2. a 5.2.3. Rozložení normálového napětí na kontaktní hranici (plná čára) a tečného napětí tamtéž (tečkovaná čára) pro počáteční návrh je ukázáno na obrázku 5.2.4. Předepsané normálové napětí (vektor $\bar{\lambda}_2$) pro příklad 5.2.1. je nakresleno v tomto obrázku čerchovaně.



Obrázek 5.2.2., 5.2.3.

Nyní máme vše připravené pro to, abychom se podívali na výsledky některých našich příkladů. Ve všech příkladech používáme stejná data a měníme pouze předpis cenového funkcionálu \mathcal{J} . Hodnoty kladných konstant určujících rozměr oblasti $\Omega(\boldsymbol{\alpha})$ a přípustnou množinu Υ jsou následující $a = 2$, $C_0 = 0.75$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1.9$, $C_4 = 1$. Povrchové síly na hranici Γ_p mají velikosti $F_1 = -80 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $F_2 = 50 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Fyzikální parametry



Obrázek 5.2.4.

oblasti mají tyto hodnoty - Youngův modul $E = 1$ GPa, Poissonova konstanta $\nu = 0.3$ a koeficient tření $\mathcal{F} = 0.25$. Hranice Γ_u je hranice s plnou Dirichletovskou podmínkou. Dimenze návrhové proměnné α je 15.

Příklad 5.2.1.

$$\min \|\bar{\lambda}_2 - \lambda_2\|^2$$

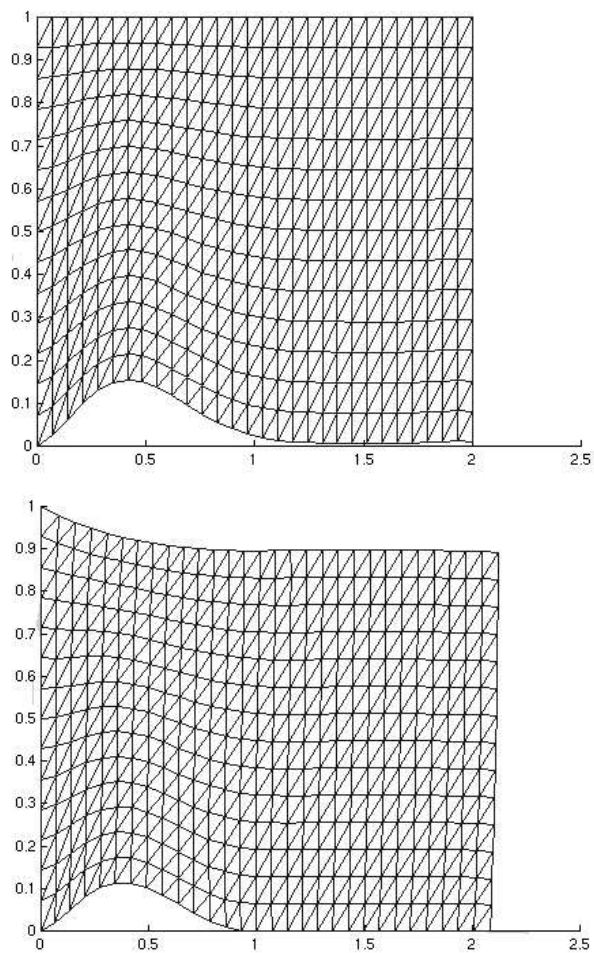
s omezením

$$\alpha \in \Upsilon,$$

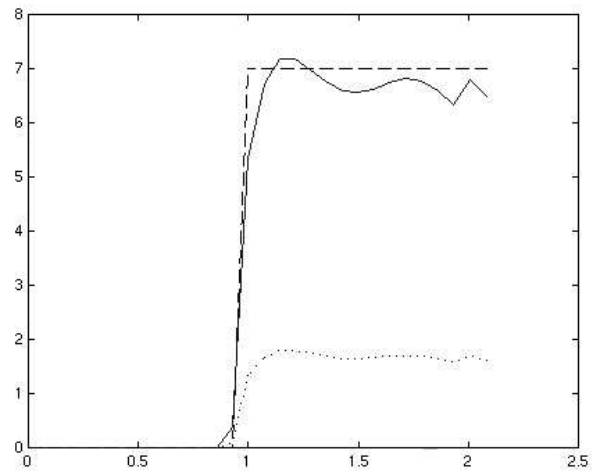
(\mathbf{u}, λ) je řešením kontaktního problému s Coulombovým třením.

Hodnota cenového funkcionálu pro počáteční návrh je 214.6923.

Výsledný (optimalizovaný) návrh pružného tělesa $\Omega(\bar{\alpha})$ a jeho deformace je zobrazena na obrázcích 5.2.5. a 5.2.6. Rozložení normálového napětí na kontaktní hranici (plná čára) a tečného napětí (tečkovaná čára) pro výsledný návrh ukazuje obrázek 5.2.7. Předepsaný vektor $\bar{\lambda}_2$ je nakreslen čerchovanou čarou.



Obrázek 5.2.5., 5.2.6.



Obrázek 5.2.7.

Hodnota cenového funkcionálu pro výsledný návrh je 4.6942.

△

Příklad 5.2.2.

$$\min \|\boldsymbol{\lambda}_2\|^4$$

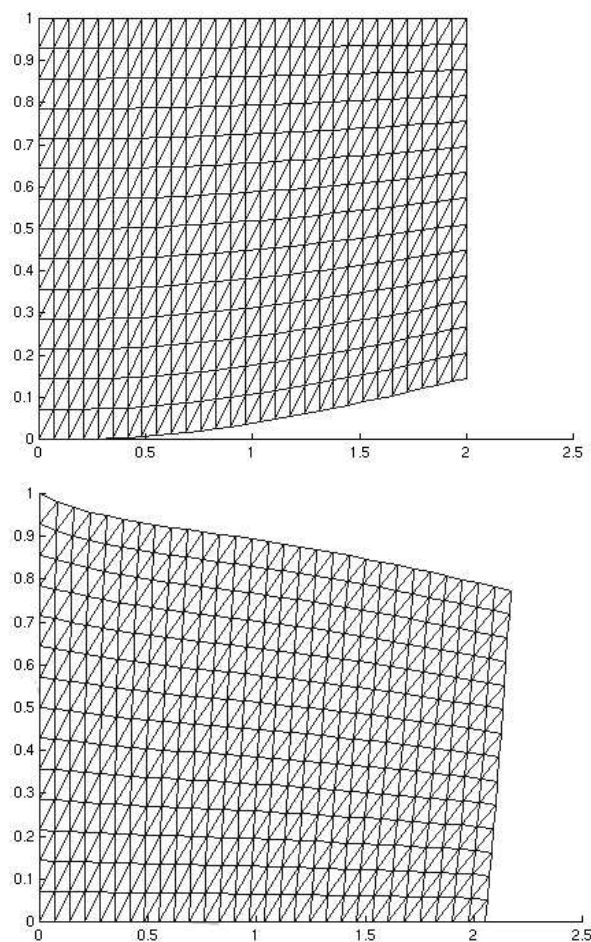
subject to

$$\boldsymbol{\alpha} \in \Upsilon,$$

$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ je řešením kontaktního problému s Coulombovým třením.

Hodnota cenového funkcionálu pro počáteční návrh je 25511.

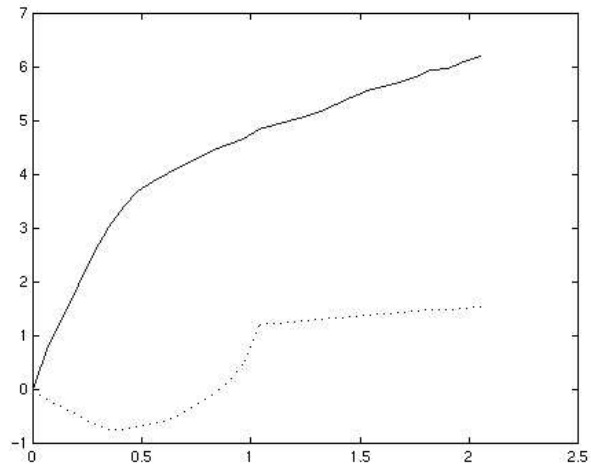
Výsledný (optimalizovaný) návrh pružného tělesa $\Omega(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$ a jeho deformace je zobrazena na obrázcích 5.2.8. a 5.2.9. Rozložení normálového napětí na kontaktní hranici (plná čára) a tečného napětí (tečkovaná čára) pro výsledný návrh ukazuje obrázek 5.2.10.



