VŠB-Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Metody fiktivních oblastí v úlohách tvarové optimalizace

Ing. Tomáš Kozubek

Obor: Informatika a aplikovaná matematika
Školitel: Prof. RNDr. J. Haslinger, DrSc.

Ostrava, březen 2002

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli Prof. RNDr. J. Haslingerovi, DrSc. za velkou péči, kterou mi věnoval v průběhu celého doktorského studia. Také děkuji Prof. RNDr. Z. Dostálovi, CSc. a Mgr. P. Byczanskému za cenné rady při numerické realizaci.

Anotace

Tato práce sestává ze dvou částí. V první ukazujeme efektivnost užití metody fiktivních oblastí pro řešení eliptických okrajových úloh druhého řádu ve 2D i 3D. Její výhody spočívají v jednoduchosti implementace a v možnosti řešení výsledných soustav lineárních algebraických rovnic, které vznikají z konečně prvkové diskretizace, pomocí vysoce efektivních řešičů. V kapitole 1 jsou shrnuty základní výsledky z abstraktní teorie smíšených variačních úloh. Tyto užijeme v kapitole 2 k formulacím metody fiktivních oblastí, jež jsou založeny na užití hraničních (BLM) a distribuovaných (DLM) Lagrangeových multiplikátorů k řešení Dirichletovy okrajové úlohy ve 2D a 3D. Ve třetí kapitole popíšeme nový způsob řešení smíšené Dirichletovy-Neumannovy a čistě Neumannovy okrajové úlohy založený na její duální formulaci (vyjádření v gradientech) a na užití hraničních Lagrangeových multiplikátorů k realizaci předepsaných omezení. Prostor funkcí s nulovou divergencí je realizován pomocí proudových funkcí.

Cílem této práce bylo ukázat, že MFO je vhodná nejen k numerickému řešení okrajových úloh, ale i k realizaci úloh tvarové optimalizace (viz část II. a také [21],[23],[25],[26]). Její užití podstatně zvyšuje efektivnost vnitřní úrovně optimalizačního procesu, jelikož nemusíme vždy znovu konstruovat dělení nové oblasti a tudíž ani znovu sestavovat matici tuhosti. Za tyto výhody platíme tím, že výsledná úloha matematického programování je obecně nehladká. Vzniklé obtíže řešíme užitím algoritmu globální optimalizace MCRS, který užívá pouze hodnoty cenové funkce a nikoli její derivace. Navíc je snadno implementovatelný a velmi dobře paralelizovatelný.

Zmíněný přístup jsme užili v kapitole 5 k numerické realizaci úloh s volnou hranicí, tzv. Bernoulliových úloh. Úlohy tohoto typu vznikají v mechanice tekutin, při galvanizaci kovů, v elektrostatice apod. (viz [1],[10],[12]).

V závěru každé kapitoly (s vyjímkou první) uvádíme několik modelových úloh, jež se vztahují k problematice studované v dané kapitole.

Abstract

Fictitious domain methods represent nowadays an efficient tool for realizing complicated problems arising in physics and industry. The main reason for their popularity is that they allow us to transform the original problem defined in a domain ω with a complicated geometry to a new one solved in a simple shaped domain Ω containing ω. One can use fairly structured meshes in Ω making possible to use fast solvers and special preconditioning techniques. There are several ways how to associate the new problem in Ω with the original one defined in ω. For example one can use Lagrange multiplier technique, optimal control approach etc.

This thesis consists of two parts. In the first one, we present a family of fictitious domain methods (FDM) based on Lagrange multipliers defined on the boundary $\partial\omega$ (BLM-technique) or in the domain $\Xi := \Omega \setminus \overline{\omega}$ (DLM-technique) and forcing given boundary conditions to be satisfied. These approaches lead to the so-called mixed variational formulations. Their abstract setting and main existence, uniqueness and convergence results are mentioned in Chapter 1. They are used to describe BLM and DLM techniques for solving Dirichlet boundary value problems in 2D and 3D (see Chapter 2 and also [13],[22], [25],[42]). Chapter 3 deals with a new fictitious domain approach for the numerical realization of the mixed Dirichlet-Neumann and pure Neumann boundary value problems with the second order elliptic operators *without* the absolute term (see [23]). The original problem is firstly transformed into its *dual* form (in terms of gradients). This form is extended to a fictitious domain and the respective flux condition on $\partial\omega$ is released by means of boundary Lagrange multipliers. A mixed finite element approximation is based on the stream function formulation.

The main goal of this thesis is to illustrate the efficiency of FDM-solvers in shape optimization (see the second part of thesis and also [21],[23],[25],[26]). In Chapter 4 we present and analyze shape optimization problems utilizing FDM-solvers at the lower optimization level. The main advantage of FDM's is the fact that all computations are performed in a fixed, simple shaped domain Ω, using the *same partitions*, which are independent of the geometry of ω. Consequently the respective stiffness matrix also does not depend on ω. It can be computed and stored once for ever. On the other hand this approach has a disadvantage too. The minimized function may become only *directionally* but not *continuously* differentiable. To overcome this difficulty, the global optimization methods which are based only on function evaluations can be used. Here we use the stochastic type minimization algorithm called MCRS (Modified Controlled Random Search). Combination of a shape optimization technique with FDM-solvers is used for the numerical realization of Bernoulli's free-boundary problems in Chapter 5. These problems arise for example in ideal fluid dynamics, optimal insulation and electro-chemistry (see [1], [10], [12]).

At the end of each chapter several numerical examples illustrate the efficiency of techniques presented in the respective chapter.

Obsah

Značení

Množiny

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel;
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel;
$\mathbb{R}^1$	množina všech reálných čísel;
$\mathbb{R}^1_+$	množina všech nezáporných reálných čísel;
$\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1$ $(k\times)$;

Nechť $\omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ je oblast s Lipschitzovskou hranicí, pak označíme:

$\partial\omega$	hranice oblasti ω;
$\overline{\omega}$	uzávěr oblasti ω;
$\lvert\omega\rvert$ $(:= \text{meas}\ \omega)$	míra oblasti ω;

Lineární algebra

$\mathbf{x}$	vektor (sloupcový);
$\mathbb{A}$	matice;
$\mathbf{x}^T$	transpozice vektoru;
$\mathbb{A}^T$	transpozice matice;
$\mathbb{A}^{-1}$	inverze matice;

Diferenciální operátory

$\text{grad}\, u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$	gradient u;
$\text{curl}\, u = (\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1})$	zavířenost u;
$\text{div}\, u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$	divergence $u = (u_1, u_2)$;
$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$	Laplaceův operátor;

Konečně prvková diskretizace

$\mathcal{T}_h$	triangulace oblasti;
$\mathcal{R}_h$	rektangulace oblasti;
u_h, resp. $\hat{u}_h$	konečně prvkové řešení;

Prostory funkcí

$P_n(T)$	prostor polynomů nejvýše n-tého stupně na trojúhelníkovém elementu T;
$Q_1(R)$	prostor bilineárních, resp. trilineárních funkcí na obdélníkovém elementu R ve 2D, resp. kvádru ve 3D;
$C(\overline{\omega})$	prostor spojitých funkcí na ω a spojitě rozšiřitelných na $\overline{\omega}$;
$C^k(\overline{\omega})$	prostor funkcí, jejichž derivace až do řádu $k \in \mathbb{N}$ jsou spojité v ω a spojitě rozšiřitelné na $\overline{\omega}$;
$C^\infty(\omega) := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\omega})$;	
$C^{1,1}(I)$	prostor funkcí, jejichž 1. derivace je Lipschitzovská na intervalu I;
$L^p(\omega)$	prostor měřitelných funkcí na ω a lebesgueovsky integrovatelných s mocninou $p \geq 1$;
$L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$	prostor lokálně lebesgueovsky integrovatelných funkcí s mocninou $p \geq 1$ v $\mathbb{R}^2$;
$\Vert.\Vert_{L^p(\omega)}$	norma v prostoru $L^p(\omega)$;
$\Vert.\Vert_{L^2(\omega)}$ $(:= \Vert.\Vert_{0,\omega})$	norma v prostoru $L^2(\omega)$;
$(.,.)_{0,\omega}$	skalární součin funkcí z $L^2(\omega)$ (nebo $(L^2(\omega))^2$);
$H^k(\omega)$ $(k \in \mathbb{N})$	Sobolevův prostor funkcí, jež jsou společně se svými zobecněnými derivacemi až do řádu k integrovatelné s kvadrátem v ω;
$H^s(\omega)$ $(s \notin \mathbb{N},\ s > 0)$	Sobolevův prostor funkcí s necelou derivací;
$H^1_0(\omega)$	podprostor funkcí z $H^1(\omega)$ s nulovou stopou na $\partial\omega$;
$\Vert.\Vert_{H^1(\omega)}$ $(:= \Vert.\Vert_{1,\omega})$	norma v prostoru $H^1(\omega)$, kde $\Vert u\Vert_{H^1(\omega)} = \sqrt{\Vert u\Vert^2_{L^2(\omega)} + \Vert\, \vert\nabla u\vert\, \Vert^2_{L^2(\omega)}}$;
$\vert.\vert_{H^1(\omega)}$ $(:= \vert.\vert_{1,\omega})$	seminorma v prostoru $H^1(\omega)$;
$H(\mathrm{div}, \Omega)$	prostor funkcí kvadraticky integrovatelných v Ω, jejichž divergence ve smyslu distribucí je kvadraticky integrovatelná v Ω;
$H^{1/2}(\partial\omega)$	prostor stop na $\partial\omega$ funkcí z $H^1(\omega)$;
$H^{-1/2}(\partial\omega)$	duál k $H^{1/2}(\partial\omega)$;

Další symboly

$u\big\vert_{\omega}$	zúžení funkce u na oblast ω;
$\operatorname{supp} u$	nosič funkce u;
$\to$	silná konvergence;
$\rightharpoonup$	slabá konvergence;
$\rightrightarrows$	stejnoměrná konvergence;

Užité zkratky

BLM	metoda hraničních Lagrangeových multiplikátorů, varianta ve 2D, resp. 3D se značí BLM2D, resp. BLM3D (boundary Lagrange multiplier method);
DLM	metoda distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů, varianta ve 2D, resp. 3D se značí DLM2D, resp. DLM3D (distributed Lagrange multiplier method);
LBB-podmínka	Ladyženská-Babuška-Brezzi podmínka;
LM	Lagrangeův multiplikátor;
MFO	metoda fiktivních oblastí;
MFO-řešiče	řešiče užívající k numerické realizaci stavového problému metodu fiktivních oblastí;
o.p.	okrajové podmínky;

Předmluva

V poslední době je velká pozornost věnována studiu metod fiktivních oblastí (MFO). Tyto představují v současnosti velmi efektivní prostředek řešení složitých problémů objevujících se v teorii i v praxi. Hlavní důvod jejich popularity spočívá v možnosti přeformulovat původní úlohu, jež je definovaná na oblasti se složitou geometrií ω na úlohu novou, řešenou na tzv. fiktivní oblasti $\Omega \supset \overline{\omega}$, jejíž geometrie je jednoduchá a pravidelná (obdélník, kvádr apod.). Na tuto nově zformulovanou úlohu přitom klademe podmínku, aby její řešení zúžené na oblast ω bylo řešením původního problému. Na oblasti Ω můžeme použít speciální dělení, které nám umožní řešit výslednou soustavu algebraických rovnic pomocí rychlých řešičů a efektivních předpodmiňovacích technik.

MFO je rozvíjena ve dvou směrech. První z nich je čistě algebraický (viz [2],[3],[34]) a druhý funkcionálně analytický, o němž také pojednává tato práce. Jedny z prvních výsledků v tomto směru jsou popsány v [4], kde k realizaci Dirichletovy a Neumannovy okrajové úlohy byla užita *metoda optimálního řízení*. O něco později se objevily *metody založené na dualitě*. Tyto metody používají k realizaci okrajových podmínek na hranici reálné oblasti Lagrangeovy multiplikátory. V pracích [13],[22] byly použity *hraniční Lagrangeovy multiplikátory* (zkráceně BLM-metoda) k realizaci Dirichletovy okrajové podmínky a v pozdějších pracích [25],[42] byla uvedena a analyzována formulace MFO užívající *distribuované Lagrangeovy multiplikátory* (zkráceně DLM-metoda) pro řešení Dirichletovy a Neumannovy okrajové úlohy. V případě Neumannovy okrajové úlohy byl uvažován eliptický operátor druhého řádu *s absolutním členem*. Kombinace hraničních a distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů pro realizaci Dirichletovy okrajové úlohy byla nedávno publikována v [16]. Konečně v [18] byla užita metoda optimálního řízení kombinovaná s metodou hraničních Lagrangeových multiplikátorů k řešení smíšené Dirichletovy-Neumannovy okrajové úlohy.

Tato práce má 2 cíle: jednak teoreticky rozšířit MFO na řešení úloh obsahujících Neumannovu okrajovou podmínku pro eliptický diferenciální operátor druhého řádu *bez* absolutního členu za použití hraničních Lagrangeových multiplikátorů a prakticky ověřit všechny výše zmíněné varianty MFO (část I). Druhým cílem je ukázat, že MFO lze s úspěchem použít jakožto řešiče stavových úloh v tvarové optimalizaci (část II a také [21],[23],[25],[26]). Užití MFO zvyšuje efektivnost řešení vnitřní úrovně optimalizačního procesu (stavového problému) s možností paralelizace výpočtů na úrovni vnější (vlastní tvarová optimalizace). Přitom podstatně zjednodušuje implementaci celé úlohy. Abychom to ukázali, porovnáme tento přístup s přístupem klasickým, jenž je založen na postupné deformaci hranice oblasti. K získání nové konfigurace ω_{k+1} u klasického přístupu musíme udělat následující kroky (předpokládáme, že naše stavová úloha je lineární a že používáme klasickou metodu konečných prvků):

(i) provést diskretizaci nové oblasti;

(ii) sestavit novou matici tuhosti a vektor zatížení;

(iii) řešit novou soustavu lineárních algebraických rovnic.

Tyto kroky se opakují mnohokrát, z čehož vyplývá, že tento přístup nemusí být obecně příliš efektivní. Naopak, použijeme-li MFO, vyhneme se zcela kroku (i), jelikož pracujeme s *pevnou* sítí a částečně i kroku (ii), protože matice tuhosti zůstává stejná pro všechny konfigurace. Tento přístup přináší ovšem i jistou nevýhodu a to, že minimizovaná funkce nemusí být spojitě diferencovatelná, což znemožňuje užití klasických gradientních metod. Tuto nevýhodu ale snadno můžeme odstranit tím, že k hledání minima užijeme metody globální optimalizace jako jsou genetické algoritmy, simulované žíhání, řízené náhodné prohledávání, migrační algoritmy a další (viz např. [21]). Uvedené metody užívají pouze hodnoty cenové funkce a nikoli její derivace. Navíc jsou snadno implementovatelné a velmi dobře paralelizovatelné. V našem případě jsme užili algoritmus MCRS, který lze zařadit mezi metody řízeného náhodného prohledávání.

Zmíněný přístup můžeme s výhodou použít k numerické realizaci úloh s volnou hranicí. Ilustraci provedeme na tzv. Bernoulliově úloze. Úlohy tohoto typu vznikají v mechanice tekutin, při galvanizaci kovů, v elektrostatice apod. (viz [1],[10],[12]). Např. v elektrostatice se tak modeluje problém návrhu tvaru kondenzátoru, jehož jedna část hranice je předepsaná a druhá část se hledá tak, aby výsledné elektrostatické pole podél ní bylo konstantní. Takovýto typ problému může být s výhodou přeformulován na úlohu tvarové optimalizace, jejíž stavový problém je řešen užitím MFO (viz kapitolu 5 a [29]).

Tato práce sestává ze dvou částí. V první (kapitoly 1-3) se věnujeme užití metody fiktivních oblastí pro řešení eliptických okrajových úloh druhého řádu a ve druhé části (kapitoly 4-5) pak realizaci problémů tvarové optimalizace užívajících na vnitřní úrovni MFO. V kapitole 1 jsou shrnuty základní výsledky z abstraktní teorie smíšených variačních úloh. Těchto výsledků využijeme v kapitole 2 k definici BLM a DLM-metody k řešení Dirichletovy okrajové úlohy ve 2D i 3D. Třetí kapitola je věnována metodě hraničních Lagrangeových multiplikátorů k realizaci Dirichletovy-Neumannovy a čistě Neumannovy okrajové úlohy pro eliptickou rovnici 2. řádu bez absolutního členu a obsahuje nové teoretické výsledky. V kapitole 4 pojednáváme o vlastní tvarové optimalizaci. Uvádíme zde abstraktní formulaci problémů tvarové optimalizace využívající MFO k numerické realizaci stavové úlohy. Provádíme analýzu citlivosti a zmiňujeme výhody a nevýhody tohoto přístupu. Navíc popisujeme jednoduchý, v praxi osvědčený algoritmus MCRS, který využijeme k minimizaci cenové funkce. V kapitole 5 pak postupy z předchozí části práce aplikujeme na řešení Bernoulliho úloh s volnou hranicí. V závěru každé kapitoly (s vyjímkou první) ilustrujeme uvedenou problematiku na několika modelových příkladech.