Obrázek 5.2.8., 5.2.9.

Hodnota cenového funkcionálu pro výsledný návrh je 17286.

△



Obrázek 5.2.10.

Příklad 5.2.3.

$$\min_{\Omega(\boldsymbol{\alpha})} - \int \tau(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{u})dx + \int_{\Gamma_p} F\mathbf{u}d\Gamma_p$$

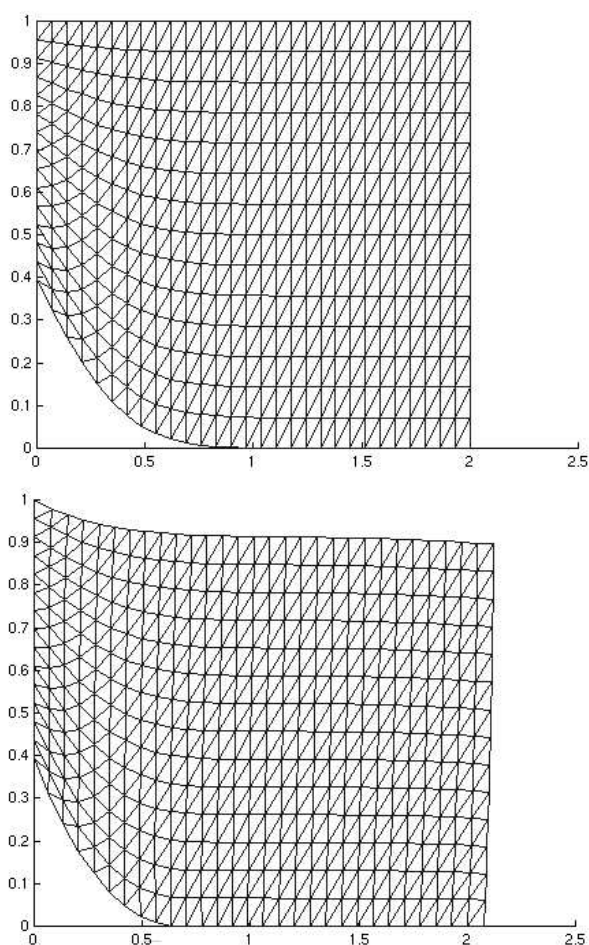
subject to

$$\boldsymbol{\alpha} \in \Upsilon,$$

$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ je řešením kontaktního problému s Coulombovým třením.

Hodnota cenového funkcionálu pro počáteční návrh je 10.0299.

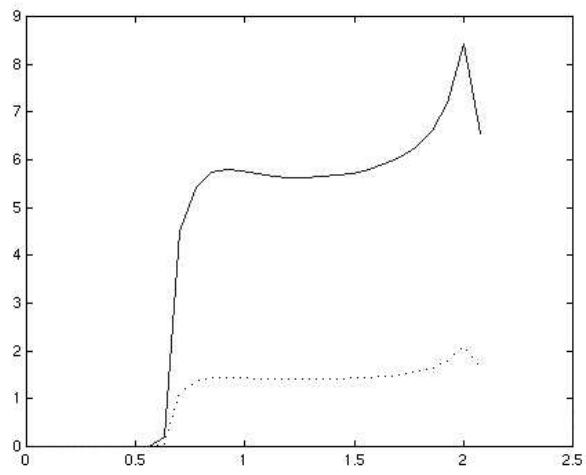
Výsledný (optimalizovaný) návrh pružného tělesa $\Omega(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$ a jeho deformace je zobrazena na obrázcích 5.2.11. a 5.2.12. Rozložení normálového napětí na kontaktní hranici (plná čára) a tečného napětí (tečkovaná čára) pro výsledný návrh ukazuje obrázek 5.2.13.



Obrázek 5.2.11., 5.2.12.

Hodnota cenového funkcionálu pro výsledný návrh je 2.3138.

△



Obrázek 5.2.13.

5.3 Podmínky optimality

Pro řešení našich příkladů se pokusíme ověřit podmínky optimality specifikované ve druhé kapitole. Uvedli jsme, že bundle trust metoda ukončuje iterační proces v bodě $\bar{\alpha}$ v případě, že bod $\bar{\alpha}$ je „téměř stacionární“, tato podmínka je určena velikostí hodnoty ε (v našich příkladech $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$). Jak jsme již uvedli v předchozí kapitole máme k dispozici pouze „vnější“ aproximaci množiny $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha})$ a tedy i $\partial\Theta(\bar{\alpha})$. Tato aproximace je určena takto $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) \subset \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$. Uvědomme si, že podle Teorému 2.3.2 máme k dispozici pseudodiferenciál funkce $\mathcal{S}(\bar{\alpha})$ a tedy i $\Theta(\bar{\alpha})$. Z toho plyne, že bundle trust metoda ukončuje iterační proces v našich příkladech v bodě $\bar{\alpha}$, který je „téměř pseudostacionární“. My ale budeme chtít prokázat přísnější podmínky optimality. V našich příkladech budeme chtít ověřit Clarkeovu podmínku optimality $0 \in \partial\Theta(\bar{\alpha}) + \bar{N}_\Gamma(\bar{\alpha})$. K tomu je nutné nejprve ověřit $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) = \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$ (pokud je $|\mathbb{L}| > 1$, pak máme pouze zajištěno, že $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) \subset \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$). Abychom zajistili splnění této podmínky je nutné ověřit splnění podmínky (MF1) z kapitoly 4.4. Lagrangián \mathcal{L} a nerovnost G mají v našich úlohách tento tvar (řídící proměnná je α , stavové proměnné jsou \mathbf{u} a λ) $\mathcal{L}(\alpha, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{u} - \mathbf{l}(\alpha)^T \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}_\nu + \lambda \mathcal{F}|\mathbf{u}_\tau|$, $G(\alpha, \mathbf{u}, \lambda) : -\mathbf{u}_\nu - \alpha \leq 0$. Poté použijeme podmínku (MF1), tj. budeme ověřovat plnou řádkovou hodnotu matice \mathcal{S}_1 . Tato matice má v našich úlohách tvar

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} \nabla_{\alpha}((A_{tt}(\bar{\alpha}))_{\beta,\beta}(u_t)_\beta) + \nabla_{\alpha}((A_{t\nu}(\bar{\alpha}))_{\beta}u_\nu) - \nabla(l_t(\bar{\alpha}))_\beta & \vdots & & & & & 0 \\ \nabla_{\alpha}((A_{\nu t}(\bar{\alpha}))_{:, \beta}(u_t)_\beta) + \nabla_{\alpha}((A_{\nu\nu}(\bar{\alpha}))_{\beta}u_\nu) - \nabla(l_\nu(\bar{\alpha}))_\beta & \vdots & \mathcal{D} & & & & -E_{I_0}^T \\ & E_{I_+}^T & \vdots & & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & E_{I_0}^T & \vdots & 0 & E_{I_0}^T & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & E \end{bmatrix},$$