Část I. Užití MFO k řešení stavových úloh

Tato část je věnována popisu a analýze MFO založených na užití Lagrangeových multiplikátorů za účelem splnění předepsaných okrajových podmínek. Tyto metody užijeme k řešení Dirichletovy (kapitola 2) a smíšené Dirichletovy-Neumannovy, resp. čistě Neumannovy (kapitola 3) okrajové úlohy. Formulace MFO užívající Lagrangeovy multiplikátory k realizaci okrajových podmínek vedou na tzv. *smíšenou variační úlohu* a proto v kapitole 1 stručně uvádíme základní výsledky z abstraktní teorie smíšených variačních formulací. Nejdříve si ukažme obecný princip MFO na řešení abstraktní okrajové úlohy.

Nechť ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega$. Na této oblasti uvažujme následující eliptickou okrajovou úlohu:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}\,u(\omega) = f & \text{v} \quad \omega, \quad \omega \subset \mathbb{R}^n, \\ + \text{ o.p.} & \text{na} \quad \partial\omega, \end{cases}$$

kde $\mathcal{A}$ je eliptický operátor 2. řádu, $u(\omega)$ je řešení $(\mathcal{P})$ a $f \in L^2(\omega)$.

Jak již bylo zmíněno, základní myšlenkou metody fiktivních oblastí je (viz obr. 2.1) vnořit oblast se složitou geometrií ω do oblasti s jednoduchou geometrií $\Omega := \Xi \cup \overline{\omega}$ a úlohu $(\mathcal{P})$ nahradit za úlohu

$$(\hat{\mathcal{P}}) \qquad \begin{cases} \hat{\mathcal{A}}\,\hat{u} = \tilde{f} & \text{v} \quad \Omega, \\ + \text{ o. p.} & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\hat{\mathcal{A}}$ je opět eliptický operátor 2. řádu, $\hat{u}$ je řešení $(\hat{\mathcal{P}})$ a $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ je vhodné rozšíření f z oblasti ω na Ω. Nová úloha $(\hat{\mathcal{P}})$ přitom musí být zvolena tak, aby její řešení zúžené na oblast ω bylo řešením původní úlohy $(\mathcal{P})$. Důvod, proč to děláme, je snadno vidět: oblast Ω může být vhodně rozdělena na konečné elementy, což nám umožní užít vysoce efektivní řešiče výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic.

1 Abstraktní teorie smíšených variačních formulací

Formulace MFO, jež užívají Lagrangeovy multiplikátory za účelem splnění okrajových podmínek, vedou na tzv. *smíšenou variační úlohu.* Z tohoto důvodu v této části nejprve ukážeme abstraktní tvar smíšené variační formulace a její aproximace a uvedeme nejdůležitější výsledky o existenci, jednoznačnosti a konvergenci řešení (podrobněji viz [7]).

Nechť V a Q jsou reálné Hilbertovy prostory a $\|.\|_V$, resp. $\|.\|_Q$ jejich normy. Dále nechť V' a Q' jsou odpovídající duální prostory a symboly $\langle .\,, .\rangle_{V' \times V}$, resp. $\langle .\,, .\rangle_{Q' \times Q}$ značí příslušné duality mezi prostory V a V', resp. Q a Q'. Označme ještě $a : V \times V \to \mathbb{R}$ a $b : V \times Q \to \mathbb{R}$ dvě *omezené* bilineární formy, t.j.:

$$(1.1) \qquad \exists M = konst. > 0 : \ |a(u, v)| \le M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V;$$

$$(1.2) \qquad \exists m = konst. > 0 : \ |b(v, q)| \le m \|u\|_V \|q\|_Q \quad \forall (v, q) \in V \times Q$$

a konečně nechť $f \in V'$ a $g \in Q'$ jsou dány.

Smíšenou variační formulací určenou daty $\{V, Q, a, b, f, g\}$ pak míníme následující úlohu:

$$(\hat{\mathcal{P}}_a) \qquad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } (u,\lambda) \in V \times Q \textit{ takové, že} \\ a(u,v) + b(v,\lambda) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \\ b(u,q) = [g,q]_{Q' \times Q} \quad \forall q \in Q. \end{cases}$$

K zajištění existence a jednoznačnosti řešení (u, λ) problému $(\hat{\mathcal{P}}_a)$ pro libovolné $(f, g) \in V' \times Q'$ postačují následující dva předpoklady:

$$(1.3) \qquad \exists \alpha = konst. > 0 : \ a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V;$$

$$(1.4) \qquad \exists \beta = konst. > 0 : \ \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q.$$

Potom platí

Věta 1.1 *Nechť jsou splněny podmínky* (1.1)–(1.4). *Potom* $(\hat{\mathcal{P}}_a)$ *má jediné řešení* (u, λ) *pro libovolné* $(f, g) \in V' \times Q'$.

Důkaz. Viz. [7]. □

Poznámka 1.1 Podmínky (1.3) a (1.4) mohou být ještě dále zeslabeny. Opět viz [7].

K diskretizaci problému $(\hat{\mathcal{P}}_a)$ použijeme *smíšenou metodu konečných prvků*. Prostory V a Q budou nahrazeny svými konečně dimenzionálními podprostory V_h a Q_h, na kterých uvažujeme úlohu:

$$(\hat{\mathcal{P}}_a)_h \qquad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } (u_h,\lambda_h) \in V_h \times Q_h \textit{ takové, že} \\ a(u_h,v_h) + b(v_h,\lambda_h) = \langle f, v_h \rangle_{V' \times V} \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h,q_h) = [g,q_h]_{Q' \times Q} \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases}$$

K zajištění existence a jednoznačnosti řešení (u_h, λ_h) problému $(\hat{\mathcal{P}}_a)_h$ stačí splnit následující předpoklad označovaný jako *podmínka stability*:

$$(1.5) \qquad b(v_h, q_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \Longrightarrow q_h = 0.$$

Z (1.5) plyne, že existuje konstanta $\beta_h > 0$, obecně závislá na diskretizačním parametru h taková, že

$$\sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(v_h,q_h)}{\|v_h\|_V} \geq \beta_h \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h.$$

K zajištění konvergence řešení úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_a)_h$ k řešení $(\hat{\mathcal{P}}_a)$ pro $h \to 0+$ potřebujeme ovšem silnější předpoklad a sice splnění *Ladyženské-Babušky-Brezziho (LBB)-podmínky*:

$$
(1.6) \qquad \exists \beta_0 = konst. > 0: \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} \geq \beta_0 \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h, \ \forall h \to 0+,
$$

kde $\beta_0 > 0$ je nezávislá na h, t.j. konstanta β_h z (1.5) je omezená zdola konstantou β_0.

Konvergenční výsledek je shrnut v následující větě:

Věta 1.2 *Nechť jsou splněny podmínky* (1.1)–(1.4) *a* (1.6). *Dále předpokládejme, že systémy* $\{V_h\}$ *a* $\{Q_h\}$, $h \to 0+$ *jsou husté ve* V *a* Q. *Potom posloupnost řešení* $\{(u_h, \lambda_h)\}$ *úloh* $(\hat{\mathcal{P}}_a)_h$ *konverguje k řešení* (u, λ) *problému* $(\hat{\mathcal{P}}_a)$*:*

$$
\begin{aligned}
u_h &\to u \quad ve\ V; \\
\lambda_h &\to \lambda \quad v\ Q, \ h \to 0+
\end{aligned}
$$

a platí:

$$
\|u - u_h\|_V + \|\lambda - \lambda_h\|_Q \leq C\{\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{\xi_h \in Q_h} \|\lambda - \xi_h\|_Q\},
$$

přičemž konstanta C *nezávisí na* h.

Nyní pro pevně danou hodnotu parametru h zformulujeme algebraický tvar úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_a)_h$. Nechť $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ a $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, $n = \dim V_h$, $m = \dim Q_h$ jsou systémy bázových funkcí prostorů V_h a Q_h. Pak $(\hat{\mathcal{P}}_a)_h$ vede na následující soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$
(1.7) \qquad \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix},
$$

kde $\mathbf{u}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ jsou souřadnice funkcí u_h a λ_h vzhledem k bázím $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ a $\{\psi_j\}_{j=1}^m$. Navíc prvky matic $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou definovány následovně:

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= a(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, n; \\
b_{kj} &= b(\varphi_j, \psi_k), \quad j = 1, \dots, n; \ k = 1, \dots, m.
\end{aligned}
$$

V následujících dvou kapitolách užijeme výsledky této části k popisu a analýze jednotlivých typů MFO založených na užití Lagrangeových multiplikátorů k řešení Dirichletovy, smíšené Dirichletovy-Neumannovy a čistě Neumannovy okrajové úlohy.

2 Dirichletova okrajová úloha

V odstavcích 2.1, resp. 2.2 jsou uvedeny varianty MFO založené na hraničních a distribuovaných Lagrangeových multiplikátorech k řešení Dirichletovy okrajové úlohy. V odstavci 2.3 pak ilustrujeme jejich užití na několika modelových příkladech ve 2D i 3D. Podrobný popis a analýzu těchto metod můžeme najít v [13], resp. v [25],[42]. Z důvodu jednoduchosti výkladu se v následujícím omezíme na homogenní Poissonovu úlohu ve **2D**:

$$(\mathcal{P})' \qquad \begin{cases} -\triangle u = f \quad \text{v} \quad \omega, \quad f \in L^2(\omega) \\ \quad u = 0 \quad \text{na} \quad \partial\omega \end{cases}$$

nebo ve slabé formulaci:

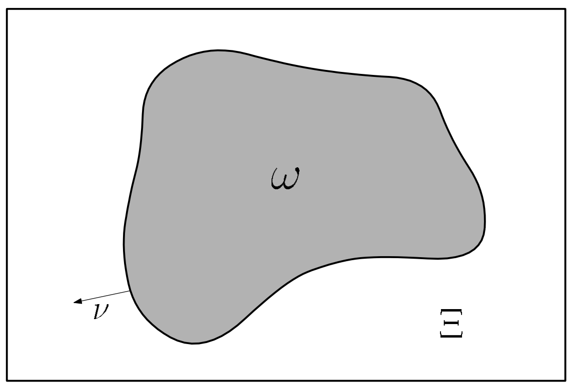
$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } u \in H_0^1(\omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

Změny, které je nutno provést v případě, že máme předepsanou nehomogenní Dirichletovu okrajovou podmínku, jsou zmíněny v poznámce 2.5, resp. 2.8. Nyní uvedeme dva konkrétní způsoby odvození úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$ z $(\mathcal{P})$ užitím hraničních a distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů.

2.1 BLM-metoda

Tato část je věnována popisu a analýze MFO založené na hraničních Lagrangeových multiplikátorech (zkráceně BLM-metoda) k realizaci předepsané Dirichletovy okrajové podmínky na $\partial\omega$.

Nechť Ω je fiktivní oblast obdélníkového tvaru obsahující $\overline{\omega}$ (viz obr. 2.1). Dále



Obr. 2.1

označme

$$H^{1/2}(\partial\omega) = \{\varphi \in L^2(\partial\omega) |\ \exists v \in H^1(\omega) : \ \varphi = v \text{ na } \partial\omega\}$$

prostor stop na $\partial\omega$. Je známo, že $H^{1/2}(\partial\omega)$ je Banachův prostor s normou

$$\|\varphi\|_{1/2,\partial\omega} = \inf_{\substack{v \in H^1(\omega) \\ v = \varphi \text{ na } \partial\omega}} \|v\|_{1,\omega}$$

a $H^{-1/2}(\partial\omega)$ buď odpovídající duální prostor. Definujme Lagrangian $\mathcal{L} : \ V \times \Lambda \to \mathbb{R}^1$ následovně:

$$\mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2 \, dx - \int_\Omega \tilde{f} v \, dx - \langle \mu, v \rangle,$$

kde $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ je takové, že $\tilde{f}_{|_\omega} = f$, symbol $\langle .,. \rangle$ označuje dualitu mezi prostory $\Lambda := H^{-1/2}(\partial\omega)$ a $H^{1/2}(\partial\omega)$ a V je uzavřený podprostor z $H^1(\Omega)$. Typické volby prostoru V jsou: $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ nebo

$$H_P^1(\Omega) = \{v \ | \quad v \in H^1(\Omega), \ v \text{ je periodická na } \partial\Omega\}.$$

V této části použijeme $V := H_0^1(\Omega)$. Prostor Lagrangeových multiplikátorů Λ zde zavádíme proto, abychom dosáhli splnění požadavku, že $\hat{u}_{|_\omega}$ řeší $(\mathcal{P})$. Nyní místo úlohy $(\mathcal{P})$ budeme uvažovat následující úlohu sedlového bodu:

$$(\hat{\mathcal{P}}_B)' \qquad \left\{ \begin{array}{c} \textit{Najdi } (\hat{u},\lambda) \in V \times \Lambda \textit{ takové, že} \\ \mathcal{L}(\hat{u},\mu) \le \mathcal{L}(\hat{u},\lambda) \le \mathcal{L}(v,\lambda) \quad \forall (v,\mu) \in V \times \Lambda \end{array} \right.$$

nebo ekvivalentně:

$$(\hat{\mathcal{P}}_B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\hat{u},\lambda) \in V \times \Lambda \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u} \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\Omega \tilde{f} v \, dx + \langle \lambda, v \rangle \quad \forall v \in V, \\ \langle \mu, \hat{u} \rangle = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right.$$

Vztah mezi problémy $(\mathcal{P})$ a $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ plyne z

Věta 2.1 *Problém $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ má jediné řešení $(\hat{u},\lambda) \in V \times \Lambda$. Navíc $\lambda = [\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}]$ je skok normálové derivace $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}$ na $\partial\omega$ a $\hat{u}_{|_\omega}$ řeší $(\mathcal{P})$ (přitom orientace vnější normály ν je patrna z obr. 2.1).*

Důkaz. Nechť u_1 a u_2 jsou řešení následujících homogenních Dirichletových okrajových úloh $(\mathcal{P})_1$ a $(\mathcal{P})_2$:

$$(\mathcal{P})_1 \left\{ \begin{array}{rcl} -\triangle u_1 &=& f \; (= \tilde{f}_{|_\omega}) \text{ v } \omega; \\ u_1 &=& 0 \text{ na } \partial\omega, \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P})_2 \left\{ \begin{array}{rcl} -\triangle u_2 &=& \tilde{f}_{|_\Xi} \text{ v } \Xi; \\ u_2 &=& 0 \text{ na } \partial\Xi, \end{array} \right.$$

kde $\Xi = \Omega \setminus \overline{\omega}$. Definujme funkci

$$\hat{u} = \left\{ \begin{array}{ll} u_1 & \text{v } \omega, \\ u_2 & \text{v } \Xi \end{array} \right.$$

a prostor

$$V_0 = \{ v \in H_0^1(\Omega) \mid \quad v = 0 \text{ na } \partial\omega \}.$$

Zřejmě $\hat{u} \in V_0$ a užitím Greenovy věty dostaneme:

$$(2.1) \qquad (\operatorname{grad} \hat{u}, \operatorname{grad} v)_{0,\Omega} = (\tilde{f}, v)_{0,\Omega} + \langle \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, v \rangle + \langle -\frac{\partial u_2}{\partial \nu}, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

přičemž znaménko '-' v posledním členu je důsledkem orientace ν. Je jednoduché ukázat, že zobrazení

$$v \longmapsto \langle \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, v \rangle + \langle -\frac{\partial u_2}{\partial \nu}, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

definuje lineární spojitý funkcionál na $H^{1/2}(\partial\omega)$, který označíme $\lambda \in H^{-1/2}(\partial\omega)$:

$$(2.2) \qquad \langle \lambda, v \rangle := \langle \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, v \rangle + \langle -\frac{\partial u_2}{\partial \nu}, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Z toho a z (2.1) vidíme, že $(\hat{u},\lambda)$ splňuje první rovnici v $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ a druhou pak splňuje proto, že $\hat{u} = 0$ na $\partial\omega$. Dokázali jsme tedy, že $(\hat{u}, \lambda)$, kde $\lambda = [\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}]$, je řešením úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_B)$. Problém $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ má tedy alespoň jedno řešení. Na druhé straně, pokud $(\hat{w}, \mu)$ je jiné řešení $(\hat{\mathcal{P}}_B)$, pak opačným postupem dostaneme, že $\hat{w}\big|_{\omega} = u_1$, $\hat{w}\big|_{\Xi} = u_2$, kde u_i řeší úlohu $(\mathcal{P})_i$,$i = 1, 2$ a $\mu = [\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}]$. Protože každý z problémů $(\mathcal{P})_i$,$i = 1, 2$ má jediné řešení, je $(\hat{w}, \mu) = (\hat{u}, \lambda)$ a problém $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ má tudíž jediné řešení. $\square$

Existenci a jednoznačnost řešení úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ můžeme také jednoduše obdržet přímo z věty 1.1, protože problém $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ je speciálním případem úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_a)$ s následující volbou dat:

$$V = H_0^1(\Omega), \quad Q = H^{-1/2}(\partial\omega), \quad a(u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx,$$

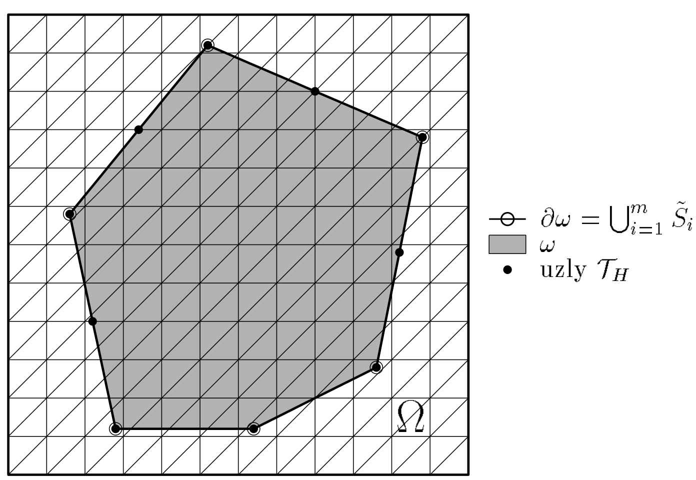
$$b(v, q) = -\langle q, v \rangle, \quad \langle f, v \rangle_{V' \times V} = \int_\Omega \tilde{f} v \, dx, \quad g \equiv 0, \quad u, v \in V, \ q \in Q,$$

Poznámka 2.1 (*velmi důležitá*) Rozšíříme-li funkci f nulou z ω na celou fiktivní oblast Ω, pak $\hat{u} = 0$ v Ξ a tudíž $\lambda = [\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ na $\partial\omega$.

Poznámka 2.2 Úloha $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ představuje modelování průhybu membrány upevněné v rámečku tvořeném hranicí fiktivní oblasti Ω, kde $\tilde{f}$ představuje zatížení membrány v kolmém směru a $\hat{u}$ její průhyb. Lagrangeovy multiplikátory mají význam sil koncentrovaných na $\partial\omega$, jež zabraňují deformaci membrány na $\partial\omega$ a tím zároveň realizují homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku.

Nyní přejděme k aproximaci úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_B)$. K tomuto účelu použijeme smíšenou metodu konečných prvků zmíněnou v předchozí kapitole, kdy nahradíme prostory V a Λ konečně dimenzionálními podprostory V_h a Λ_H. Jedna z možných konstrukcí těchto podprostorů bude popsána níže.

Nechť $\mathcal{T}_h$ je stejnoměrná triangulace oblasti $\overline{\Omega}$ (viz obr. 2.2), kterou zkonstruu-



Obr. 2.2

jeme následovně: fiktivní oblast Ω nejdříve rozdělíme na čtverce s krokem h a každý čtverec podél jedné z diagonál ještě na dva stejné trojúhelníky. Toto dělení $\overline{\Omega}$ společně s vhodným očíslováním uzlů nám umožní užít rychlé řešiče k nalezení řešení výsledných soustav lineárních algebraických rovnic. Pro dané $\mathcal{T}_h$ zkonstruujeme prostor

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) \mid \quad v_h|_T \in P_1(T) \ \ \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega\},$$

t.j. V_h obsahuje všechny spojité, po částech lineární funkce nulující se na $\partial\Omega$. V dalším textu z důvodu jednoduchosti budeme předpokládat, že ω je *polygonální oblast*. Obecný případ s hladkou hranicí je analyzován v [13]. Hranice $\partial\omega$ se dá psát ve tvaru: $\partial\omega = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{S}_i$, kde $\tilde{S}_i$ jsou jednotlivé strany polygonu $\partial\omega$ (viz obr. 2.2). Rozdělme každý úsek $\tilde{S}_i$ na přímé části S_k, které nemusí být nutně stejné délky, ale platí pro ně, že $3h \le |S_k| \le Lh$, kde L je pevně dáno a $|S_k|$ značí délku S_k. Nechť $H = \max_k |S_k|$ a $\mathcal{T}_H$ značí systém všech takových $\{S_k\}_{k=1}^{m(H)}$ (opět viz obr. 2.2). Nyní již můžeme definovat prostor

$$\Lambda_H = \{\mu_H \in L^2(\partial\omega) \mid \quad \mu_H|_S \in P_0(S) \quad \forall S \in \mathcal{T}_H\},$$

t.j. Λ_H je prostor po částech konstantních funkcí na $\mathcal{T}_H$.

Aproximací problému $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ rozumíme následující úlohu:

$$(\hat{\mathcal{P}}_B)_{hH} \quad \begin{cases} \textit{Najdi } (\hat{u}_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u}_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_\Omega \tilde{f} v_h \, dx + \int_{\partial\omega} \lambda_H v_h \, ds \quad \forall v_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_{\partial\omega} \mu_H \hat{u}_h \, ds = 0 \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H. \end{cases}$$

K zajištění existence a jednoznačnosti řešení problému $(\hat{\mathcal{P}}_B)_{hH}$ potřebujeme podmínku stability (1.5), jež v tomto případě má tvar:

$$\int_{\partial\omega} \mu_H v_h \, ds = 0 \quad \forall v_h \in V_h \Longrightarrow \mu_H = 0.$$

Lze ukázat, že tato podmínka je splněna, pokud je poměr H/h dostatečně velký. To znamená, že norma dělení $\mathcal{T}_H$ užitého pro definici hraničních Lagrangeových multiplikátorů musí být větší než norma dělení $\mathcal{T}_h$ užitého pro konstrukci prostoru V_h (viz [13]).

Pokud je poměr $3 \le H/h \le L$ (opět viz [13]), kde L je pevně dáno, pak kromě výše zmíněné podmínky stability je splněna i následující LBB-podmínka:

$$\sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\partial\omega} \mu_H v_h \, ds}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \ge \beta_0 \|\mu_H\|_{-1/2,\partial\omega} \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H$$

pro nějaké $\beta_0 > 0$ nezávislé na h a H. Jak víme, LBB-podmínka zajišťuje konvergenci řešení úloh $(\hat{\mathcal{P}}_B)_{hH}$ k řešení úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ pro $h, H \to 0+$. Řád konvergence posloupnosti $\{(\hat{u}_h, \lambda_H)\}$ k $(\hat{u}, \lambda)$ je studován v [13], kde je dokázána

Věta 2.2 *Nechť $3 \le H/h \le L$. Pak platí, že*

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\lambda - \lambda_H\|_{-1/2,\partial\omega} = \mathcal{O}(h^{1/2-\varepsilon}), \quad h \to 0+$$

pro každé $\varepsilon > 0$ *a za předpokladu, že* $\hat{u}_{|_\omega} \in H^2(\omega)$ *a* $\hat{u}_{|_\Xi} \in H^2(\Xi)$.

Odhad chyby ve větě 2.2 není optimální, protože řešení $\hat{u}$ není obecně hladké na celé fiktivní oblasti Ω a proto můžeme očekávat pouze to, že $\hat{u} \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$ pro libovolně malé $\varepsilon > 0$. Z předchozí věty plyne, že posloupnost $\{\lambda_H\}$ konverguje k $\lambda = [\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}]$ pouze v normě $H^{-1/2}(\partial\omega)$. V [28] je ovšem ukázáno, že použijeme-li techniku regularizace, *bude* $\{\lambda_H\}$ *konvergovat k* λ *dokonce i v prostoru* $L^2(\partial\omega)$, *pokud* $\lambda \in L^2(\partial\omega)$.

Poznámka 2.3 Na funkci $u_h := \hat{u}_{h|_\omega}$ můžeme pohlížet jako na aproximaci řešení původní úlohy $(\mathcal{P})$ formulované na ω s tím, že předepsaná homogenní Dirichletova okrajová podmínka je splněna pouze ve slabém smyslu:

$$\int_S \hat{u}_h \, ds = 0 \quad \forall S \in \mathcal{T}_H.$$

Maticová formulace úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_B)_{hH}$ vede na soustavu lineárních algebraických rovnic typu (1.7), kde $\mathbb{A}$ představuje *matici tuhosti*, $\mathbb{B}$ *je matice transformace*, $\mathbf{F}$ je *vektor zatížení* a $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\lambda}$ jsou vektory uzlových hodnot $\hat{u}_h$ a $-\lambda_H$! Vektor $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ v případě předepsané homogenní Dirichletovy okrajové podmínky na $\partial\omega$.

Prvky matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a vektoru $\mathbf{F}$ se počítají následovně:

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \int_\Omega \operatorname{grad} \varphi_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dx, \ i,j = 1,\dots,n; \ n = \dim V_h, \\
b_{kj} &= \int_{S_k} \varphi_j \, ds, \ S_k \in \mathcal{T}_H, \ k = 1,\dots,m; \ j = 1,\dots,n; \ m = \dim \Lambda_H, \\
f_j &= \int_\Omega \tilde{f} \varphi_j \, dx, \ j = 1,\dots,n,
\end{aligned}$$

kde $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ jsou Courantovy bázové funkce V_h. K výpočtu integrálů můžeme s výhodou použít numerickou integraci (viz odstavec 2.3).

Poznámka 2.4 (*velmi důležitá*) Informace o geometrii reálné oblasti ω je obsažena pouze v matici transformace $\mathbb{B}$ (eventuelně ve vektoru zatížení $\mathbf{F}$), *ale ne* v matici tuhosti $\mathbb{A}$. Závislost $\mathbf{F}$ na ω závisí na tom, jak je funkce f rozšířena na celou fiktivní oblast Ω.

Efektivní způsob řešení úlohy (1.7) spočívá v eliminaci vektoru $\mathbf{u}$, čímž dostaneme následující soustavu lineárních algebraických rovnic pro druhou složku $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T\,\boldsymbol{\lambda} = \mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbf{F}.$$

Tuto soustavu řešíme *metodou sdružených gradientů*. Zde je třeba upozornit, že velikost matice $\mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T$ je mnohem menší než velikost $\mathbb{A}$. Dále násobení maticí $\mathbb{A}^{-1}$ může být efektivně zrealizováno užitím Choleského faktorizace nebo pomocí rychlých řešičů založených na *Fourierově analýze* a *cyklické redukci* (pro popis těchto metod viz [27],[40],[41]). Navíc k matici $\mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T$ můžeme sestrojit výkonné předpodmiňovače (viz např. [18]).

Poznámka 2.5 Máme-li předepsanou nehomogenní Dirichletovu okrajovou podmínku $u = g$ na hranici $\partial\omega$, kde $g \in H^{1/2}(\partial\omega)$, pak musíme nahradit druhou rovnici v úloze $(\hat{\mathcal{P}}_B)$, resp. $(\hat{\mathcal{P}}_B)_{hH}$ za rovnici

$$\langle \mu, \hat{u} - g \rangle = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda,$$

resp.

$$\int_{\partial\omega} \mu_H \hat{u}_h \, ds = \int_{\partial\omega} \mu_H g \, ds \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H.$$

V pravé straně soustavy lineárních algebraických rovnic (1.7) se pak vyskytuje vektor $\mathbf{G}$ se složkami

$$g_k = \int_{S_k} g \, ds, \;\; S_k \in \mathcal{T}_H, \;\; k = 1, \ldots, m; \;\; m = \dim \Lambda_H.$$

K výpočtu integrálů můžeme opět použít numerickou integraci.

2.2 DLM-metoda

Tato část je věnována popisu a analýze variantě MFO založené tentokráte na použití distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů (zkráceně DLM-metoda) a užité opět k řešení homogenní Dirichletovy okrajové úlohy $(\mathcal{P})$. Změny, které je nutno provést, máme-li předepsanou nehomogenní Dirichletovou okrajovou podmínku, jsou uvedeny v poznámce 2.8. Tento typ MFO je podrobně studován v [25]. V teoretické části se opět omezíme na 2D případ.

Označme

$$V(\Xi) = \{ v \in H^1(\Xi) \;\; | \quad \exists z \in H_0^1(\Omega) : \;\; v = z_{|_\Xi} \}$$

prostor restrikcí všech funkcí z $H_0^1(\Omega)$ na Ξ a nechť $\Lambda := V'(\Xi)$ je odpovídající duální prostor. Na předepsanou homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku na $\partial\omega$ opět pohlížíme jako na omezení, které budeme realizovat pomocí Lagrangeových multiplikátorů z prostoru $V'(\Xi)$. Definujme Lagrangian $\mathcal{L} : \;\; H_0^1(\Omega) \times \Lambda \to \mathbb{R}^1$ vztahem:

$$\mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\operatorname{grad} v|^2 \, dx - \int_\Omega \tilde{f} v \, dx - \langle \mu, v \rangle,$$

kde $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ je takové, že $\tilde{f}_{|_\omega} = f$ a symbol $\langle ., . \rangle$ označuje dualitu mezi prostory Λ a $V(\Xi)$.

Nyní místo úlohy $(\mathcal{P})$ uvažujme smíšenou formulaci:

$$(\hat{\mathcal{P}}_D) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad \textit{Najdi } (\hat{u}, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u} \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\Omega \tilde{f} v \, dx + \langle \lambda, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \langle \mu, \hat{u} \rangle = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right.$$

Vztah mezi problémy $(\mathcal{P})$ a $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ plyne z

Věta 2.3 *Problém* $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ *má jediné řešení* $(\hat{u}, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda$ *a* $\hat{u}_{|_\omega}$ *je řešením původní úlohy* $(\mathcal{P})$.

Důkaz. K důkazu existence a jednoznačnosti úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ užijeme větu 1.1. Položme ve formulaci $(\hat{\mathcal{P}}_a)$: $V = H_0^1(\Omega)$ a $Q = \Lambda$. Vidíme, že podmínky (1.1)–(1.3) jsou triviálně splněny. K ověření podmínky (1.4) vezměme libovolné $w \in V(\Xi)$. Potom stopa funkce w na $\partial\omega$ může být spojitě rozšířena z hranice $\partial\omega$ dovnitř ω, t.j. můžeme zkonstruovat funkci $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$ takovou, že $\tilde{w}_{|_\Xi} = w$ a současně

$$\exists \beta = konst. > 0 : \; \|\tilde{w}\|_{1,\Omega} \leq \beta \|w\|_{1,\Xi}, \tag{2.3}$$

kde β nezávisí na w. Označme $\tilde{V}(\Xi)$ podprostor $H_0^1(\Omega)$, jehož prvky jsou právě popsaná spojitá rozšíření z Ξ do Ω funkcí, jež patří do $V(\Xi)$. Potom z (2.3) plyne:

$$\sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\langle \mu, v \rangle}{\|v\|_{1,\Omega}} \geq \sup_{\substack{\tilde{w} \in \tilde{V}(\Xi) \\ \tilde{w} \neq 0}} \frac{\langle \mu, \tilde{w} \rangle}{\|\tilde{w}\|_{1,\Omega}} \geq \frac{1}{\beta} \sup_{\substack{w \in V(\Xi) \\ w \neq 0}} \frac{\langle \mu, w \rangle}{\|w\|_{1,\Xi}} := \frac{1}{\beta} \|\mu\|_*,$$

kde $\|.\|_*$ je norma v prostoru Λ.

Nyní ještě ukažme, že $u := \hat{u}_{|_\omega}$ řeší $(\mathcal{P})$. Uvažujeme-li v první rovnici v $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ testovací funkce $v \in H_0^1(\Omega)$ takové, že $\operatorname{supp} v \subset \overline{\omega}$, dostaneme:

$$\int_\omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\omega f v \, dx,$$

t.j. $-\triangle u = f$ v ω. Z druhé rovnice $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ pak vidíme, že $\hat{u} \equiv 0$ v Ξ a tedy $u = 0$ na hranici $\partial\omega$. Z toho okamžitě plyne, že $\hat{u}_{|_\omega} \in H_0^1(\omega)$ řeší $(\mathcal{P})$. □

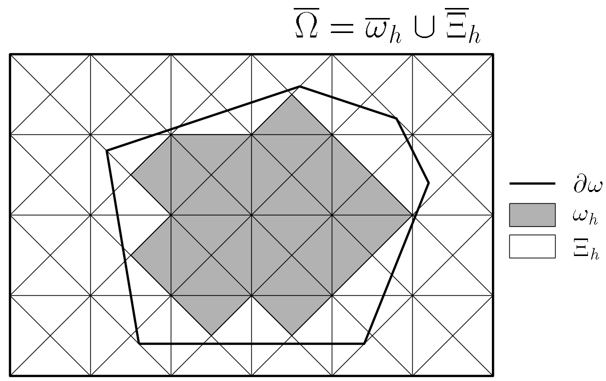
Poznámka 2.6 $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ představuje modelování průhybu membrány upevněné v pevném rámečku tvořeném hranicí fiktivní oblasti Ω. Lagrangeovy multiplikátory mají v tomto případě význam fiktivních sil působících na oblasti Ξ, jež zabraňují deformaci membrány na celé této oblasti a tím zároveň realizují zadanou homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku na hranici $\partial\omega$.