$$\text{kde } \mathcal{D} = \begin{bmatrix} A_{tt}(\bar{\alpha})_{\beta,\beta} & (A_{t\nu}(\bar{\alpha}))_{\beta,:} & D_{\beta,I_+} & 0 \\ (A_{\nu t}(\bar{\alpha}))_{:, \beta} & (A_{\nu\nu}(\bar{\alpha}))_{\beta,:} & -E_{I_+}^T & -E_{I_+}^T \\ 0 & E_{I_+}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyní již můžeme přikročit k ověření Clarkovy podmínky optimality. Tato podmínka byla ověřena pomocí rutiny hledající takové $\xi \in \partial\Theta(\bar{\alpha})$, které splňuje $-\xi \in \bar{N}_\Gamma(\bar{\alpha})$. K určení $\partial\Theta(\bar{\alpha})$ potřebujeme znalost množiny $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha})$. Ta byla zkonstruována jako konvexní kombinace $R_i, \forall i \in \mathbb{L}$. Pokud se nám podaří prokázat Clarkeovu podmínku optimality můžeme se pokusit také o ověření (silnější) Morduchovičovy podmínky optimality ($0 \in \partial_M\Theta(\bar{\alpha}) + \tilde{N}_\Gamma(\bar{\alpha})$). Protože víme, že $\partial\Theta(\bar{\alpha}) = \text{cl conv}\{\partial_M\Theta(\bar{\alpha})\}$, můžeme ověřit Morduchovičovu podmínku, jestliže prokážeme, že $\xi_i \in \partial\Theta(\bar{\alpha})$ splňující podmínku $-\xi_i \in \tilde{N}_\Gamma(\bar{\alpha})$ je extrémálním bodem množiny $\partial\Theta(\bar{\alpha})$. Tento způsob má své nedostatky. Pokud ξ_i není extrémálním bodem množiny $\partial\Theta(\bar{\alpha})$, pak o tomto bodě nemáme žádnou informaci neboť nemůžeme ani potvrdit ani vyvrátit tvrzení $\xi_i \in \partial_M\Theta(\bar{\alpha})$.

Příklad 5.2.1. (pokračování)

Algoritmus potřebuje 109 iterací k nalezení minima.

(MF1) byla ověřena (\mathcal{S}_1 má 78 řádků a 109 sloupců, řádková hodnota je 78),

tj. $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) = \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$.

Clarkeova podmínka optimality: Vzdálenost $\partial\Theta(\bar{\alpha}) + \bar{N}_\Upsilon(\bar{\alpha})$ a počátku je 0.0084 ($\text{card}(\mathbb{L})=3$).

Minimum splňuje také Morduchovičovu podmínku optimality.

△

Příklad 5.2.2. (pokračování)

Algoritmus potřebuje 240 iterací k nalezení minima.

(MF1) byla ověřena (\mathcal{S}_1 má 81 řádků a 124 sloupců, řádková hodnota je 81),

tj. $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) = \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$.

Clarkeova podmínka optimality: Vzdálenost $\partial\Theta(\bar{\alpha}) + \bar{N}_\Upsilon(\bar{\alpha})$ a počátku je 0.027 ($\text{card}(\mathbb{L})=59049$).

Nepodařilo se nám ověřit Morduchovičovu podmínku optimality pro značnou velikost množiny \mathbb{L} .

△

Příklad 5.2.3. (pokračování)

Algoritmus potřebuje 2 iterace k nalezení minima.

(MF1) byla ověřena (\mathcal{S}_1 má 80 řádků a 116 sloupců, řádková hodnota je 80), tj.

$\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) = \text{conv}\{R_i, i \in \mathbb{L}\}$.

Clarkeova podmínka optimality: Vzdálenost $\partial\Theta(\bar{\alpha}) + \bar{N}_\Upsilon(\bar{\alpha})$ a počátku je 0 ($\text{card}(\mathbb{L})=3$).

Minimum splňuje také Morduchovičovu podmínku optimality.

△

Kapitola 6

Zobecnění na 3D případ

V této kapitole navrhne postup řešení úlohy trojrozměrné tvarové optimalizace kontaktní úlohy s Coulombovým třením. Nejprve si zavedeme formulaci 3D kontaktní úlohy s Coulombovým třením a to přímo v diskrétní formulaci. Poté navrhne postup pro hledání jednoho libovolného subgradientu z Clarkeova zobecněného gradientu složené cenové funkce závislé na návrhové proměnné α . Pro toto hledání použijeme podobný postup jako ve čtvrté kapitole.

6.1 Stavová úloha - 3D kontaktní problém s Coulombovým třením

Nyní se zabýváme tělesem Ω , na kterém budeme řešit 3D kontaktní úlohu s Coulombovým třením, tu zavedeme obdobně jako ve 3. kapitole. Zabýváme se pružným tělesem $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Hranice $\partial\Omega$ je složena ze tří nepřekrývajících se částí Γ_u , Γ_p a Γ_c . Na hranicích Γ_u , Γ_p a Γ_c jsou předepsány tři rozdílné okrajové podmínky. Γ_u je hranice, na které je těleso Ω pevně uchyceno, tj., Γ_u je hranice s Dirichletovskou podmínkou. Povrchové síly $F = (F_1, F_2, F_3)$ působí na hranici Γ_p , $F \in L^2(\Omega)$. Těleso Ω je zdola „podepřeno“ tuhým podložím $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \leq 0\}$. Mezi hranicí Γ_c a touto překážkou uvažujeme v našem modelu Coulombovo tření. Těleso Ω má hranici Γ_c popsanou funkcí $\alpha(x_1, x_2)$, tvar tělesa je určen předpisem

$$\Omega(\alpha) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b], \alpha(x_1, x_2) < x_3 < 1\}.$$

6.1.1 Diskrétní formulace kontaktního problému se zadaným třením

Nyní si zavedeme diskrétní formulaci kontaktního problému se zadaným třením. Funkci $\alpha(x_1, x_2)$, která popisuje hranici Γ_c můžeme nahradit hladkou funkcí $G(x_1, x_2)$, která je závislá na vektoru α o dimenzi $d = n_1 \cdot n_2$. Jako funkci $G(x_1, x_2)$ si můžeme například

vybrat Beziérovu plochu:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \alpha_{i,j} \beta_i^{n_1}(x_1) \beta_j^{n_2}(x_2), \\ \beta_i^{n_1}(x_1) &= \binom{n_1}{i} \left(\frac{x_1}{a}\right)^i \left(1 - \frac{x_1}{a}\right)^{n_1-i}, \quad x_1 \in [0, a], \\ \beta_j^{n_2}(x_2) &= \binom{n_2}{j} \left(\frac{x_2}{b}\right)^j \left(1 - \frac{x_2}{b}\right)^{n_2-j}, \quad x_2 \in [0, b]. \end{aligned}$$

Algebraickou formulaci stavové úlohy popisující diskrétní kontaktní problém se zadaným třením na tělese $\Omega(\alpha)$, pak můžeme zavést takto

$$\left. \begin{aligned} &\text{Najdeme } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_\nu, \boldsymbol{\lambda}_{t1}, \boldsymbol{\lambda}_{t2}) \in \mathbf{R}^n \times \boldsymbol{\Lambda} \\ &\text{takové, že} \\ &\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{l} - \mathbf{B}_\nu^T \boldsymbol{\lambda}_\nu - \mathbf{B}_{t1}^T \boldsymbol{\lambda}_{t1} - \mathbf{B}_{t2}^T \boldsymbol{\lambda}_{t2}, \\ &(\boldsymbol{\lambda}_\nu - \boldsymbol{\mu}_\nu, \mathbf{B}_\nu \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} + (\boldsymbol{\lambda}_{t1} - \boldsymbol{\mu}_{t1}, \mathbf{B}_{t1} \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} + (\boldsymbol{\lambda}_{t2} - \boldsymbol{\mu}_{t2}, \mathbf{B}_{t2} \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} \geq \\ &\geq (\boldsymbol{\lambda}_\nu - \boldsymbol{\mu}_\nu, \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha})_{\mathbf{R}^p} \quad \forall (\boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_{t1}, \boldsymbol{\mu}_{t2}) \in \boldsymbol{\Lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}_A(g))$$

kde \mathbf{A} a \mathbf{l} jsou po řadě matice tuhosti a vektor sil, $\tilde{\mathbf{B}}$ je konstantní matice realizující zobrazení G , vektor $\mathbf{B}_\nu \mathbf{u}$ je vektor normálových složek \mathbf{u} v kontaktních uzlech, vektory $\mathbf{B}_{t1} \mathbf{u}$ a $\mathbf{B}_{t2} \mathbf{u}$ jsou vektory tečných složek \mathbf{u} v kontaktních uzlech a $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_\nu \times \boldsymbol{\Lambda}_t$,

$$\boldsymbol{\Lambda}_\nu = \{\boldsymbol{\mu}_\nu \in \mathbf{R}^p \mid \mu_\nu \geq 0\},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_t = \{(\boldsymbol{\mu}_{t1}^T, \boldsymbol{\mu}_{t2}^T)^T \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \mid (\mu_{t1})_i^2 + (\mu_{t2})_i^2 \leq g_i, \quad i = 1, \dots, p\},$$

$g_i = \mathcal{F}\lambda_\nu^i$ je mez prokluzu a \mathcal{F} je koeficient tření.