Přejděme nyní k aproximaci smíšené variační formulace $(\hat{\mathcal{P}}_D)$. Nejdříve zkonstruujeme konečně dimenzionální podprostory V_h a Λ_H a to následovně: rozdělíme fiktivní oblast Ω na čtverce s krokem h a pak ještě každý čtverec pomocí diagonál na 4 stejné trojúhelníky (viz obr. 2.3). Toto dělení označíme $\mathcal{T}_h$ a definujeme na něm prostor

$$V_h = \{ v_h \in C(\overline{\Omega}) \;\; | \;\; v_{h|_T} \in P_1(T) \;\; \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega \},$$

t.j. V_h obsahuje všechny spojité, po částech lineární funkce na $\mathcal{T}_h$ a nulové na $\partial\Omega$. Nechť $\mathcal{T}_H$ je další dělení fiktivní oblasti $\overline{\Omega}$ takové, že triangulace $\mathcal{T}_h$ užitá ke konstrukci prostoru V_h je jeho zjemněním, t.j. každý element $T \in \mathcal{T}_H$ je sjednocením konečného počtu trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$. Označme:

$$V_H = \{ v_H \in C(\overline{\Omega}) \;\; | \;\; v_{H|_T} \in P_1(T) \;\; \forall T \in \mathcal{T}_H, \quad v_H = 0 \text{ na } \partial\Omega \}$$



Obr. 2.3

prostor všech spojitých, po částech lineárních funkcí na $\mathcal{T}_H$ a nulujících se na $\partial\Omega$. Buď dále Λ_H prostor restrikcí všech funkcí z V_H na oblast Ξ, t.j.

$$\Lambda_H := V_H\big|_{\Xi}.$$

Prostor Λ_H je přirozenou diskretizací Λ.

Aproximace smíšené variační formulace $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ je definována následovně:

$$(\hat{\mathcal{P}}_D)_{hH} \qquad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } (\hat{u}_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_H \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u}_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_\Omega \tilde{f} v_h \, dx + \int_\Xi \lambda_H v_h \, dx \\ \hfill \forall v_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_\Xi \mu_H \hat{u}_h \, dx = 0 \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H. \end{cases}$$

K zajištění existence a jednoznačnosti řešení úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_D)_{hH}$ je nutné splnění podmínky stability (1.5). Tato podmínka je ovšem vzhledem k naší volbě prostoru Λ_H splněna automaticky, protože $\Lambda_H \subset V_h\big|_{\Xi}$ a tudíž pro libovolné $\mu_H \in \Lambda_H$ platí:

$$\int_\Xi \mu_H \, v_h \, dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h \Longrightarrow \mu_H = 0 \text{ v } \Xi.$$

Na funkci $u_h := \hat{u}_h\big|_{\omega}$ můžeme pohlížet jako na aproximaci řešení původní úlohy $(\mathcal{P})$ formulované na ω s předepsanou homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou splněnou pouze v následujícím integrálním smyslu:

$$\int_\Xi \mu_H \hat{u}_h \, dx = 0 \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H.$$

V případě, že zvolíme $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_h$ (a píšeme $H = h$), plyne z druhé rovnice v úloze $(\hat{\mathcal{P}}_D)_{hH}$, že $\hat{u}_h \equiv 0$ na celé oblasti Ξ. Poněvadž řešení $\hat{u}_h$ je po částech lineární na $\mathcal{T}_h$, nuluje se nejenom v oblasti Ξ, ale dokonce na větší množině $\Xi_h \supset \Xi$ (viz obr. 2.3), která je tvořena sjednocením všech trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$, jež mají neprázdný průnik s vnitřkem Ξ. Tento jev je známý jako tzv. *locking efekt* a je dobře patrný z obr. 2.12. Navíc z 1. rovnice v $(\hat{\mathcal{P}}_D)_{hH}$ plyne, že restrikce $u_h := \hat{u}_h\big|_{\omega_h} \in H_0^1(\omega_h)$ je aproximací řešení homogenní Dirichletovy okrajové úlohy definované v $\omega_h := \Omega \setminus \overline{\Xi}_h$:

$$(2.4) \qquad u_h \in V_h(\omega_h): \int_{\omega_h} \operatorname{grad} u_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_{\omega_h} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h(\omega_h),$$

kde

$$V_h(\omega_h) := V_h\big|_{\omega_h} \cap H_0^1(\omega_h).$$

V tomto případě je homogenní Dirichletova okrajová podmínka předepsaná na $\partial\omega$ splněna přesně.

Poznámka 2.7 V [25] je ukázáno, že pro výše zvolený typ triangulace $\mathcal{T}_h$ a $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_h$ platí následující odhad řádu chyby:

$$\|u - u_h\|_{1,\omega_h} \leq ch^{1/2-\varepsilon}, \quad h \to 0+,$$

pokud je oblast ω konvexní a $f \in L^p(\Omega)$ s $p > 2$. Parametr $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo, $c = konst. > 0$ nezávisí na h a u je řešení původní úlohy $(\mathcal{P})$.

Algebraický tvar úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_D)_{hH}$ vede opět na soustavu lineárních rovnic typu (1.7) s tím, že prvky matice $\mathbb{B}$ jsou dány vztahem:

$$b_{kj} = \int_{\Xi} \psi_{i_k} \varphi_j \, dx, \; j = 1, \ldots, n; \; n = \dim V_h; \; i_k \in \mathcal{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}; \; k = 1, \ldots, d,$$

kde $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ a $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ jsou bázové funkce V_h, resp. V_H a $\mathcal{I}$ je množina indexů všech ψ_i, jejichž nosič má neprázdný průnik s vnitřkem oblasti Ξ.

Poznámka 2.4 a efektivních způsob řešení soustavy algebraických rovnic (1.7) uvedený v odstavci 2.1 zůstávají platné i v případě DLM-metody, ovšem s jistými úpravami při sestavování matice transformace $\mathbb{B}$ (viz odstavec 2.3).

Poznámka 2.8 Je-li předepsaná nehomogenní Dirichletova okrajová podmínka $u = g$ na $\partial\omega$, kde $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, pak musíme zaměnit druhou rovnici v úloze $(\hat{\mathcal{P}}_D)$, resp. v $(\hat{\mathcal{P}}_D)_{hH}$ za rovnici

$$\langle \mu, \hat{u} - \tilde{g} \rangle = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda,$$

resp.

$$\int_{\Xi} \mu_H \hat{u}_h \, dx = \int_{\Xi} \mu_H \tilde{g} \, dx \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H,$$

kde $\tilde{g}$ je rozšíření funkce g z $\partial\omega$ do Ξ. Na pravé straně soustavy lineárních algebraických rovnic (1.7) pak bude vektor $\mathbf{G}$, jehož složky spočteme takto:

$$g_k = \int_{\Xi} \psi_{i_k} \tilde{g} \, dx, \; i_k \in \mathcal{I}, \; k = 1, \ldots, d.$$

K výpočtu integrálů můžeme opět použít numerickou integraci.

2.3 Numerická realizace a příklady

V příkladech, které následují, ilustrujeme užití BLM a DLM-metody k řešení konkrétních okrajových úloh ve 2D i 3D, které byly zvoleny tak, aby jejich řešení bylo snadno vyjádřitelné v analytickém tvaru.

Řešme užitím předchozích variant MFO následující okrajovou úlohu:

$$(\mathcal{P})_1 \qquad \begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{v } \omega,\ \omega \subset \mathbb{R}^n,\ n = 2, 3, \\ u &= g \quad \text{na } \Gamma_{int}, \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_{ext}, \end{cases}$$

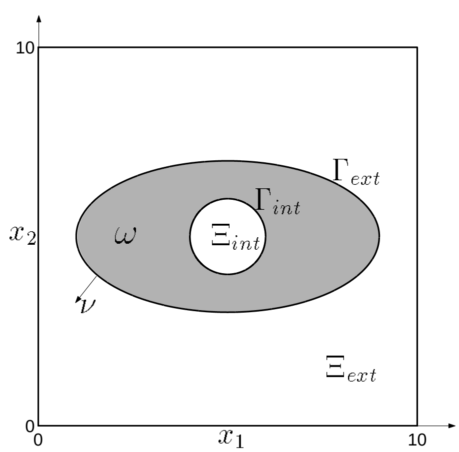
kde

$$f = -\triangle(u_d|_\omega) \in L^2(\omega),\ g = u_d|_{\Gamma_{int}} \in H^{1/2}(\Gamma_{int}). \tag{2.5}$$

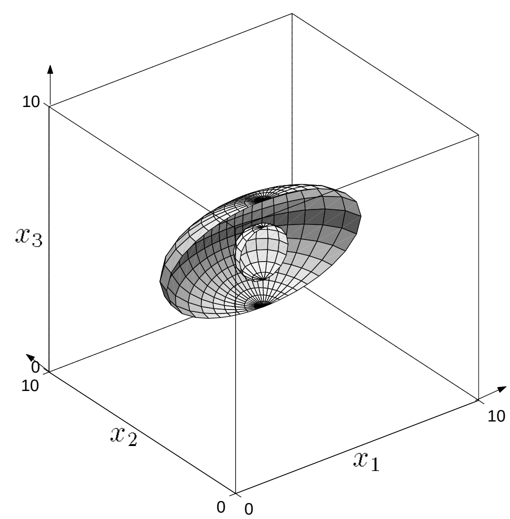
Příklad 2.1 V případě, že $n = 2$, volíme

$$u_d(x_1, x_2) = 1 - \frac{(x_1 - L_{x_1}/2)^2}{16} - \frac{(x_2 - L_{x_2}/2)^2}{4}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

a ω je dvojnásobně souvislá oblast s vnitřní hranicí Γ_{int} popsanou implicitní funkcí $(x_1 - L_{x_1}/2)^2 + (x_2 - L_{x_2}/2)^2 = 1$, přičemž $L_{x_1} = L_{x_2} = 10$, zatímco vnější část Γ_{ext} (elipsa) odpovídá množině bodů, na níž funkce u_d nabývá nulové hodnoty (viz obr. 2.4). Z toho a z (2.5) vyplývá, že $u_d|_\omega$ je řešením úlohy $(\mathcal{P})_1$.



Obrázek 2.4.



Obrázek 2.5.

Příklad 2.2 Uvažujme podobné zadání jako v příkladě 2.1 ovšem ve 3D. V tomto případě bude

$$u_d(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{(x_1 - L_{x_1}/2)^2}{16} - \frac{(x_2 - L_{x_2}/2)^2}{4} - \frac{(x_3 - L_{x_3}/2)^2}{4}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a ω bude dvojnásobně souvislá oblast s vnitřní hranicí Γ_{int} popsanou implicitní funkcí $(x_1 - L_{x_1}/2)^2 + (x_2 - L_{x_2}/2)^2 + (x_3 - L_{x_3}/2)^2 = 1$, kde $L_{x_1} = L_{x_2} = L_{x_3} = 10$ a vnější Γ_{ext} odpovídající množině bodů, na níž funkce u_d nabývá nulové hodnoty (viz obr. 2.5, kde je znázorněna pouze polovina oblasti). Z toho a z (2.5) vyplývá, že $u_d|_\omega$ je řešením úlohy $(\mathcal{P})_1$ ve 3D.

V dalším použijeme fiktivní oblast $\Omega = (0, L_{x_1}) \times (0, L_{x_2})$ (ve 2D) nebo $\Omega = (0, L_{x_1}) \times (0, L_{x_2}) \times (0, L_{x_3})$ (ve 3D).

V obou příkladech pracujeme s dvojnásobně souvislou oblastí ω. Z tohoto důvodu je nutno modifikovat úlohy $(\hat{\mathcal{P}}_B)$ a $(\hat{\mathcal{P}}_D)$ následovně:

$$(\hat{\mathcal{P}}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\hat{u}, \lambda_1, \lambda_2) \in V \times \Lambda_1 \times \Lambda_2 \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u} \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_\Omega \tilde{f} v \, dx + \langle \lambda_1, v \rangle_1 + \langle \lambda_2, v \rangle_2 \quad \forall v \in V, \\ \langle \mu_1, \hat{u} \rangle_1 + \langle \mu_2, \hat{u} \rangle_2 = \langle \mu_1, q \rangle_1 \quad \forall (\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2, \end{array} \right.$$

kde v případě BLM-metody je $V := H_0^1(\Omega)$ a symboly $\langle .,. \rangle_1$, resp. $\langle .,. \rangle_2$ označují dualitu mezi prostory $\Lambda_1 := H^{-1/2}(\Gamma_{int})$ a $H^{1/2}(\Gamma_{int})$, resp. $\Lambda_2 := H^{-1/2}(\Gamma_{ext})$ a $H^{1/2}(\Gamma_{ext})$. Dále $\tilde{f}$ je rozšíření f z oblasti ω na Ω nulou a $q := g$. V případě DLM-metody zůstává význam V a $\tilde{f}$ stejný. Symboly $\langle .,. \rangle_1$, resp. $\langle .,. \rangle_2$ nyní značí dualitu mezi prostory $\Lambda_1 := (V|_{\Xi_{int}})'$ a $V|_{\Xi_{int}}$, resp. $\Lambda_2 := (V|_{\Xi_{ext}})'$ a $V|_{\Xi_{ext}}$, kde Ξ_{int}, Ξ_{ext} je vnitřní, resp. vnější komponenta ω v Ω a q značí rozšíření funkce g z hranice Γ_{int} na oblast Ω definované předpisem:

$$q(x_1, x_2) \text{ (resp. } q(x_1, x_2, x_3)) = \frac{3}{4}\Big(1 + \frac{(x_1 - L_{x_1}/2)^2}{4}\Big) \tag{2.6}$$

ve 2D, resp. 3D a pro který platí, že $q = g$ na Γ_{int}.

Poznámka 2.9 Je zřejmé, že problém $(\hat{\mathcal{P}})$ má jediné řešení $(\hat{u}, \lambda_1, \lambda_2) \in V \times \Lambda_1 \times \Lambda_2$ a $u := \hat{u}|_\omega$ řeší $(\mathcal{P})_1$. Navíc v případě BLM-metody $\lambda_2 = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ na Γ_{ext}.

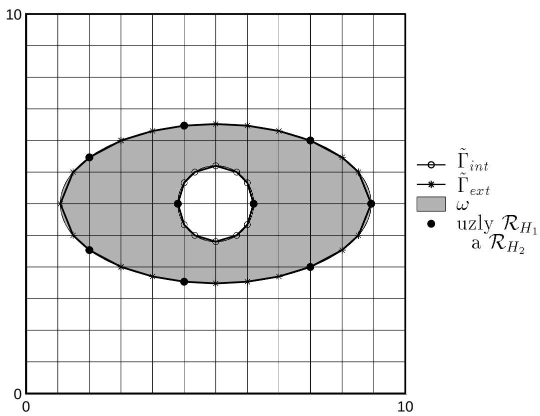
Přejděme nyní k aproximaci úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$. V dalším budeme předpokládat, že hranice Γ_{int} a Γ_{ext} jsou v případě BLM-metody ve 2D popsané takovými funkcemi, že lze snadno určit průsečíky těchto hranic se sítí pro MKP. Ve 3D se pak omezíme pouze na takové hranice Γ_{int} a Γ_{ext}, jež lze popsat pomocí funkcí $\mathcal{S}_{int}$, $\mathcal{S}_{ext}$ argumentů $(\varphi, \vartheta) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$. Naproti tomu u DLM-metody ve 2D i 3D budeme předpokládat pouze to, že existuje takové rozhodovací kritérium, které jednoznačně stanoví, zda libovolně zvolený bod uvnitř fiktivní oblasti Ω patří do $\overline{\omega}$, Ξ_{int} nebo Ξ_{ext}.

Poznámka 2.10 Z praktických důvodů je mnohem jednodušší použít dělení fiktivní oblasti na obdélníky (ve 2D), resp. na kvádry (ve 3D), protože se tak podstatně ulehčí práce s výpočtem integrálů závislých na geometrii reálné oblasti ω (hlavně ve 3D). Proto v praktické části, na rozdíl od teoretické, pracujeme výhradně s rektangulacemi fiktivní oblasti.