6.1.2 Diskrétní duální formulace kontaktního problému se zadaným třením

Pro numerické řešení 3D kontaktního problému s Coulombovým třením používáme duální formulaci předchozí úlohy. Tu získáme eliminací proměnné \mathbf{u} z rovnice v úloze $(\mathcal{P}_A(g))$ a dosazením do nerovnosti v téže úloze. Diskrétní duální formulace kontaktního problému se zadaným třením pak vypadá následovně

$$\left. \begin{aligned} &\min \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^T Q \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^T h, \\ &\text{kde } \boldsymbol{\lambda}_\nu \in \boldsymbol{\Lambda}_\nu, (\boldsymbol{\lambda}_{t1}, \boldsymbol{\lambda}_{t2}) \in \boldsymbol{\Lambda}_t, \boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_\nu^T, \boldsymbol{\lambda}_{t1}^T, \boldsymbol{\lambda}_{t2}^T)^T. \end{aligned} \right\} \quad (DF)$$

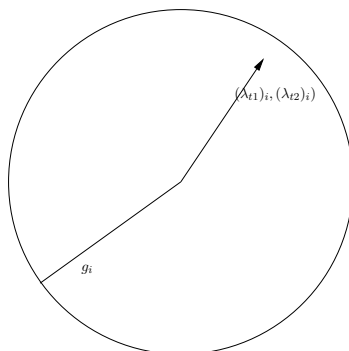
Dále

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_\nu &= \{\boldsymbol{\lambda}_\nu \in \mathbf{R}^p \mid (\lambda_\nu)_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p\}, \\ \boldsymbol{\Lambda}_t &= \{(\boldsymbol{\lambda}_{t1}, \boldsymbol{\lambda}_{t2}) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \mid (\lambda_{t1})_i^2 + (\lambda_{t2})_i^2 \leq g_i^2, \quad i = 1, \dots, p\}, \end{aligned}$$

$Q \in \mathbf{R}^{3p \times 3p}$ je pozitivně definitní duální Hessián, $h \in \mathbf{R}^{3p}$ a g_i jsou hodnoty omezující tečné posunutí kontaktních uzlů. V této duální formulaci tedy hledáme normálová kontaktní napětí $\boldsymbol{\lambda}_\nu$ a tečná kontaktní napětí $\boldsymbol{\lambda}_t = (\boldsymbol{\lambda}_{t1}^T, \boldsymbol{\lambda}_{t2}^T)^T$. Podrobnější popis lze nalézt

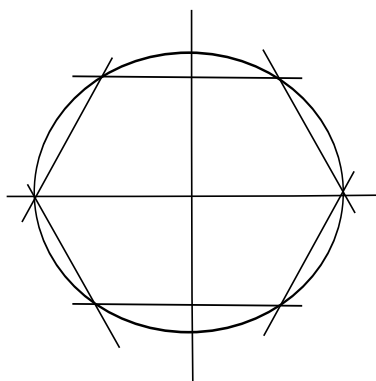
v [18].

Nevýhodou této duální formulace je nutnost řešení úlohy kvadratického programování s kvadratickými omezeními typu nerovnosti, které jsou obsaženy v Λ_t (vektor $((\lambda_{t1})_i, (\lambda_{t2})_i)$ leží v kruhu s poloměrem g_i viz obrázek 6.1.1).



Obrázek 6.1.1.

Jednou z možností, jak přibližně vyřešit danou úlohu je aproximovat kruh pravidelným n -úhelníkem, tj. převést úlohu s kvadratickými omezeními na úlohu s lineárními omezeními (viz obrázek 6.1.2), podrobněji viz [18].



Obrázek 6.1.2.

6.1.3 Diskrétní duální formulace kontaktního problému s Coulombovým třením

Jednoznačnost řešení úlohy (DF) nám podobně jako v případě řešení 2D kontaktního problému dává možnost zavést zobrazení $\Phi : \Lambda_\nu \rightarrow \Lambda_\nu$ definované předpisem:

$$\Phi(g) = \mathcal{F}\lambda_\nu(g) \quad \forall g \in \Lambda_\nu. \quad (5.1.2)$$

Řešení kontaktního problému s Coulombovým třením $\overline{\lambda}_\nu \in \Lambda_\nu$ je potom definováno jako pevný bod zobrazení Φ , tj. $\Phi(\overline{\lambda}_\nu) = \overline{\lambda}_\nu$. Diskrétní kontaktní problém s Coulombovým třením má řešení pro libovolnou nezápornou hodnotu \mathcal{F} . A v případě, že \mathcal{F} je dostatečně malé, je zobrazení Φ kontraktivní (omezení \mathcal{F} , které zajistí kontraktivnost Φ je závislé na parametrech sítě).

Pro hledání řešení můžeme použít metodu postupných aproximací:

$$\begin{cases} \lambda_\nu^{(0)} \in \Lambda_\nu \text{ dáno,} \\ \lambda_\nu^{(k)} = \Phi(\lambda_\nu^{(k-1)}), \quad k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

6.2 Citlivostní analýza pro 3D úlohu

Podobně jako ve 2D případě zavedeme zobrazení $\mathcal{S} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{4p}$. Toto zobrazení opět popisuje řešení stavové úlohy (řídícímu vektoru $\alpha \in U_{ad}$ je přiřazeno řešení kontaktní úlohy s Coulombovým třením $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \lambda)$). Kontaktní problém s Coulombovým třením můžeme podobně jako ve dvojrozměrném případě popsat pomocí zobecněné rovnosti:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &\in \mathbf{A}_{tt}(\alpha)\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}(\alpha)\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t(\alpha) + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \lambda) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{A}_{\nu t}(\alpha)\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\alpha)\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu(\alpha) - \lambda \\ \mathbf{0} &\in \mathbf{u}_\nu + \alpha + N_{\mathbf{R}_+^p}(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (GE)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \lambda) = \partial_{(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2})} j(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \lambda), \quad j(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \lambda) = \mathcal{F} \sum_{i=1}^p \lambda^i \|(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i)\|$$

a $N_{\mathbf{R}_+^p}$ je standartní normálový kužel.

Podobně jako při řešení stavové úlohy použijeme při výpočtu $\partial_{(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2})} j(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \lambda)$ aproximaci (jednotkového) kruhu pravidelným n -úhelníkem. Toto nahrazení můžeme provést následujícím způsobem. Hranici n -úhelníku dostaneme jako sjednocení následujících n úseček daných rovnicemi $a_j x + b_j y + c_j = 0$, kde $a_j = \cos(\varphi_j)$, $b_j = \sin(\varphi_j)$, $c_j = -\cos(\frac{\pi}{n})$, $\varphi_j = \frac{\pi}{n}(2j-1)$. $x \in [x_l, x_u]$, kde $x_l = \min\{\cos((j-1)\frac{2\pi}{n}), \cos(j\frac{2\pi}{n})\}$, $x_u = \max\{\cos((j-1)\frac{2\pi}{n}), \cos(j\frac{2\pi}{n})\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Lemma 6.2.1 *S využitím po částech lineární aproximace eukleidovské normy $\|(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i)\|$ je multifunkce $\tilde{\mathbf{Q}}$ pro pevné $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ dána předpisem:*

$$\mathcal{F}\lambda^i \partial \|(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i)\| = \begin{cases} \mathcal{F}\lambda^i \cdot (a_j, b_j)^T, & \text{jestliže } (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \varphi(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) \in \left(\frac{2\pi}{n}(j-1), \frac{2\pi}{n}j\right), \\ \mathcal{F}\lambda^i \cdot (a, b)^T, & (a, b)^T = k_1(a_j, b_j)^T + k_2(a_{j+1}, b_{j+1})^T, \quad k_{1,2} \geq 0, \quad k_1 + k_2 = 1, \\ & \text{jestliže } (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \varphi(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) = \frac{2\pi}{n}j, \\ \mathcal{F}\lambda^i \cdot (a, b)^T, & (a, b)^T = \sum_{j=1}^n k_j(a_j, b_j)^T, \quad k_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n k_j = 1, \\ & \text{jestliže } (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) = (0, 0). \end{cases}$$

$\varphi(a, b)$ je odchylka vektoru $(a, b)^T$ od kladné části osy x .