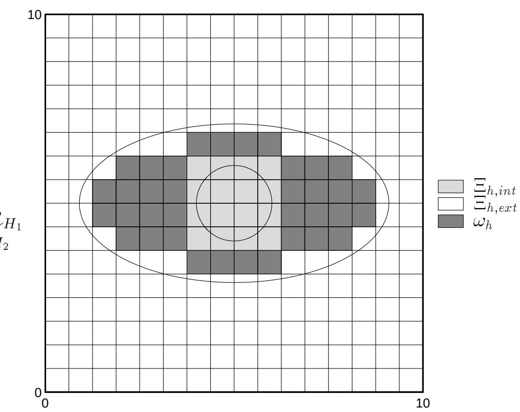
Nechť tedy $\mathcal{R}_h$ je stejnoměrná rektangulace fiktivní oblasti $\overline{\Omega}$, t.j. $\overline{\Omega}$ je rozdělena na čtverce (ve 2D), resp. na krychle (ve 3D) s krokem h. Pro dané $\mathcal{R}_h$ zkonstruujeme prostor

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) \mid \quad v_h|_R \in Q_1(R) \ \ \forall R \in \mathcal{R}_h, \quad v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega\},$$

t.j. V_h obsahuje všechny spojité, po částech bilineární funkce (ve 2D), resp. trilineární (ve 3D) a nabývající nuly na $\partial\Omega$. Nyní přistoupíme ke konstrukci prostorů Λ_{H_1} a Λ_{H_2} pro jednotlivé varianty MFO ve 2D a 3D.



Obrázek 2.6.



Obrázek 2.7.

BLM-metoda ve 2D (BLM 2D)

Hranice Γ_{int} a Γ_{ext} nahradíme jejich polygonálními aproximacemi $\tilde{\Gamma}_{int}$ a $\tilde{\Gamma}_{ext}$ jednoznačně určenými průsečíky Γ_{int} a Γ_{ext} se stranami $\mathcal{R}_h$ (viz obr. 2.6). Dále rozdělíme $\tilde{\Gamma}_{int}$ na vzájemně disjunktní části S_i o délce $|S_i| \doteq H \geq 3h$. Přestože se jedná o rektangulaci fiktivní oblasti Ω, používáme stejnou podmínku na vzájemný vztah mezi normami pro obě dělení jako v případě triangulace. Navíc požadujeme, aby konce úseků S_i ležely na meziprvkových hranicích (viz obr. 2.6). Systém všech takových $\{S_i\}_{i=1}^{m_1}$ označíme $\mathcal{R}_{H_1}$. Pro dané $\mathcal{R}_{H_1}$ definujeme prostor Λ_{H_1} následovně:

$$\Lambda_{H_1} = \{\mu_{H_1} \in L^2(\tilde{\Gamma}_{int}) \mid \quad \mu_{H_1}|_S \in P_0(S) \quad \forall S \in \mathcal{R}_{H_1}\},$$

t.j. Λ_{H_1} je prostor po částech konstantních funkcí na $\mathcal{R}_{H_1}$. Stejným postupem definujeme dělení $\mathcal{R}_{H_2}$ hranice $\tilde{\Gamma}_{ext}$ a prostor Λ_{H_2}. Oblast mezi hranicemi $\tilde{\Gamma}_{int}$ a $\tilde{\Gamma}_{ext}$ označíme ω_H.

DLM-metoda ve 2D i 3D (DLM 2D a DLM 3D)

V tomto případě definujeme: $\Lambda_{H_1} := V_h|_{\Xi_{int}}$ a $\Lambda_{H_2} := V_h|_{\Xi_{ext}}$, t.j. diskrétní prostory Lagrangeových multiplikátorů používají stejné dělení $\mathcal{R}_h$ jako prostor V_h. Symbolem ω_h označíme sjednocení všech $R \in \mathcal{R}_h$ takových, že $R \subset \overline{\omega}$. Buď dále $\Xi_h := \Xi_{h,int} \cup \Xi_{h,ext} = \Omega \setminus \overline{\omega}_h$ (viz obr. 2.7).

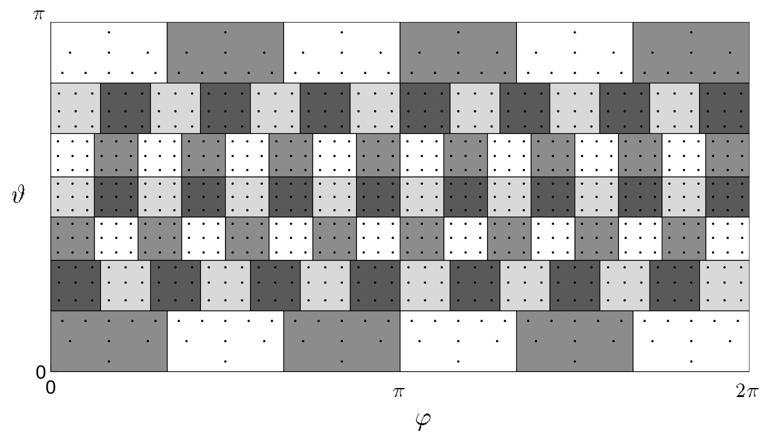
BLM-metoda ve 3D (BLM 3D)

Zde, jak jsme již zmínili předpokládáme, že hranice Γ_{int} a Γ_{ext} jsou popsány funkcemi

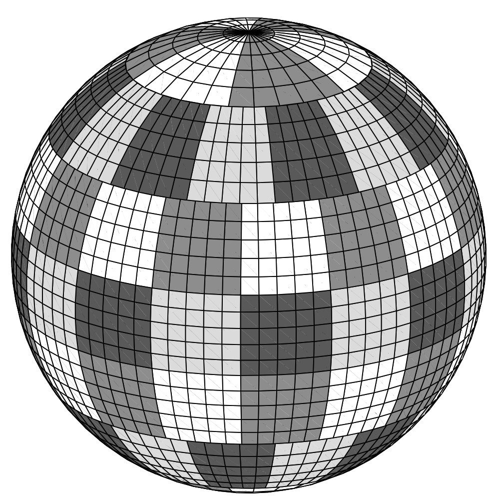
$\mathcal{S}_{int}$ a $\mathcal{S}_{ext}$ definovanými na obdélníku $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$. Dělení hranice Γ_{int} pro hraniční LM zkonstruujeme následovně: nejdříve rozdělíme oblast $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$, jež tvoří definiční obor funkce $\mathcal{S}_{int}$, na vzájemně disjunktní části S_i o ploše $|S_i| \doteq H^2 \geq 9h^2$ (viz obr. 2.8) a vzniklé dělení promítneme pomocí funkce $\mathcal{S}_{int}$ na hranici Γ_{int}, čímž obdržíme její dělení, které označíme $\mathcal{R}_{H_1}$ (viz obr. 2.9 pro případ, že uvedená plocha je kulová). Pro dané $\mathcal{R}_{H_1}$ zkonstruujeme prostor Λ_{H_1} podobně jako ve 2D případě:

$$\Lambda_{H_1} = \{\mu_{H_1} \in L^2(\Gamma_{int}) \ | \quad \mu_{H_1}\big|_S \in P_0(S) \quad \forall S \in \mathcal{R}_{H_1}\}.$$

Stejným postupem vytvoříme dělení $\mathcal{R}_{H_2}$ hranice Γ_{ext} a definujeme prostor Λ_{H_2}. V tomto případě je $\tilde{\Gamma}_{int} := \Gamma_{int}$, $\tilde{\Gamma}_{ext} := \Gamma_{ext}$ a $\omega_H := \omega$.



Obrázek 2.8.



Obrázek 2.9.

Nyní již můžeme přistoupit k definici aproximace $(\hat{\mathcal{P}})_{hH}$ úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$:

$$(\hat{\mathcal{P}})_{hH} \quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\hat{u}_h, \lambda_{H_1}, \lambda_{H_2}) \in V_h \times \Lambda_{H_1} \times \Lambda_{H_2} \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u}_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_\Omega \tilde{f} v_h \, dx + \int_{\Psi_1} \lambda_{H_1} v_h \, d\sigma + \int_{\Psi_2} \lambda_{H_2} v_h \, d\sigma \\ \hfill \forall v_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_{\Psi_1} \mu_{H_1} \hat{u}_h \, d\sigma + \int_{\Psi_2} \mu_{H_2} \hat{u}_h \, d\sigma = \int_{\Psi_1} \mu_{H_1} q \, d\sigma \quad \forall (\mu_{H_1}, \mu_{H_2}) \in \Lambda_{H_1} \times \Lambda_{H_2}, \end{array} \right.$$

kde v případě BLM-metody $\Psi_1 := \tilde{\Gamma}_{int}$, $\Psi_2 := \tilde{\Gamma}_{ext}$ a $d\sigma := ds$, t.j. příslušné integrály jsou křivkové. V případě DLM-metody bude $\Psi_1 := \Xi_{int}$, $\Psi_2 := \Xi_{ext}$ a $d\sigma := dx$, t.j. příslušné integrály jsou objemové. Symboly $\tilde{f}$ a q mají stejný význam jako v úloze $(\hat{\mathcal{P}})$.

Maticová formulace úlohy $(\hat{\mathcal{P}})_{hH}$ vede opět na soustavu lineárních algebraických rovnic (1.7), kde $\boldsymbol{\lambda}^T = [\boldsymbol{\lambda}_1^T, \boldsymbol{\lambda}_2^T]$, $\mathbb{B}^T = [\mathbb{B}_1^T, \mathbb{B}_2^T]$, $\mathbf{G}^T = [\mathbf{G}_1^T, \mathbf{0}^T]$ a prvky matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a vektorů $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ se spočtou následovně:

$$a_{ij} = \int_\Omega \operatorname{grad} \varphi_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dx, \; i, j = 1, \dots, n; \; n = \dim V_h,$$

$$b_{kj}^1 = \int_{S_k} \varphi_j \, ds, \; g_k^1 = \int_{S_k} g \, ds, \; S_k \in \mathcal{R}_{H_1}; \; k = 1, \dots, m_1;$$
$$j = 1, \dots, n; \; m_1 = \dim \Lambda_{H_1} \text{ (BLM 2D a 3D)},$$

$$b_{kj}^1 = \int_{\Xi_{int}} \varphi_{i_k} \varphi_j \, dx, \; g_k^1 = \int_{\Xi_{int}} \varphi_{i_k} q_h \, dx, \; j = 1, \dots, n; \; n = \dim V_h;$$
$$i_k \in \mathcal{I}_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_{d_1}\}; \; k = 1, \dots, d_1 \text{ (DLM 2D a 3D)},$$

$$b_{kj}^2 = \int_{S_k} \varphi_j \, ds, \; g_k^2 = 0, \; S_k \in \mathcal{R}_{H_2}; \; k = 1, \dots, m_2;$$
$$j = 1, \dots, n; \; m_2 = \dim \Lambda_{H_2} \text{ (BLM 2D a 3D)},$$

$$b_{kj}^2 = \int_{\Xi_{ext}} \varphi_{i_k} \varphi_j \, dx, \; g_k^2 = 0, \; j = 1, \dots, n; \; n = \dim V_h;$$
$$i_k \in \mathcal{I}_2 = \{i_1, i_2, \dots, i_{d_2}\}; \; k = 1, \dots, d_2 \text{ (DLM 2D a 3D)},$$

$$f_j = \int_\Omega \tilde{f} \varphi_j \, dx = \int_\Psi f \varphi_j \, dx, \; j = 1, \dots, n,$$

kde q_h je po částech bilineární, resp. trilineární Lagrangeova interpolace funkce q definované vztahem (2.6), $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ jsou bázové funkce V_h a $\mathcal{I}_1$, resp. $\mathcal{I}_2$ je množina indexů těch φ_i, jejichž nosič má neprázdný průnik s vnitřkem oblasti Ξ_{int}, resp. Ξ_{ext}. Přitom oblast $\Psi := \omega_H$ u BLM-metody, kdežto v případě DLM-metody stačí v důsledku vlivu locking efektu integrovat pouze přes ty elementy, jež celé leží v ω, t.j. $\Psi := \omega_h$. Vektor $\mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ z důvodu předepsané homogenní Dirichletovy okrajové podmínky na Γ_{ext}. K numerické integraci v případě hraničních integrálů použijeme složené Simpsonovo pravidlo ve 2D a složené obdélníkové ve 3D (příklad volby integračních bodů ve 3D je vidět na obrázku 2.8). V případě integrace přes části elementů, jež jsou proťaté hranicemi Γ_{int} a Γ_{ext}, použijeme taktéž složené obdélníkové pravidlo. V opačném případě (při integraci přes neproťaté elementy) použijeme

Gaussovo-Legendrovo integrační pravidlo druhého řádu v $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, čímž napočítáme přesně matici $\mathbb{A}$, popř. $\mathbb{B}$ u DLM-metody. Toto pravidlo použijeme i pro výpočet vektoru $\mathbf{F}$, popř. $\mathbf{G}$. Upozorněme, že při napočítávání vektoru $\mathbf{G}$ v případě BLM-metody máme k dispozici funkci $g \in C(\Gamma_{int})$. Její "projekci" na $\tilde{\Gamma}_{int}$ provedeme postupem popsaným v poznámce 2.14.

Poznámka 2.11 Jak jsme se již zmínili, v případě DLM-metody se souhlasnými sítěmi bude řešení $\hat{u}_h$ v důsledku locking efektu rovno q_h, resp. nule nejen na Ξ_{int}, resp. Ξ_{ext}, ale na oblastech větších označených $\Xi_{h,int}$ a $\Xi_{h,ext}$ (viz obr. 2.7). Této skutečnosti můžeme s výhodou využít při konstrukci matice $\mathbb{B}$.

Nechť $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \emptyset$. Definujme novou matici $\tilde{\mathbb{B}}^T = [\tilde{\mathbb{B}}_1^T, \tilde{\mathbb{B}}_2^T]$, jejímiž prvky jsou

$$\tilde{b}^1_{kj} = \delta_{i_k j},\ j = 1, \ldots, n;\ n = \dim V_h;\ i_k \in \mathcal{I}_1;\ k = 1, \ldots, d_1,$$

t.j. v k-tém řádku matice $\tilde{\mathbb{B}}_1$ je pouze jeden nenulový prvek na pozici i_k a jeho hodnota je 1 (podobně pro prvky $\tilde{b}^2_{kj}$ matice $\tilde{\mathbb{B}}_2$). Je jednoduché ukázat, že existuje taková regulární matice $\mathbb{C}$, pro kterou platí, že $\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{C}\,\mathbb{B}$. Nahraďme dále vektor $\mathbf{G}$ vektorem

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbb{C}\,\mathbf{G} = \mathbb{C}\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}|_{\mathcal{I}_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{q}$ je vektor uzlových hodnot funkce q_h. Potom řešení $\mathbf{u}$ bude stejné, ať už použijeme v (1.7) $\mathbb{B}$, $\mathbf{G}$ nebo $\tilde{\mathbb{B}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$. V dalším místo $\tilde{\mathbb{B}}$ a $\tilde{\mathbf{G}}$ budeme opět psát $\mathbb{B}$ a $\mathbf{G}$.

Vyloučení první složky řešení $\mathbf{u}$ v maticové formulaci (1.7) vede na soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámou $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\beta}, \tag{2.7}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T, \\ \boldsymbol{\beta} &= \mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbf{F} - \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Matice $\mathcal{A}$ je symetrická, pozitivně definitní, její dimenze je podstatně menší než dimenze matice $\mathbb{A}$ (hlavně v případě BLM-metody) a navíc soustava

$$\mathbb{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (\mathbf{y} \text{ dané})$$

je efektivně řešitelná užitím rychlých řešičů jako jsou metoda cyklické redukce, Fourierova metoda, Choleského rozklad kombinovaný s přímým a zpětným chodem, metoda multigridu a metoda rozložení oblastí. Z těchto důvodů použijeme k řešení soustavy (2.7) klasickou metodu sdružených gradientů bez předpodmínění. Užití efektivních předpodmiňovačů pro speciální typy eliptických operátorů je popsáno v případě BLM, resp. DLM-metody v [18], resp. [17]. Pozitivní vliv na číslo podmíněnosti a tím i na počet iterací má také metoda regularizace popsaná v [28].