Důkaz V prvním případě je \tilde{Q} parciálním gradientem spojitě diferencovatelné funkce. K důkazu druhé a třetí možnosti stačí použít Teorem 2.1.2. \square

Označme $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\lambda})$ bod, který splňuje zobecněnou rovnost (GE) a zavedme pro tento bod následující indexové množiny:

$$\begin{aligned} & \forall j = 1, \dots, n : \\ K_{+j}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\lambda}) &= \left\{ i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid (\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \varphi(\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) \in \left(\frac{2\pi}{n}(j-1), \frac{2\pi}{n}j\right), \right. \\ & \quad \left. \tilde{Q}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\lambda}) = \mathcal{F}\bar{\lambda}^i (a_j, b_j)^T \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall j = 1, \dots, n : \\ K_{0,j,j+1}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\lambda}) &= \left\{ i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid (\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \varphi(\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) = \frac{2\pi}{n}j, \right. \\ & \quad \left. \tilde{Q}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\lambda}) = \mathcal{F}\lambda^i \cdot (a_j, b_j)^T \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall j = 1, \dots, n : \\ K_{j,j+1,0}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\lambda}) &= \left\{ i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid (\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \varphi(\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) = \frac{2\pi}{n}j, \right. \\ & \quad \left. \tilde{Q}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\lambda}) = \mathcal{F}\lambda^i \cdot (a_{j+1}, b_{j+1})^T \right\} \end{aligned}$$

$\forall j = 1, \dots, n :$

$$K_{j,00,j+1}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \left\{ i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid (\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \varphi(\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) = \frac{2\pi}{n} j, \right. \\ \left. \tilde{Q}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a, b)^T, (a, b)^T = k_1(a_j, b_j)^T + k_2(a_{j+1}, b_{j+1})^T, \right. \\ \left. k_{1,2} > 0, k_1 + k_2 = 1 \right\}$$

$$K_0(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid (\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) = (0, 0), \tilde{Q}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i (a, b)^T, \\ (a, b)^T = k_1(a_j, b_j)^T + k_2(a_{j+1}, b_{j+1})^T, k_{1,2} \geq 0, k_1 + k_2 = 1 \forall j = 1, \dots, n\}$$

$$K_{00}(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid (\bar{\mathbf{u}}_{t1}^i, \bar{\mathbf{u}}_{t2}^i) = (0, 0), \tilde{Q}^i(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i (a, b)^T, \\ (a, b)^T = \sum_{j=1}^n k_j(a_j, b_j)^T, k_j > 0 \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n k_j = 1\}$$

$$M(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_\nu^i + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i > 0\}$$

$$I_+(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0\}$$

$$I_0(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \bar{\mathbf{u}}_\nu^i + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i = 0, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^i = 0\}.$$

Všimněme si významu předchozích indexových množin. Množina K_{+j} obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nenulové (dochází u nich k prokluzu), $K_{0,j,j+1}$, $K_{j,j+1,0}$ a $K_{j,00,j+1}$ obsahují indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nenulové (dochází u nich k prokluzu) a které leží na spojnici středu a vrcholu n -úhelníka, kterým aproximujeme kruh, K_0 obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nulové a

$$-\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu + \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i (a, b)^T,$$

$$(a, b)^T = k_1(a_j, b_j)^T + k_2(a_{j+1}, b_{j+1})^T, k_{1,2} \geq 0, k_1 + k_2 = 1 \forall j = 1, \dots, n$$

(dochází u nich ke „slabému přilepení“ (weak stick)), K_{00} obsahuje indexy (kontaktních) uzlů, jejichž posunutí v tečném směru je nulové a

$$|-\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t - \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu + \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha})| = \mathcal{F}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i (a, b)^T,$$

$$(a, b)^T = \sum_{j=1}^n k_j(a_j, b_j)^T, k_j > 0 \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n k_j = 1$$

(dochází u nich k „silnému přilepení“ (strong stick)). Pokud uzel i leží v některé z indexových množin K_{+j} , pak se pohybujeme v části grafu, kde je \tilde{Q}^i jednoznačná. Pokud uzel i leží v některé z indexových množin $K_{0,j,j+1}$, $K_{j,j+1,0}$, $K_{j,00,j+1}$, K_0 nebo K_{00} , pak pracujeme s částí grafu, kde je \tilde{Q}^i mnohoznačná. M obsahuje indexy uzlů, které nejsou v kontaktu s podloží, I_+ obsahuje indexy uzlů u nichž dochází k silnému kontaktu s tuhým podloží (tj. $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i > 0$ a $\bar{\mathbf{u}}_\nu^i + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i =$), I_0 obsahuje indexy uzlů u nichž dochází ke slabému kontaktu (tj. $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i = 0$ a $\bar{\mathbf{u}}_\nu^i + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i =$).

Pokud $j = n$, pak symbolem $j + 1$ rozumíme číslo 1. Tak budeme chápat $j + 1$ i v dalším textu.

Nechť bod $\boldsymbol{\alpha}$ leží v blízkosti bodu $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ a bod $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$. Pak podobně

jako ve dvojrozměrném případě jsou splněny následující inkluze:

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n : K_{+j}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset K_{+j}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ \forall j = 1, \dots, n : K_{j,00,j+1}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset K_{j,00,j+1}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ K_{00}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset K_{00}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ M(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\supset M(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \quad I_+(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) \supset I_+(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}). \end{aligned}$$

Z toho plynou následující inkluze:

$$\begin{aligned} K_0(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset K_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ \forall j = 1, \dots, n : K_{0,j,j+1}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset K_{0,j,j+1}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ \forall j = 1, \dots, n : K_{j,j+1,0}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset K_{j,j+1,0}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \\ I_0(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda}) &\subset I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_{t1}, \bar{\mathbf{u}}_{t2}, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}). \end{aligned}$$

Z těchto inkluzí vyplývá, že v okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává pro každé $i \in K_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$, pro které platí $\varphi(a^i, b^i) \in [\frac{2\pi}{n}(j-1), \frac{2\pi}{n}j]$ jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) &\neq (0, 0) \wedge \\ \wedge \varphi(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) &\in (\frac{2\pi}{n}(j-1), \frac{2\pi}{n}j) \\ \\ (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) &= (0, 0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a_j, b_j)^T, \\ \\ \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a, b)^T, \\ (a, b)^T &= \sum_{j=1}^n k_j (a_j, b_j)^T, \\ k_j &> 0 \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n k_j = 1. \end{aligned} \quad (6.1)$$

V okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává pro každé $i \in K_{0,j,j+1}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) &\neq (0, 0) \wedge \\ \wedge \varphi(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) &\leq \frac{2\pi}{n}j \\ \\ (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) &= \bar{\mathbf{u}}_t^i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a_j, b_j)^T, \\ \\ \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a, b)^T, \\ (a, b)^T &= k_1 (a_j, b_j)^T + k_2 (a_{j+1}, b_{j+1})^T. \end{aligned} \quad (6.2)$$

V okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává pro každé $i \in K_{j,j+1,0}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned}
& (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) \neq (0, 0) \wedge \\
& \wedge \varphi(\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) \geq \frac{2\pi}{n} j \\
& (\mathbf{u}_{t1}^i, \mathbf{u}_{t2}^i) = \bar{\mathbf{u}}_t^i \\
& \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a_{j+1}, b_{j+1})^T, \\
& \tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a, b)^T, \\
& (a, b)^T = k_1(a_j, b_j)^T + k_2(a_{j+1}, b_{j+1})^T.
\end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Všimněme si, že druhé části vztahů (6.1) - (6.3) jsou obdobou druhých částí vztahů (4.1) a (4.2) a mají opět význam nerovnosti (tj. $\tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) \neq \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a_j, b_j)^T$ nebo $\tilde{Q}^i(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}) \neq \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}^i \cdot (a_{j+1}, b_{j+1})^T$).

Podobně, v okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ nastává pro každé $i \in I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ jedna z následujících možností:

$$\left. \begin{aligned}
& \boldsymbol{\lambda}^i \geq 0 \quad \mathbf{u}_\nu^i + \boldsymbol{\alpha}^i = 0, \\
& \boldsymbol{\lambda}^i = 0 \quad \mathbf{u}_\nu^i + \boldsymbol{\alpha}^i \geq 0.
\end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Díky tomu dostaneme rozklad indexové množiny $K_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ na $2n+1$ podmnožin, které označíme K_{1j} , $j = 1, \dots, n$ a K_2 a definujeme je vztahem (6.1), rozklad množiny $K_{0,j,j+1}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$, $j = 1, \dots, n$ na $2n$ podmnožin, které označíme K_{3j} a K_{4j} , $j = 1, \dots, n$ a definujeme je vztahem (6.2), rozklad množiny $K_{j,j+1,0}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$, $j = 1, \dots, n$ na $2n$ podmnožin, které označíme K_{5j} a K_{6j} , $j = 1, \dots, n$ a definujeme je vztahem (6.3) a rozklad množiny $I_0(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ na dvě podmnožiny, které označíme J_1 a J_2 a definujeme je vztahem (6.4). Dále zanedbáme všechny nerovnosti v (6.1) - (6.4) a získáme ze zobecněné rovnosti (GE) systém rovnic (GE2) uvedený níže, který je lineární ve stavových proměnných \mathbf{u}_t , \mathbf{u}_ν a $\boldsymbol{\lambda}$ a nelineární v řídicí proměnné $\boldsymbol{\alpha}$. Dále položíme $\beta = K_{+j} \cup K_1 \cup K_{3j} \cup K_{5j}$, $j = 1, \dots, n$ a $\gamma_1 = K_{00} \cup K_2$, $j = 1, \dots, n$, $\gamma_2 = K_{4j} \cup K_{6j}$, $j = 1, \dots, n$ a označíme symbolem \mathbf{D} diagonální matici o rozměrech $[2|\beta| \times 2|\beta|]$, její hodnoty na diagonále jsou dány následujícím vztahem.

$$d_{2i,2i} = \begin{cases} \mathcal{F}a_j & \text{jestliže } i \in K_{+j} \cup K_{1j} \cup K_{3j}, \\ \mathcal{F}a_{j+1} & \text{jestliže } i \in K_{5j}, \end{cases}$$

$$d_{2i+1,2i+1} = \begin{cases} \mathcal{F}b_j & \text{jestliže } i \in K_{+j} \cup K_{1j} \cup K_{3j}, \\ \mathcal{F}b_{j+1} & \text{jestliže } i \in K_{5j}. \end{cases}$$

Výše zmíněná rovnost (GE2) má následující tvar

$$\left. \begin{aligned}
& \mathbf{0} = (\mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha}))_\beta \mathbf{u}_t + (\mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha}))_\beta \mathbf{u}_\nu - (\mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}))_\beta + \mathbf{D}\boldsymbol{\lambda}_\beta, \\
& \mathbf{0} = \mathbf{A}_{\nu t}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda}, \\
& 0 = \|(u_{t1}^i, u_{t2}^i)\| \text{ jestliže } i \in \gamma_1, \\
& 0 = (\bar{u}_{t1}^i, \bar{u}_{t2}^i) - (u_{t1}^i, u_{t2}^i) \text{ jestliže } i \in \gamma_2, \\
& 0 = u_\nu^i + \boldsymbol{\alpha}^i \text{ jestliže } i \in I_+ \cup J_1, \\
& 0 = \boldsymbol{\lambda}^i \text{ jestliže } i \in M \cup J_2.
\end{aligned} \right\} \quad (GE2)$$

Následující část je obdobou části čtvrté kapitoly, ve které jsme navrhli postup pro hledání jednoho libovolného subgradientu z Clarkeova zobecněného gradientu složené funkce $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}))$. Pokud použijeme větu o funkci zadané implicitně, můžeme systémem rovnic (GE2) implicitně zadat funkci $\mathcal{S}^*[\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^{4p}]$, která přiřazuje řídicí proměnné $\boldsymbol{\alpha}$ trojici $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$. K tomu slouží následující věta (v jejím důkazu ověříme splnění předpokladů věty o funkci zadané implicitně).

Věta 6.2.1 *Uvažujme systém rovnic (GE2) na okolí bodu $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ (bod $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje zobecněnou rovnost (GE)). Předpokládejme, že matice*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \end{bmatrix}$$

je pozitivně definitní. Potom pro libovolnou volbu indexových množin $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$ existuje okolí \mathcal{O} řídicí proměnné $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ a spojitě diferencovatelná funkce $\mathcal{S}^*[\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}^{4p}]$, která je definována implicitně systémem rovnic (GE2) a splňuje následující vlastnosti:

- (i) $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{S}^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$,
- (ii) body $(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}^*(\boldsymbol{\alpha}))$ splňují rovnost (GE2) pro všechny $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{O}$ pro „malý“ koeficient tření \mathcal{F} .

Důkaz Nechť indexové množiny $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$ jsou zvoleny libovolně. Nejprve ukážeme platnost $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathcal{S}^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}})$, kde \mathcal{S}^* je funkce zadaná implicitně systémem rovnic (GE2). Bod $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje zobecněnou rovnost (GE). Z toho plyne, že kromě první rovnice, splňuje i všechny rovnice ze systému rovnic (GE2). Uvažujme nyní vektor $\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda})$. Potom platí $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\lambda}}_\beta$. Z toho plyne, že $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje i první rovnici ze systému (GE2) a tedy $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ splňuje celý systém rovnic (GE2).

Nyní musíme dokázat, že funkce \mathcal{S}^* je diferencovatelná a jednoznačná na okolí bodu $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$. Jestliže zanedbáme všechny nulové složky vektoru stavových proměnných $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_\nu, \boldsymbol{\lambda})$, získáme redukovaný parciální Jacobián pravé strany systému (GE2) v bodě $(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ vzhledem ke zbývajícím (nenulovým) složkám vektoru $(\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_\nu, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}))_{\beta, \beta \cup \gamma_2} & (\mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}))_\beta & (I_{+ \cup J_1})\mathbf{D} \\ \beta \cup \gamma_2 (\mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\boldsymbol{\alpha}})) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & -\mathbf{E}_{I_{+ \cup J_1}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{I_{+ \cup J_1}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Nechť je matice $(I_{+ \cup J_1})\mathbf{D}$ nulová, pak díky pozitivní definitnosti matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \end{bmatrix}$$

je regulární matice $\mathbf{\Pi}$. Nyní opustíme předpoklad nulovosti matice $(I_+ \cup J_1)\mathbf{D}$, tzn. matici $\mathbf{\Pi}$ dostaneme jako součet regulární matice a matice

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (I_+ \cup J_1)\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Nenulové prvky matice $\overline{\mathbf{\Pi}}$ jsou rovny koeficientu tření \mathcal{F} nebo jeho opačné hodnotě. Protože koeficient tření je „malý“, můžeme použít perturbační lemmu (viz [30]). Tím ověříme regularitu matice $\mathbf{\Pi}$. Protože množiny $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$ byly zvoleny libovolně, vyplývá dokazované tvrzení z věty o funkci zadané implicitně. \square