Metoda sdružených gradientů

Inicializace:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_0 &\in \mathbb{R}^m \quad (\text{nejčastěji } \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{0}),\\
\mathbf{r}_0 &= \boldsymbol{\beta} - \mathcal{A}\boldsymbol{\lambda}_0,\\
\mathbf{v}_0 &= \mathbf{r}_0,\\
m &= \dim(\mathcal{A}),\\
i &:= 0,\\
\varepsilon &> 0.
\end{aligned}$$

Iterační cyklus:

(#) $\qquad (\|\mathbf{r}_i\|^2 \le \varepsilon \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \ \text{ nebo } \ i \ge m) \quad \Longrightarrow \quad \text{ukončení cyklu},$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_i &= \mathcal{A}\mathbf{v}_i = \mathbb{B}\ \mathbf{Solve}(\mathbb{B}^T\,\mathbf{v}_i),\\
\alpha_i &= \frac{\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_i}{\mathbf{v}_i^T\mathbf{d}_i},\\
\boldsymbol{\lambda}_{i+1} &= \boldsymbol{\lambda}_i + \alpha_i\mathbf{v}_i,\\
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i - \alpha_i\mathbf{d}_i,\\
\beta_i &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_i},\\
\mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{r}_{i+1} + \beta_i\mathbf{v}_i,
\end{aligned}$$

$$i := i+1 \quad \text{a vracíme se k (\#)},$$

kde funkce $\mathbf{x} = \mathbf{Solve}(\mathbf{y})$ vrací vektor řešení $\mathbf{x}$ soustavy $\mathbb{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$, přičemž v případě metody cyklické redukce a Fourierovy metody se matice tuhosti vůbec nesestavuje. Dále vektor $\mathbf{v}_i$ reprezentuje směr získaný $\mathcal{A}$-ortogonalizací vektoru reziduí $\mathbf{r}_i$. Jako ukončovací kritéria v metodě sdružených gradientů jsou uvažovány podmínky na relativní chybu rezidua a na omezení počtu prováděných iterací dimenzí matice $\mathcal{A}$. Při numerické realizaci Dirichletovy okrajové úlohy užijeme Fourierovu metodu a v případě smíšené Dirichletovy-Neumannovy a čistě Neumannovy okrajové úlohy (viz kapitolu 3) Choleského rozklad.

Výsledky příkladů 2.1 a 2.2

V této části jsou vyhodnoceny výsledky řešení příkladů 2.1 a 2.2 získané užitím BLM a DLM-metody. Pro každou variantu MFO a pro oba zadané příklady je grafem, popř. tabulkou znázorněno:

- vypočtené řešení stavové úlohy;
- odpovídající Lagrangeův multiplikátor;
- počet iterací metody sdružených gradientů v závislosti na h;
- relativní chyba řešení $\hat{u}_h|_{\omega_h}$ v normě prostoru $H^1(\omega_h)$, resp. $L^2(\omega_h)$ v závislosti na h, t.j. $E^1_{rel}(h) := \|\hat{u}_h - u_d\|_{1,\omega_h}/\|u_d\|_{1,\omega_h}$, resp. $E^0_{rel}(h) := \|\hat{u}_h - u_d\|_{0,\omega_h}/\|u_d\|_{0,\omega_h}$;
- doba řešení soustavy (2.7) v závislosti na h;
- řád změny počtu iterací metody sdružených gradientů vzhledem k h;
- řád konvergence vypočtený z relativní chyby řešení $\hat{u}_h|_{\omega_h}$ v normě prostoru $H^1(\omega_h)$ a $L^2(\omega_h)$ vzhledem k h;
- řád změny doby řešení soustavy (2.7) vzhledem k h,

přičemž vypočtené řešení stavové úlohy $\hat{u}_h$ a odpovídající Lagrangeův multiplikátor $\lambda_H = [\lambda_{H_1}, \lambda_{H_2}]$ znázorňujeme pro BLM a DLM-metodu ve 3D pouze v řezu $\mathcal{M}$ fiktivní oblasti Ω rovinou $x_3 = L_{x_3}/2$. Stavová úloha $(\mathcal{P})_1$ ve 3D zúžená na tento řez odpovídá úloze $(\mathcal{P})_1$ ve 2D. Je-li tedy $\hat{u}|_\omega$ řešením $(\mathcal{P})_1$ ve 3D, pak $u := \hat{u}|_{\omega\cap\mathcal{M}}$ je řešením úlohy $(\mathcal{P})_1$ ve 2D, což je vidět z obrázků 2.10-13.

Poznámka 2.12 Při výpočtu relativní chyby řešení a tedy i odpovídajícího řádu konvergence pracujeme ve všech případech s oblastí ω_h, která je sjednocením elementů z $\mathcal{R}_h$, jež celé leží v ω. Toto podstatně zjednoduší příslušné výpočty a umožní vzájemné porovnání efektivnosti užití BLM a DLM metody ve 2D i 3D.

Poznámka 2.13 (numerická realizace normy $\|\,.\,\|_{-1/2,\Gamma}$) Jelikož $\lambda_{H_2} \to \lambda_2$ obecně pouze v normě prostoru $H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_{ext})$, potřebujeme zrealizovat numerický výpočet duální normy. Vyjdeme z toho, že norma v 1-periodickém prostoru $H^{-1/2}(I)$, kde $I = (0,1)$, může být zavedena následovně (viz [33]):

$$\|v\|_{-1/2,I} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{1+|n|}, \tag{2.8}$$

kde

$$c_n = \int_0^1 v(t)e^{-2\pi i n t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

jsou Fourierovy koeficienty a $\mathbb{Z}$ je množina všech celých čísel. Nechť Γ je hladká hranice oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^2$ popsaná parametricky 1-periodickou funkcí $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ takovou, že $|\gamma'(t)| > 0 \; \forall t \in [0,1]$, kde

$$|\gamma'(t)| := \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)).$$

Je-li $z \in L^2(\Gamma)$, pak normu $\|z\|_{-1/2,\Gamma}$ definujeme následovně:

$$\|z\|_{-1/2,\Gamma} := \|z \circ \gamma \, |\gamma'| \, \|_{-1/2,I},$$

kde výraz napravo je definován pomocí vztahu (2.8).

V případě polygonální hranice $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, kde S_i jsou jednotlivé strany polygonu, postupujeme následovně: označme L délku hranice Γ a

$$\gamma_i : \; (t_i, t_{i+1}) \to S_i, \; i = 1, \dots, n$$

buď přirozené parametrizace úseků S_i s délkou $|S_i|$, kde $t_1 = 0$, $t_i = \sum_{j=1}^{i-1} \triangle t_j$, $i = 2, \dots, n+1$ a $\triangle t_i = |S_i|/L$. Z přirozené parametrizace S_i plyne, že se na tomto úseku (navíc i po celé Γ) pohybujeme stále konstantní rychlostí $v = |\gamma_i'| = \dfrac{|S_i|}{\triangle t_i} = L$. Z předchozího pak plyne, že normu $\|z\|_{-1/2,\Gamma}$, $z \in L^2(\Gamma)$ spočteme následovně:

$$\|z\|_{-1/2,\Gamma} = \|z \circ \gamma \, |\gamma'| \, \|_{-1/2,I} = L \|z \circ \gamma\|_{-1/2,I},$$

kde $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^n$ a výraz $\| \, . \, \|_{-1/2,I}$ je definován pomocí (2.8).

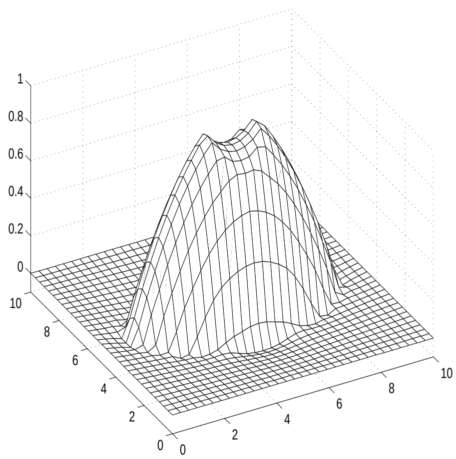
Při praktické realizaci se nekonečná řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ nahradí konečným součtem $\sum_{n=-K}^{K}$, kde K je "dostatečně velké" přirozené číslo a k výpočtu c_n se použije algoritmus rychlé Fourierovy transformace.

Poznámka 2.14 Projekci funkce $q \in C(\Gamma)$ na její polygonální aproximaci $\tilde{\Gamma}$ provedeme následovně: označme $\{A_i\}_{i=1}^n$ vrcholy $\tilde{\Gamma}$. Body $A_i \in \mathbb{R}^2$ leží na hranici Γ a proto v nich můžeme určit funkční hodnoty $q(A_i)$. Spojitou, po částech lineární funkci $\tilde{q}$ definovanou na $\tilde{\Gamma}$ a jednoznačně určenou v bodech A_i hodnotami $q(A_i)$, $i = 1, \dots, n$ budeme považovat za aproximaci funkce $q \in C(\Gamma)$ na $\tilde{\Gamma}$.

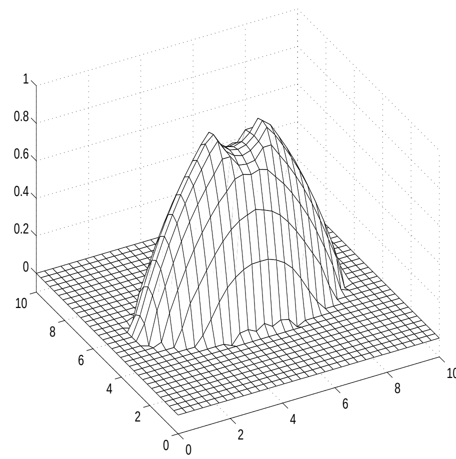
V celé této práci platí: vyskytne-li se funkce $q \in C(\Gamma)$ ve vztahu k hranici $\tilde{\Gamma}$, budeme místo q pracovat s její náhradou $\tilde{q} \in C(\tilde{\Gamma})$ sestrojenou výše uvedeným způsobem.

V následujících obrázcích jsou znázorněna vypočtená řešení stavové úlohy $(\mathcal{P})_1$ (obr. 2.10-13) a odpovídající LM (obr. 2.14-17) pro BLM a DLM metodu ve 2D i 3D. Přitom $h = 10/32$, parametr v ukončovací podmínce metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$ a $H/h \doteq 3$ u BLM-metody. V případě DLM-metody je z obrázků 2.12-13 dobře vidět vliv locking efektu.

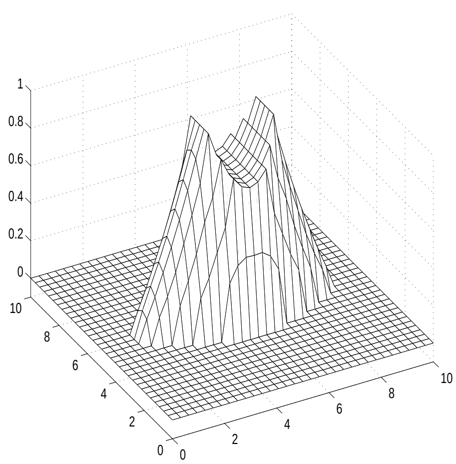
Poznámka 2.15 Vliv locking efektu v případě DLM-metody můžeme omezit tím, že do množiny $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ dáme pouze ty indexy i bázových funkcí φ_i z V_h, pro které platí, že míra $|\operatorname{supp}\varphi_i \cap \Xi| \geq \delta$, kde $0 < \delta \leq |\operatorname{supp}\varphi_i|$ je pevně zvolená konstanta a $\Xi := \Xi_{int} \cup \Xi_{ext}$. Pokud tedy nosič φ_i a oblast Ξ mají neprázdný průnik o míře větší nebo rovné δ, pak index i bude patřit do $\mathcal{I}$. Navíc velikost množiny $\mathcal{I}$ a tím i počet Lagrangeových multiplikátorů můžeme podstatně zredukovat tak, že příslušný Lagrangeův multiplikátor realizující předepsané okrajové podmínky na $\partial\omega := \Gamma_{int} \cup \Gamma_{ext}$ nebudeme definovat na celé oblasti Ξ, ale pouze na nějakém malém okolí $\partial\omega$.



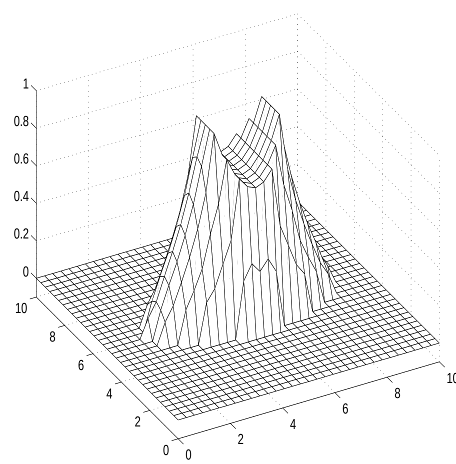
Obrázek 2.10. BLM 2D.



Obrázek 2.11. BLM 3D (řez).



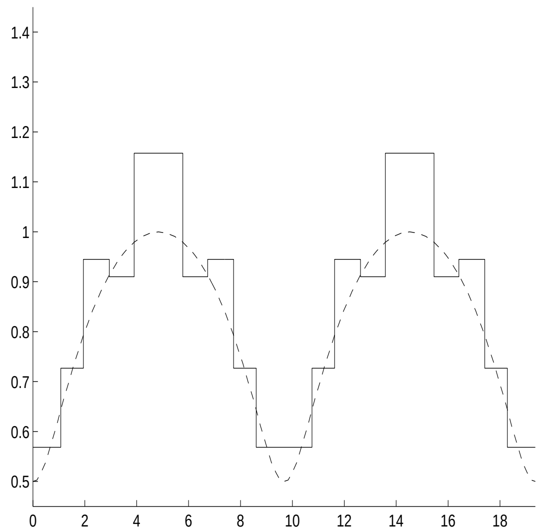
Obrázek 2.12. DLM 2D.



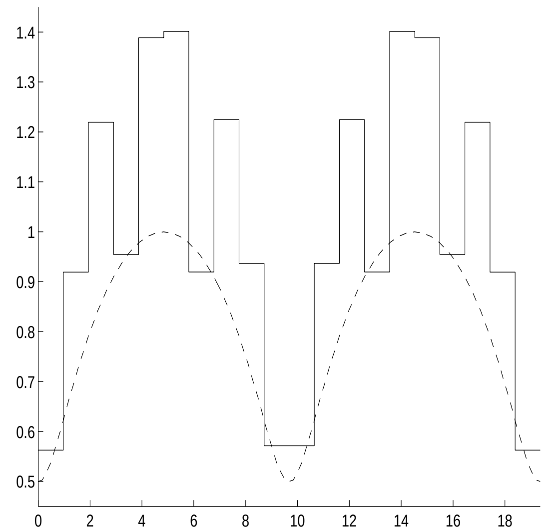
Obrázek 2.13. DLM 3D (řez).

Analýza vypočtených Lagrangeových multiplikátorů

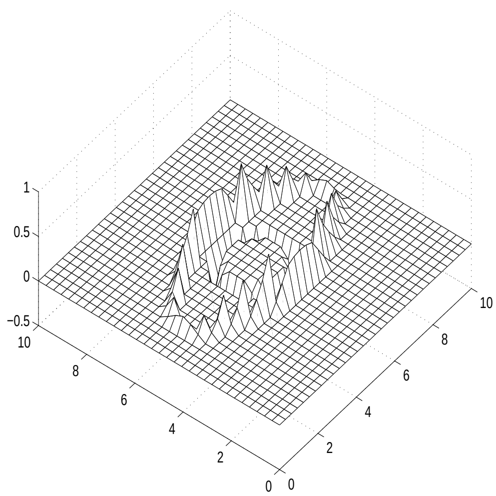
Jak jsme již zmínili, na obrázcích 2.14-17 jsou znázorněny vypočtené Lagrangeovy multiplikátory. V případě BLM-metody (obr. 2.14-15) znázorňujeme pouze vypočtený Lagrangeův multiplikátor $-\lambda_{H_2}$ definovaný na $\tilde{\Gamma}_{ext}$ (plnou čarou) aproximující $-\dfrac{\partial u_d}{\partial \nu}$, jež je vykreslena čarou přerušovanou. Jak se dá očekávat, kvalita aproximace $\dfrac{\partial u_d}{\partial \nu}$ pomocí vypočtených Lagrangeových multiplikátorů je ve 3D horší než ve 2D. Dále z obrázků 2.16-17 je vidět, že nenulové distribuované LM jsou koncentrovány pouze v blízkém okolí hranic Γ_{int} a Γ_{ext}.



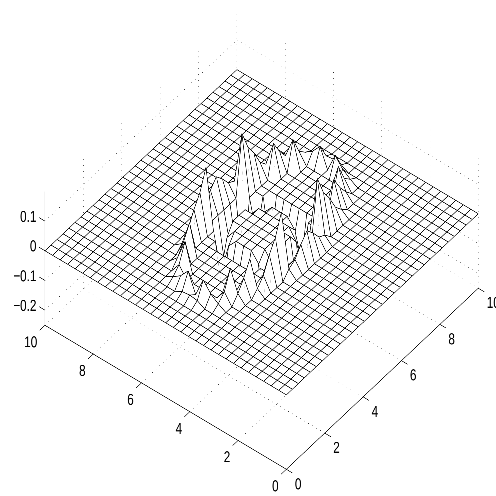
Obrázek 2.14. BLM 2D.



Obrázek 2.15. BLM 3D (řez).