Z Věty 6.2.1 plyne, že zobrazení \mathcal{S} je PC^1 funkce, jejíž aktivní funkce v bodě $\bar{\alpha}$ jsou dány libovolnou kombinací indexových množin $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$. Protože nemáme zaručeno, že všechny tyto aktivní funkce jsou také esenciálně aktivní (a výběr pouze těch, které jsou esenciálně aktivní, by byl časově náročný - museli bychom ověřovat splnění nerovností v (4.1), (4.2) a (4.3) v okolí bodu $\bar{\alpha}$, které jsme zanedbali), budeme konstruovat pouze „vnější“ aproximaci $\partial\mathcal{S}(\alpha)$ a následně pouze „vnější“ aproximaci $\partial\Theta(\alpha)$. K tomu zavedeme novou indexovou množinu \mathbb{L} takovou, která jednoznačně určuje kombinaci množin $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$, tj. existuje bijektivní zobrazení mezi indexy \mathbb{L} a indexovými množinami $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$. Dále označme symbolem $\mathbf{\Pi}_i$, kde $i \in \mathbb{L}$, matici

$$\mathbf{\Pi}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{tt}(\bar{\alpha}))_{\beta, \beta \cup \gamma_2} & (\mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\alpha}))_{\beta} & (I_+ \cup J_1)\mathbf{D} \\ \beta \cup \gamma_2 (\mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\alpha})) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\alpha}) & -\mathbf{E}_{I_+ \cup J_1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{I_+ \cup J_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

která je určena volbou $i \in \mathbb{L}$, tj. volbou indexových množin $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$. Dále označme symbolem $\mathbf{\Xi}_i$, kde $i \in \mathbb{L}$, matici

$$\mathbf{\Xi}_i = \begin{bmatrix} \nabla_{\alpha}((\mathbf{A}_{tt}(\bar{\alpha}))_{\beta, \beta \cup \gamma_2}(\mathbf{u}_t)_{\beta}) + \nabla_{\alpha}((\mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\alpha}))_{\beta}\mathbf{u}_{\nu}) - \nabla(l_t(\bar{\alpha}))_{\beta} \\ \nabla_{\alpha}(\beta \cup \gamma_2 (\mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\alpha}))(\mathbf{u}_t)_{\beta}) + \nabla_{\alpha}(\mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\alpha})\mathbf{u}_{\nu}) - \nabla l_{\nu}(\bar{\alpha}) \\ \mathbf{E}_{I_+ \cup J_1} \end{bmatrix},$$

která je určena volbou $i \in \mathbb{L}$, tj. volbou indexových množin $K_{1j}, K_2, K_{3j}, K_{4j}, K_{5j}, K_{6j}, J_1, J_2, j = 1, \dots, n$. Všimněme si, že matice $\mathbf{\Xi}_i$ je parciální Jacobián pravé strany (GE2) v bodě $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}_{\nu}, \bar{\lambda})$ vzhledem k řídicí proměnné (α) . Při splnění podmínky pozitivní definitnosti matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tt}(\bar{\alpha}) & \mathbf{A}_{t\nu}(\bar{\alpha}) \\ \mathbf{A}_{\nu t}(\bar{\alpha}) & \mathbf{A}_{\nu\nu}(\bar{\alpha}) \end{bmatrix}$$

platí, že pro každé $i \in \mathbb{L}$ je matice $-\mathbf{\Pi}_i^{-1}\mathbf{\Xi}_i$ rovna derivaci zobrazení $\alpha \mapsto ((\mathbf{u}_t)_{\beta}, \mathbf{u}_{\nu}, \lambda_{I_+ \cup J_1})$ v bodě $\bar{\alpha}$ definovaném rovností (GE2). Derivaci úplného zobrazení $\alpha \mapsto (\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{\nu}, \lambda)$ můžeme získat z matice $-\mathbf{\Pi}_i^{-1}\mathbf{\Xi}_i$ vložení nulových řádků nahrazujících derivace u_t^j ,

$j \in \gamma_1$ a λ^l , $l \in M \cup J_2$ do této matice. Tuto „zúplněnou“ $[4p \times d]$ matici nazveme R_i , $i \in \mathbb{L}$. Nyní již můžeme získat aproximaci $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha})$. Tu nám dává následující věta.

Věta 6.2.2 *Pokud jsou splněny předpoklady Věty 6.2.1, pak platí*

$$\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}) \subset \text{conv}\{R_i \mid i \in \mathbb{L}\}.$$

Důkaz Tvzení přímo vyplývá z předcházejícího rozboru a věty A.4.1 z [36], která je obdobou Teorému 2.3.3 pro Clarkeův zobecněný Jacobián. \square

Jak jsme již zmínili dříve pro použití bundle trust metody stačí mít k dispozici jeden libovolný subgradient z Clarkeova zobecněného gradientu složené funkce $\xi = \partial\Theta(\bar{\alpha}) = \partial\mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$ a není nutné počítat matici z Clarkeova zobecněného Jacobiánu $\partial\mathcal{S}(\bar{\alpha})$. Výpočet tohoto subgradientu nám umožní následující teorém.

Teorém 6.2.1 *Nechť je funkce \mathcal{J} spojitě diferencovatelná a koeficient tření je „malý“. Nechť je dán bod $\bar{\alpha} \in U_{ad}$ a předpokládejme, že pro $i \in \mathbb{L}$ platí*

$$R_i \in \partial\mathcal{S}(\bar{\alpha}).$$

Dále nechť \mathbf{p}_i je řešení adjungované rovnice

$$\mathbf{\Pi}_i^T \mathbf{p}_i + (\nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})))_i = 0,$$

kde matice $\mathbf{\Pi}_i$ je určena $i \in \mathbb{L}$, tj. volbou indexových množin K_{1j} , K_2 , K_{3j} , K_{4j} , K_{5j} , K_{6j} , J_1 , J_2 , $j = 1, \dots, n$ a $(\nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})))_i$ označuje vektor, který je vytvořen z vektoru $\nabla_2 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$, ve kterém jsou vynečány složky odpovídající parciálním derivacím podle u_t^j , $j \in \gamma_1$ a λ^j , $j \in M \cup J_2$. Potom libovolný subgradient z Clarkeova zobecněného gradientu složené funkce $\xi = \partial\Theta(\bar{\alpha}) = \partial\mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha}))$ dostaneme jako

$$\xi_i = \nabla_1 \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mathcal{S}(\bar{\alpha})) + \mathbf{\Xi}_i^T \mathbf{p}_i \in \partial\Theta(\bar{\alpha}).$$

Důkaz K důkazu stačí použít Teorém 2.1.3. \square

Poznámka 6.2.1 Námí navržený postup, který využívá aproximace kruhu pravidelným n -úhelníkem, lze použít pro případ, kdy koeficient tření \mathcal{F} je závislý na směru tečného posunutí u_t . Např. pokud máme koeficient tření \mathcal{F}_1 ve směru osy prvního a třetího kvadrantu a jiný koeficient tření \mathcal{F}_2 ve směru osy druhého a čtvrtého kvadrantu roviny $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0\}$, pak je možné použít náš postup pro $n = 4$. Navíc musíme vhodně nahradit \mathcal{F} v matici \mathbf{D} .

Kapitola 7

Závěr

V této práci jsme se zabývali řešením úlohy tvarové optimalizace s Coulombovým třením. Tuto úlohu jsme formulovali jako Matematický program s rovnovážným omezením (MPEC). Tento program vede k minimalizaci funkce, která není spojitě diferencovatelná. K této minimalizaci jsme použili metodu vhodnou pro nehladkou optimalizaci - bundle trust metodu. V úvodu práce jsme si zavedli nástroje pro práci s nehladkými funkcemi a diskutovali jsme některé možnosti řešení nehladkých problémů. Podrobněji jsme se seznámili s bundle trust metodou, kterou používáme pro naše úlohy. Dále jsme si formulovali kontaktní úlohu s Coulombovým třením, pro kterou provádíme tvarovou optimalizaci. Poté jsme se podívali na historický vývoj MPECů a jejich využití pro úlohy tvarové optimalizace. Poté jsme provedli citlivostní analýzu naší úlohy tvarové optimalizace, ve které řídíme tvar dvojrozměrného pružného tělesa. Náš přístup snadno umožňuje i volbu jiné řídicí proměnné, např. můžeme navrhovat v naší úloze koeficient tření \mathcal{F} . Tímto postupem bychom mohli navrhovat materiál, ze kterého je pružné těleso vyrobeno. Tyto úlohy v naší práci už neřešíme. V další části počítáme některé 2D úlohy tvarové optimalizace a u jejich řešení ověřujeme splnění podmínek optimality specifikovaných na začátku práce. V této práci jsme ověřili pseudostacionaritu a Clarkeovu stacionaritu u všech námi vyřešených příkladů. V některých případech jsme ověřili i Morduchovičovu stacionaritu. Na závěr jsme se zabývali návrhem řešení úloh 3D tvarové optimalizace kontaktních úloh s Coulombovým třením pro případ, kdy je stavová úloha vypočtena díky nahrazení kvadratických omezení jejich po částech lineární aproximací. V tuto chvíli již máme k dispozici i řešení 3D kontaktních úloh s Coulombovým třením, které je řešeno i bez této aproximace, tj. máme řešič pro „skutečnou“ 3D kontaktní úlohu s Coulombovým třením. Práce na řešení úlohy 3D tvarové optimalizace této stavové úlohy probíhají. Pro tento problém už Clarkeův nehladký kalkul není dost vhodný a pro řešení je vhodnější využít Morduchovičův kalkul. Cíle, které jsme si v úvodu práce stanovili se nám podařilo splnit. Navrhli a použili jsme numerickou metodu pro řešení úlohy tvarové optimalizace 2D kontaktní úlohy s Coulombovým třením. Také jsme navrhli postup pro řešení úlohy tvarové optimalizace 3D kontaktní úlohy s Coulombovým třením. Navržený postup je v budoucnu možno použít pro úlohy tvarové optimalizace 3D kontaktních úloh s Coulombovým anizotropním třením.

Literatura

- [1] V. BARBU, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston, 1984.
- [2] P. BEREMLIJSKI, *On Solving a Contact Problem with Coulomb Friction by Bundle Trust Method*, Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava, 1 (2001), pp. 11–20.
- [3] P. BEREMLIJSKI, J. HASLINGER, M. KOČVARA AND J. OUTRATA, *Optimization in Contact Problems with Coulomb Friction*, SIAM Journal on Optimization, 12/3 (2002), pp. 561 - 587.
- [4] D. P. BERTSEKAS *Nonlinear Optimization*, Athena Scientific, Belmont 1999.
- [5] F. H. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, 1983.
- [6] S. DEMPE, *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [7] Z. DOSTÁL, *Box constrained quadratic programming with proportioning and projections*, SIAM, 1997.
- [8] Z. DOSTÁL, J. HASLINGER AND R. KUČERA, *Implementation of fixed point method for duality based solution of contact problems with friction*, J. Comput. Appl. Math., 140, 1-2(2002).
- [9] Z. DOSTÁL, A. FRIEDLANDER AND S. A. SANTOS, *Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with simple bounds and equality constraints*, SIAM Journal on Optimization 13, 4 (2003), pp. 1120–1140.
- [10] Z. DOSTÁL AND V. VONDRÁK, *Duality based solution of contact problem with Coulomb friction*, Arch. Mech 49, 3 (1997), pp. 453–460.
- [11] Z. DOSTÁL, V. VONDRÁK AND J. RASMUSSEN, *Efficient algorithms for contact shape optimization*, International Series of Numerical Mathematics, 138, Basel, Switzerland, 2001.

- [12] C. ECK AND J. JARUŠEK, *Existence Results for the Static Contact Problem with Coulomb Friction*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 8/3 (1998), pp. 445–468.
- [13] C. ECK, J. JARUŠEK AND M. KRBEČ, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2005.
- [14] Y. M. ERMOLEV AND N. Z. SHOR, *On the Minimization of Non-Differentiable Functions*, Kibernetika, 3 (1967).
- [15] R. GLOWINSKI, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [16] F. HARTMANN, *The discrete Babuška-Brezzi condition*, Archive of Applied Mechanics 3 (1986), Springer Berlin/Heidelberg, pp. 221–228.
- [17] J. HASLINGER, Z. DOSTÁL, AND R. KUČERA, *Signorini problem with a given friction based on the reciprocal variational formulation*, in Nonsmooth/Nonconvex Mechanics: Modeling, Analysis and Numerical Methods, D. Y. Gao, R. W. Ogden, and G. E. Stavroulakis, eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [18] J. HASLINGER, R. KUČERA, AND Z. DOSTÁL, *An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with Coulomb friction*, Journal of Comput. and Applied Math., Elsevier (2004), pp. 387–408.
- [19] J. HASLINGER AND P. NEITTAANMÄKI, *Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design.*, second edition, J. Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [20] J. HASLINGER AND P. D. PANAGIOTOPOULOS, *The reciprocal variational approach to the Signorini problem with friction. Approximation results*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Sect. A, 98 (1984), pp. 365–383.
- [21] J. E. KELLEY, *The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs*, SIAM J., 8 (1960), pp. 703–712.
- [22] N. KIKUCHI AND J. T. ODEN, *Contact problems in elasticity*, SIAM Press, Philadelphia, 1988.
- [23] K. C. KIWIEL, *Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [24] S. KOBAYASHI, S. OH AND T. ALTAN, *Metal Forming and Finite Element Method*, Oxford University Press, New York-Oxford, 1989.
- [25] C. LEMARÉCHAL, *Nondifferentiable optimization*, Handbooks in Operations Research and Management Science, 1 (1989), Amsterdam.

- [26] J. L. LIONS, *Various topics in the theory of optimal control of distributed systems*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems 105 (1976), Springer-Verlag, Berlin, pp. 166–303.
- [27] Z.-Q. LUO, J.-S. PANG AND D. RALPH, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [28] V. S. MICHALEVIČ, A. M. GUPAL, V. I. NORKIN, *Metody nekonverxní optimalizace*, Moskva, 1987.
- [29] F. MIGNOT AND J. P. PUEL, *Optimal control in some variational inequalities*, SIAM J. Control Optimization 22 (1984), pp. 466–476.
- [30] J. M. ORTEGA AND W. C. RHEINBOLDT, *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [31] J. OUTRATA, *Mathematical programs with equilibrium constraints: Theory and numerical methods*, Spring Conference on Analysis, 2006.
- [32] J. OUTRATA, M. KOČVARA, AND J. ZOWE, *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints: Theory, Applications and Numerical Results*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1998.
- [33] J. OUTRATA, H. SCHRAMM AND J. ZOWE, *Bundle Trust Methods: Fortran Codes for Nondifferentiable Optimization - User's Guide*, Report No. 269, Universität Bayreuth, 1991.
- [34] H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformtion der Doppelintegrale*, Mathematische Annalen, 79 (1919), pp. 340–359.
- [35] R. T. ROCKAFELLAR, R. J.-B. WETS, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.
- [36] S. SCHOLTES, *Introduction to Piecewise Differential Equations*, Habilitation Thesis, Institut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie, Universität Karlsruhe, Germany, 1994.
- [37] H. SCHRAMM, *Eine Kombination von Bundle- und Trust-Region-Verfahren zur Lösung nichtdifferenzierbarer Optimierungsprobleme.*, Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 30, Universität Bayreuth, Germany, 1989.
- [38] H. SCHRAMM AND J. ZOWE, *A version of the bundle idea for minimizing a non-smooth function: conceptual idea, convergence analysis, numerical results*, SIAM J. on Optimization, 2 (1992), pp. 121–152.
- [39] N. Z. SHOR, *Application of the Gradient Method for the Solution of Network Transportation Problems*, Scientific Seminar on Theory and Application of Cybernetics and Operations Research, Academy of Sciences, Kiev, 1962.

- [40] H. F. v. STACKELBERG, *Marktform und Gleichgewicht*, Wien, 1934.
- [41] V. VONDRÁK, Z. DOSTÁL AND J. RASMUSSEN, *Duality based contact shape optimization*, ZAMM, Z. Angew. Math. Mech., 3 (2001).
- [42] P. WOLFE, *A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable convex functions*, Mathematical Programming Study, 2 (1975), pp. 145–173.
- [43] O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, 1971.