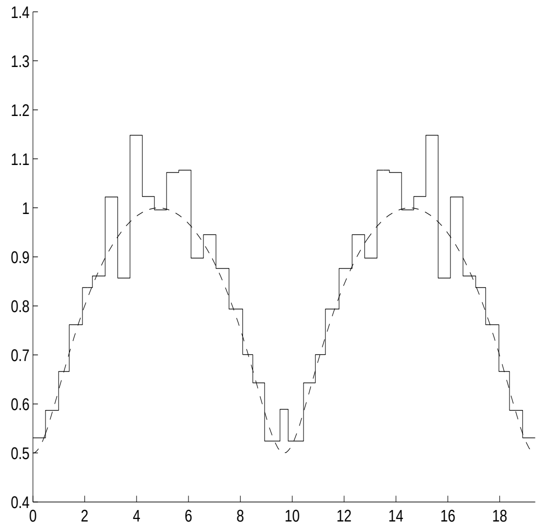


Obrázek 2.16. DLM 2D.

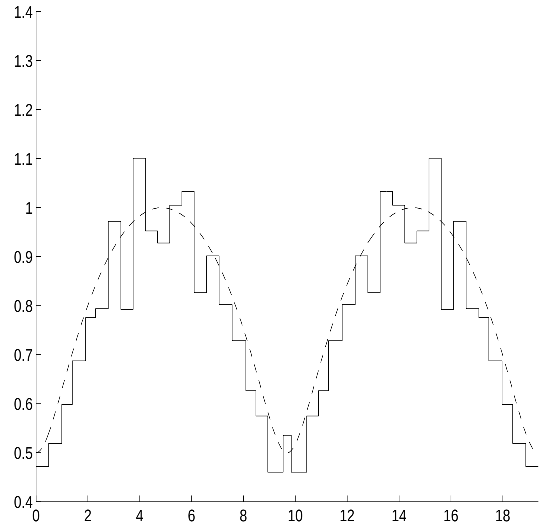


Obrázek 2.17. DLM 3D (řez).

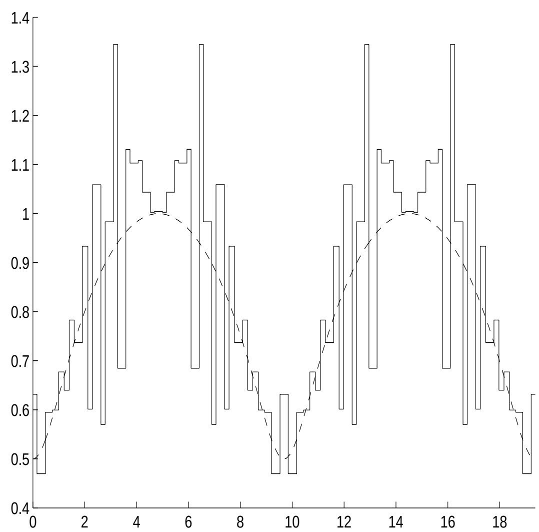
Z obrázků 2.18 a 2.20-21 je patrný vliv volby velikosti poměru H/h u BLM-metody ve 2D. Čím je tento poměr menší, tím více začínají LM oscilovat a naopak. Toto oscilující chování souvisí s porušením LBB-podmínky. Na obrázcích 2.18-19 pak můžeme vidět vliv nepřesného napočítání vektoru zatížení **F**. V případě obrázku 2.18 integrujeme přes celou oblast ω (přesněji přes její polygonální aproximaci ω_H), kdežto v případě obrázku 2.19 pouze přes elementy, jež celé leží v ω, t.j. přes oblast ω_h.



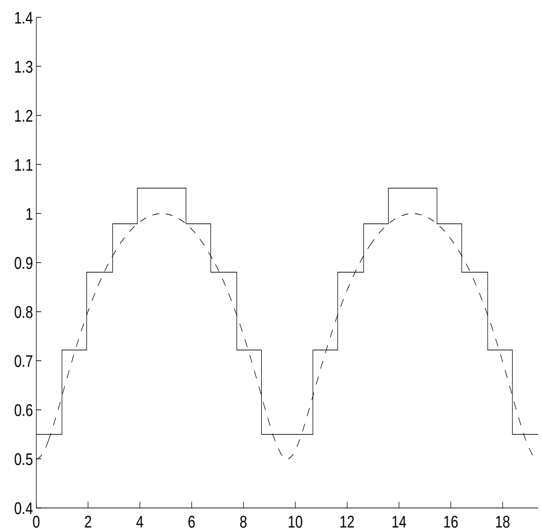
Obrázek 2.18. $H/h = 3$.



Obrázek 2.19. $H/h = 3$, $\tilde{f}|_{\Xi_h} = 0$.



Obrázek 2.20. $H/h = 1.5$.



Obrázek 2.21. $H/h = 6$.

Označme

$$e^0_{rel}(h) := \frac{\|\lambda_{H_2} - \partial u_d/\partial\nu\|_{0,\tilde{\Gamma}_{ext}}}{\|\frac{\partial u_d}{\partial\nu}\|_{0,\tilde{\Gamma}_{ext}}},$$

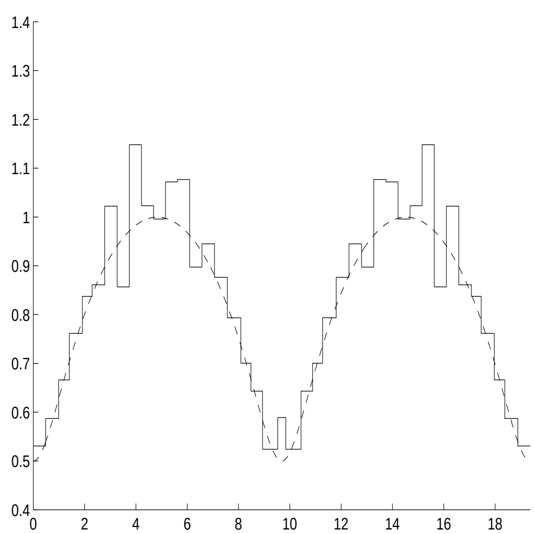
$$e^{-1/2}_{rel}(h) := \frac{\|\lambda_{H_2} - \partial u_d/\partial\nu\|_{-1/2,\tilde{\Gamma}_{ext}}}{\|\frac{\partial u_d}{\partial\nu}\|_{-1/2,\tilde{\Gamma}_{ext}}}$$

relativní chybu druhé složky řešení λ_{H_2} úlohy $(\hat{\mathcal{P}})_{hH}$ v normě prostoru $L^2(\tilde{\Gamma}_{ext})$, resp. $H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_{ext})$ (pro numerický výpočet norem viz poznámky 2.13 a 2.14). Z teoretické části víme, že posloupnost $\{\lambda_{H_2}\}$ konverguje k $\frac{\partial u_d}{\partial\nu}$ obecně pouze v normě prostoru $H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_{ext})$ a ne $L^2(\tilde{\Gamma}_{ext})$. Toto také potvrzuje 2. a 4. sloupec tabulky 2.1, kde řád konvergence vypočtený z relativní chyby v normě prostoru $L^2(\tilde{\Gamma}_{ext})$ je téměř

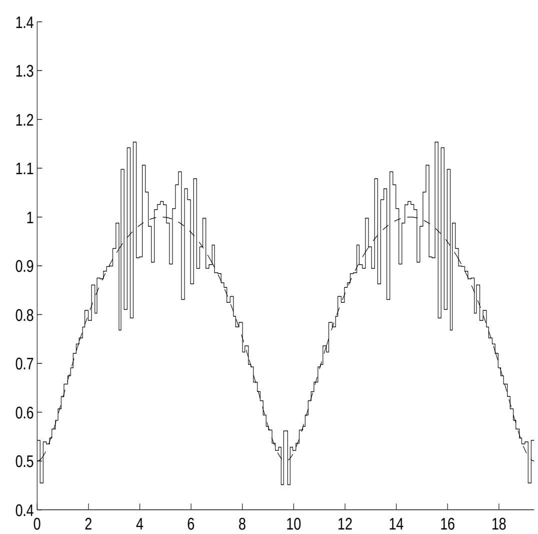
Krok h	$e^0_{rel}(h)$	$e^0_{rel}(h)$ + filtr	$e^{-1/2}_{rel}(h)$
10/64	7.3041e-02	3.7356e-02	3.3954e-02
10/128	5.6811e-02	1.9630e-02	1.8636e-02
10/256	7.4255e-02	7.3489e-03	1.1261e-02
10/512	6.4214e-02	4.1438e-03	6.7605e-03
10/1024	6.8519e-02	3.0839e-03	4.8679e-03
Řád konv.	0.0007	0.9441	0.7067

Tab. 2.1. BLM 2D.

nulový, kdežto v případě normy v $H^{-1/2}(\tilde{\Gamma}_{ext})$ je roven 0.7067. Připomeňme ještě, že teoreticky odvozený řád konvergence (viz větu 2.2) je $0.5 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ ovšem pro triangulaci $\overline{\Omega}$ a polygonální ω (pro ω s obecnou hranicí je tento výsledek odvozen v [13]). Posloupnost $\{\lambda_{H_2}\}$ v našem případě nekonverguje k $\frac{\partial u_d}{\partial\nu}$ v normě prostoru



Obrázek 2.22. Bez filtru.

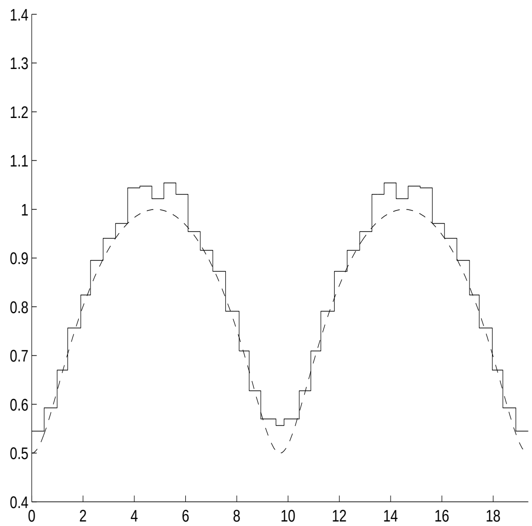


Obrázek 2.23. Bez filtru.

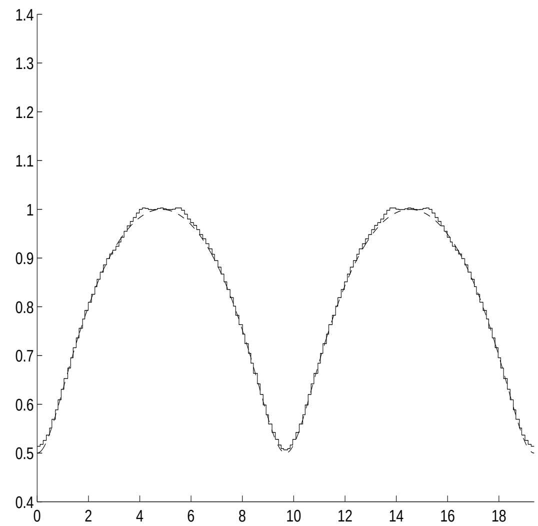
$L^2(\tilde{\Gamma}_{ext})$ v důsledku přibývajících oscilací se zmenšujícím se h ($H/h \doteq 3$ je pevné), což je patrné z obrázků 2.22-23 pro $h = 10/64$, resp. $h = 10/256$.

Oscilující průběh LM můžeme vyhladit různými způsoby. Nejjednodušší je zvětšit poměr H/h (obr. 2.21). Dalšími možnostmi jsou např. použití polynomiální aproximace získaného průběhu pomocí splinů, filtrace a v neposlední řadě také vyhlazení pomocí waveletové a Fourierovy transformace. K tomu, abychom obdrželi konvergenci v normě $L^2(\tilde{\Gamma}_{ext})$, použijeme k vyhlazení dat filtraci.

Z obrázků 2.22 a 2.24, resp. 2.23 a 2.25 je vidět účinek filtrace na průběh LM pro poměr $H/h \doteq 3$ a krok diskretizace $h = 10/64$, resp. $h = 10/256$. Jako filtr bylo použito diskrétní Hanningovo okno (viz [39]) realizované na $n = 2^{log_2(10/h)-5}+1$ bodech. Velikost okna v závislosti na h byla určena experimentálně. Z třetího sloupce tabulky 2.1 je vidět, že pro tuto volbu filtru a velikosti okna již LM konvergují k $\dfrac{\partial u_d}{\partial \nu}$ s řádem 0.9441. Podobných výsledků dosáhneme i užitím trojúhelníkového okna.



Obrázek 2.24. S filtrem.



Obrázek 2.25. S filtrem.

Další charakteristiky numerického řešení úlohy $(\mathcal{P})_1$

Z tabulek 2.2-6, ve kterých uvádíme další důležité charakteristiky numerického řešení úlohy $(\mathcal{P})_1$, zjistíme, že podstatně rychleji a přesnější výsledky obdržíme užitím BLM-metody. DLM-metoda má ovšem tu výhodu, že sestavení matice $\mathbb{B}$ ve 2D i 3D (viz poznámka 2.11) je mnohem jednodušší než u BLM-metody.

Z věty 2.2, resp. z poznámky 2.7 plyne, že řád konvergence v normě prostoru $H^1(\Omega)$ v případě BLM-metody ve 2D, resp. $H^1(\omega_h)$ v případě DLM-metody ve 2D je $1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Zde je nutno poznamenat, že tyto teoreticky odvozené řády konvergence platí pro triangulaci fiktivní oblasti Ω. Z tabulky 2.6 vidíme, že u DLM-metody vlivem locking efektu vychází řád konvergence jen o něco málo větší než 1/2, kdežto u BLM-metody, jelikož uvažujeme pouze normu v prostoru $H^1(\omega_h)$, vychází řád konvergence výrazně větší.

Poznámka 2.16 Řády změn jednotlivých charakteristik vzhledem k h se spočtou následovně: nechť $q(h)$ je libovolná funkce závislá na $h \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}^1$ je zvolený interval. Potom pod pojmem řád změny funkce q vzhledem k h rozumíme takové číslo α, které určíme společně s konstantami c_1 a c_2 tak, aby se minimalizovala $\|q - \tilde{q}\|_{0,I}$, kde $\tilde{q} = c_1 h^\alpha + c_2$. Konstantu α můžeme snadno spočítat užitím lineární regrese.

Z tabulek 2.2-6 můžeme dále vyčíst, že řád změny počtu iterací i samotné počty iterací nezávisí na tom, zda úlohu $(\mathcal{P})_1$ řešíme v rovině (příklad 2.1) a nebo v prostoru (příklad 2.2). Ještě podotkněme, že řády jednotlivých charakteristik v případě DLM-metody byly vypočteny bez hodnot odpovídajících kroku $h = 10/32$. Tyto jsou totiž nejvíce zatíženy vlivem locking efektu, který "uzamkne" řešení nejen na oblasti Ξ, ale i na značné části oblasti ω (hlavně ve 3D).

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^1_{rel}(h)$	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	16	4	6.8767e-02	7.0258e-02	1.0000e-02
10/64	4225	32	10	3.4143e-02	3.1088e-02	3.0000e-02
10/128	16641	65	16	1.7613e-02	1.4447e-02	2.1000e-01
10/256	66049	131	17	9.0522e-03	6.7947e-03	9.4000e-01
10/512	263169	262	20	5.3251e-03	3.6016e-03	5.9700e+00
10/1024	1050625	524	23	3.2370e-03	1.9015e-03	3.1550e+01

Tab. 2.2. BLM 2D.

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^1_{rel}(h)$	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	35937	140	18	8.9769e-02	9.9071e-02	6.1000e-01
10/48	117649	320	21	5.6240e-02	5.9161e-02	2.6100e+00
10/64	274625	571	25	3.9249e-02	4.3210e-02	7.8500e+00
10/80	531441	892	27	3.1728e-02	3.2341e-02	1.8590e+01
10/96	912673	1284	27	2.6542e-02	2.6016e-02	3.3010e+01

Tab. 2.3. BLM 3D.

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^1_{rel}(h)$	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	973	23	5.2816e-01	2.5076e-01	3.0000e-02
10/64	4225	3535	39	2.4603e-01	1.2765e-01	1.5000e-01
10/128	16641	13433	69	1.4253e-01	6.2815e-02	1.0900e+00
10/256	66049	52459	123	9.4698e-02	3.3280e-02	9.0200e+00
10/512	263169	207193	228	6.2886e-02	1.6878e-02	9.2910e+01
10/1024	1050625	823363	387	4.3050e-02	8.6294e-03	7.2228e+02

Tab. 2.4. DLM 2D.

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^1_{rel}(h)$	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	35937	35319	26	9.4387e-01	3.8373e-01	1.1100e+00
10/48	117649	113825	34	4.8796e-01	2.7513e-01	5.8400e+00
10/64	274625	263803	44	3.7236e-01	2.1511e-01	2.0020e+01
10/80	531441	508251	55	3.1390e-01	1.7815e-01	5.4090e+01
10/96	912673	870255	68	2.7907e-01	1.5158e-01	1.2037e+02

Tab. 2.5. DLM 3D.

Řád	BLM 2D	BLM 3D	DLM 2D	DLM 3D
změny počtu iterací	-0.4487	-0.4008	-0.8346	-0.9941
konvergence řešení v normě $H^1(\omega_h)$	0.8871	1.1187	0.6210	0.8090
konvergence řešení v normě $L^2(\omega_h)$	1.0416	1.2111	0.9670	0.8580
změny doby řešení soustavy (2.7)	-2.3768	-3.6763	-3.0880	-4.3709

Tab. 2.6.

3 Smíšená Dirichletova-Neumannova a čistě Neumannova okrajová úloha

V této kapitole ukážeme *nový* přístup k řešení smíšené Dirichletovy-Neumannovy a čistě Neumannovy okrajové úlohy s eliptickým operátorem 2. řádu *bez absolutního členu* ve 2D, jež je založen na užití BLM-metody. Použijeme následující postup: původní problém nejdříve vyjádříme v duální formě (vyjádřené v gradientech). Tuto formulaci posléze rozšíříme z ω na Ω užitím MFO a Neumannovu okrajovou podmínku na části $\Gamma(\alpha)$ hranice $\partial\omega$ (viz obr. 3.1 a 3.4) zahrneme do formulace pomocí hraničních Lagrangeových multiplikátorů. Hlavní obtíž této formulace je, že přípustná množina se sestává z vektorových funkcí, jejichž divergence je nulová. Tyto funkce budou realizovány pomocí tzv. *proudových funkcí.* Celá tato problematika i s aplikacemi v tvarové optimalizaci byla publikována v [23]. Konečně v odstavci 3.3 ilustrujeme tento přístup na řešení několika modelových úloh.

3.1 Smíšená Dirichletova-Neumannova okrajová úloha

Výše zmíněný postup podrobně ukážeme na následující smíšené Dirichletově-Neumannově úloze:

$$(\mathcal{P})' \qquad \begin{cases} -\triangle u = f & \text{v} \quad \omega, \\ u = 0 & \text{na} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{na} \quad \Gamma(\alpha) \end{cases}$$

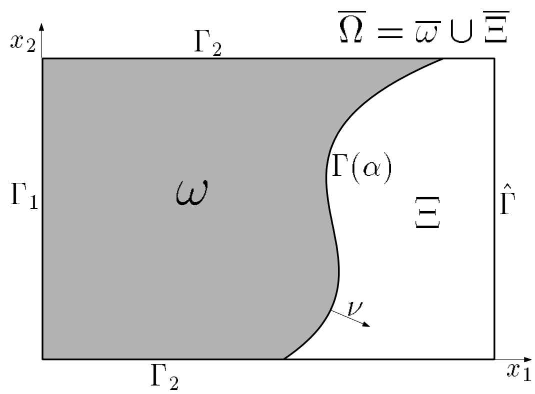
nebo ve slabé formulaci:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } u \in V(\omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx = \int_\omega f\varphi \, dx + \int_{\Gamma(\alpha)} g\varphi \, ds \quad \forall \varphi \in V(\omega), \end{cases}$$

kde $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^2(\Gamma(\alpha))$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega$ a

$$V(\omega) = \{v \in H^1(\omega) \mid \quad v = 0 \text{ na } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Tvar oblasti ω a rozklad hranice $\partial\omega$ na části Γ_1, Γ_2 a $\Gamma(\alpha)$ jsou patrny z obr. 3.1.



Obr. 3.1.

Část $\Gamma(\alpha)$ je reprezentována grafem Lipschitzovsky spojité funkce $\alpha : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^1_+$:

$$\Gamma(\alpha) = \{(x_1, x_2) \mid \quad x_1 = \alpha(x_2),\ x_2 \in \Gamma_1\}.$$

Nyní místo problému $(\mathcal{P})$ označovaného též jako *primární formulace* budeme uvažovat jeho *duální formulaci*, t.j. formulaci v gradientech. Nechť $K_{f,g}(\omega)$ je uzavřená konvexní podmnožina prostoru $(L^2(\omega))^2$ definovaná následovně:

$$K_{f,g}(\omega) = \{\mu \in (L^2(\omega))^2 \mid \quad \int_\omega \mu \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dx = \int_\omega f\varphi \, dx + \int_{\Gamma(\alpha)} g\varphi \, ds \quad \forall \varphi \in V(\omega)\}. \tag{3.1}$$

Pokud μ je dostatečně hladká, pak z Greenovy věty plyne:

$$\mu \in K_{f,g}(\omega) \iff \begin{cases} -\operatorname{div} \mu = f \text{ v } \omega, \\ \mu \cdot \nu = g \text{ na } \Gamma(\alpha). \end{cases}$$

Poznamenejme, že i v případě že $\mu \in K_{f,g}(\omega)$ bez dalších doplňujících předpokladů o hladkosti, můžeme μ charakterizovat výše uvedeným způsobem. V tomto případě první rovnice je splněna ve smyslu distribucí a druhá jako rovnost mezi funkcionály z $H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ (viz dále).

Nechť

$$\mathcal{S}(\mu) = \frac{1}{2}\int_\omega |\mu|^2 \, dx, \quad \mu \in (L^2(\omega))^2$$

je *duální funkcionál*, kde $|\mu|$ značí eukleidovskou normu vektoru μ. *Duální formulací* problému $(\mathcal{P})$ nazveme úlohu:

$$(\tilde{\mathcal{D}})' \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \lambda \in K_{f,g}(\omega) \textit{ takové, že} \\ \mathcal{S}(\lambda) = \min\limits_{\mu \in K_{f,g}(\omega)} \mathcal{S}(\mu) \end{cases}$$

nebo ekvivalentně:

$$(\tilde{\mathcal{D}}) \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \lambda \in K_{f,g}(\omega) \textit{ takové, že} \\ \int_\omega \lambda \cdot \mu \, dx = 0 \quad \forall \mu \in K_{0,0}(\omega), \end{cases}$$

kde $K_{0,0}(\omega) := K_{f,g}(\omega)$ s $f = 0$ v ω a $g = 0$ na $\Gamma(\alpha)$. Platí následující věta:

Věta 3.1 *Problém $(\tilde{\mathcal{D}})$ má jediné řešení $\lambda \in K_{f,g}(\omega)$. Navíc $\lambda = \operatorname{grad} u$ v ω, přičemž $u \in V(\omega)$ řeší $(\mathcal{P})$.*

Důkaz. Viz [9]. □

Nyní uvedeme ekvivalentní formulaci problému $(\tilde{\mathcal{D}})$, která je vhodnější z výpočetního hlediska. Nechť $\lambda_0 \in (L^2(\omega))^2$ je partikulární řešení diferenciální rovnice

$$-\operatorname{div} \lambda = f \text{ v } \omega. \tag{3.2}$$

Libovolné $\mu \in K_{f,g}(\omega)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mu = \lambda_0 + \chi, \tag{3.3}$$

kde $\chi \in K_{0,G}(\omega)$ a $G := g - \lambda_0 \cdot \nu$ na $\Gamma(\alpha)$, t.j. χ je vektorová funkce s nulovou divergencí v ω splňující podmínku $\chi \cdot \nu = G$ na $\Gamma(\alpha)$ ve smyslu rovnosti funkcionálů z $H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$. Dosazením vztahu (3.3) do $(\tilde{\mathcal{D}})$ dostaneme novou úlohu pro složku χ:

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \chi^* \in K_{0,G}(\omega) \textit{ takové, že} \\ \int_\omega \chi^* \cdot \mu \, dx = -\int_\omega \lambda_0 \cdot \mu \, dx \quad \forall \mu \in K_{0,0}(\omega). \end{cases}$$

Z (3.3) a věty 3.1 vyplývá, že $\lambda_0 + \chi^* = \operatorname{grad} u$ v ω a $u \in V(\omega)$ řeší $(\mathcal{P})$. V dalším již budeme pracovat pouze s formulací $(\mathcal{D})$.

Nyní si ukážeme, jak nahradit úlohu $(\mathcal{D})$ za úlohu novou, definovanou na větší (fiktivní) oblasti Ω obsahující ω tak, aby se její řešení zúžené na původní oblast ω shodovalo s řešením úlohy $(\mathcal{D})$.

Nechť Ω je fiktivní oblast obdélníkového tvaru znázorněná na obr. 3.1 a $\lambda_0 \in (L^2(\Omega))^2$ je taková, že podmínka (3.2) je splněna na celé oblasti Ω. Dále označme

$$H^0(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mu \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} \mu = 0 \text{ v } \Omega,\ \mu \cdot \nu = 0 \text{ na } \hat{\Gamma}\},$$
$$H^0_G(\Omega) = \{\mu \in H^0(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mu \cdot \nu = G \text{ na } \Gamma(\alpha)\},$$

kde $\hat{\Gamma} \subseteq \partial\Omega$ je pravá svislá strana $\partial\Omega$.

Dříve než si uvedeme přesný význam podmínek toku na hranicích $\Gamma(\alpha)$ a $\hat{\Gamma}$, definujme prostor stop $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ následovně:

$$(3.4) \qquad H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) = \{\varphi :\ \Gamma(\alpha) \to \mathbb{R}^1 \mid \exists v \in V(\omega) :\ \varphi = v \text{ na } \Gamma(\alpha)\}.$$

Je známo, že $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ je Banachův prostor s normou (viz [14]):

$$(3.5) \qquad \|\varphi\|_{1/2,\Gamma(\alpha)} = \inf_{\substack{v \in V(\omega), \\ v = \varphi \text{ na } \Gamma(\alpha)}} |v|_{1,\omega}.$$

Dále platí, že existuje jediné $\overline{v} \in V(\omega)$ realizující infímum v (3.5) a jež je zároveň jediným řešením úlohy:

$$(3.6) \qquad \begin{cases} -\triangle \overline{v} = 0 & \text{v} \quad \omega, \\ \quad \overline{v} = \tilde{\varphi} & \text{na} \quad \partial\omega, \end{cases}$$

kde symbol $\tilde{\varphi}$ značí rozšíření funkce φ nulou z $\Gamma(\alpha)$ na zbytek hranice $\partial\omega$.

Poznámka 3.1 Normu $\|\,.\,\|_{1/2,\Gamma(\alpha)}$ můžeme definovat i pomocí funkcí z $V(\Xi)$, kde

$$V(\Xi) = \{v \in H^1(\Xi) \mid v = 0 \text{ na } \partial\Xi \setminus \overline{\Gamma}(\alpha)\}.$$

Je zřejmé, že obě definice vedou k ekvivalentním normám a proto v dalším budeme užívat jako definici normy v $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ vztah (3.5).

Označme symbolem $H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ duální prostor k $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$. Podobně definujme prostory $H^{1/2}(\hat{\Gamma})$ a $H^{-1/2}(\hat{\Gamma})$. Příslušnou dualitu mezi prostory $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ a $H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$, resp. $H^{1/2}(\hat{\Gamma})$ a $H^{-1/2}(\hat{\Gamma})$ označíme v obou případech symbolem $\langle\, ,\, \rangle$.

Buď $\mu \in H^0(\mathrm{div}, \Omega)$. Podmínka $\mu \cdot \nu = G$ na $\Gamma(\alpha)$ ve smyslu rovnosti funkcionálů z $H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ znamená, že

$$\langle v, \mu \cdot \nu \rangle = \langle G, v \rangle \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha)). \tag{3.7}$$

Jelikož $\mathrm{div}\, \mu$ je nulová v Ω, z Greenovy věty vyplývá, že (3.7) je ekvivalentní rovnici

$$\int_\omega \mu \cdot \mathrm{grad}\, z \, dx = \langle G, v \rangle \quad \forall z \in V(\omega), \tag{3.8}$$

kde $z = v$ na $\Gamma(\alpha)$. Podobně interpretujeme podmínku toku na $\hat{\Gamma}$.

Nyní místo problému $(\mathcal{D})$ uvažujme novou úlohu definovanou v Ω:

$$(\hat{\mathcal{D}}) \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \chi^* \in H^0_G(\Omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \chi^* \cdot \mu \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^0_0(\Omega), \end{cases}$$

kde $H^0_0(\Omega) := H^0_G(\Omega)$ s $G = 0$ na $\Gamma(\alpha)$. Platí:

Lemma 3.1 *Problém $(\hat{\mathcal{D}})$ má jediné řešení $\chi^* \in H^0_G(\Omega)$. Navíc ${\chi^*}\big|_\omega$ řeší $(\mathcal{D})$.*

Důkaz. Existence a jednoznačnost řešení χ^* úlohy $(\hat{\mathcal{D}})$ plynou z Laxova-Milgramova lemmatu užijeme-li toho, že $H^0_G(\Omega)$ je neprázdná konvexní uzavřená podmnožina $H^0(\mathrm{div}, \Omega)$, který je zároveň Hilbertovým prostorem s normou $\| \,.\, \|_{0,\Omega}$. Dokažme zbývající část tvrzení. Nechť $\mu \in K_{0,0}(\omega)$ je libovolné. Definujme funkci

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu & \text{v } \omega, \\ 0 & \text{v } \Xi. \end{cases}$$

Potom funkce $\tilde{\mu} \in H^0_0(\Omega)$ a může být tedy použita jako testovací funkce v $(\hat{\mathcal{D}})$. Odtud plyne:

$$\int_\omega {\chi^*}\big|_\omega \cdot \mu \, dx = \int_\Omega \chi^* \cdot \tilde{\mu} \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \tilde{\mu} \, dx = -\int_\omega {\lambda_0}\big|_\omega \cdot \mu \, dx$$

a protože současně ${\chi^*}\big|_\omega \in K_{0,G}(\omega)$, je tvrzení dokázáno. □

Poznámka 3.2 (interpretace ${\chi^*}\big|_\Xi$) Z teorie duality vyplývá, že $(\chi^* + \lambda_0)\big|_\Xi = \mathrm{grad}\, \tilde{u}$ v Ξ, kde $\tilde{u}$ je jediné řešení problému

$$\begin{cases} -\triangle \tilde{u} = f & \text{v} \quad \Xi, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\nu}} = -g & \text{na} \quad \Gamma(\alpha), \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\nu}} = \lambda_0 \cdot \tilde{\nu} & \text{na} \quad \hat{\Gamma}, \\ \tilde{u} = 0 & \text{na} \quad \partial\Xi \setminus (\Gamma(\alpha) \cup \hat{\Gamma}) \end{cases} \tag{3.9}$$

a $\tilde{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Xi$.

Na podmínku $\mu \cdot \nu = G$ na $\Gamma(\alpha)$ objevující se v definici prostoru $H^0_G(\Omega)$ můžeme opět pohlížet jako na omezení, které zahrneme do formulace pomocí Lagrangeových multiplikátorů definovaných na $\Gamma(\alpha)$. Je zřejmé, že

$$\mu \in H^0_G(\Omega) \iff \mu \in H^0(\mathrm{div}, \Omega) \ \&\ \langle \varphi, \mu \cdot \nu \rangle = \langle G, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha)).$$

Místo $(\hat{\mathcal{D}})$ budeme uvažovat následující úlohu:

$$(\hat{\mathcal{M}}) \qquad \begin{cases} \qquad \textit{Najdi } (\chi^*, w) \in H^0(\mathrm{div}, \Omega) \times H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) \textit{ takové, že} \\ \int_\Omega \chi^* \cdot \mu \, dx + \langle w, \mu \cdot \nu \rangle = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^0(\mathrm{div}, \Omega), \\ \langle v, \chi^* \cdot \nu \rangle = \langle G, v \rangle \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha)). \end{cases}$$

Dříve, než uvedeme důkaz existence a jednoznačnosti řešení problému $(\hat{\mathcal{M}})$, zopakujme některá tvrzení, jež dále využijeme. Jejich důkazy je možno najít např. v [14].

Zobrazení $\gamma_\nu : \chi \mapsto \chi \cdot \nu$, $\chi \in H^0(\mathrm{div}, \Omega)$ je *lineární* a *spojité* z prostoru $H^0(\mathrm{div}, \Omega)$ *na* $H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$, přičemž

$$\|\chi \cdot \nu\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)} := \inf_{\substack{\vartheta \in H^0(\mathrm{div},\Omega), \\ \vartheta \cdot \nu = \chi \cdot \nu \ \text{ na } \ \Gamma(\alpha)}} \|\vartheta_{|_\omega}\|_{0,\omega}. \tag{3.10}$$

Odtud snadno plyne, že

$$\|\chi \cdot \nu\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)} = \|\overline{\vartheta}\|_{0,\omega}, \tag{3.11}$$

kde $\overline{\vartheta} = \mathrm{grad}\, \overline{v}$ v ω a $\overline{v} \in H^1(\omega)$ je jediné řešení úlohy

$$\begin{cases} -\triangle \overline{v} = 0 & \text{v} \quad \omega, \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial \nu} = \chi \cdot \nu & \text{na} \quad \Gamma(\alpha), \\ \overline{v} = 0 & \text{na} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Nechť $b : H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) \times H^0(\mathrm{div}, \Omega) \to \mathbb{R}^1$ je bilineární forma definovaná následovně:

$$b(v, \chi) := \langle v, \chi \cdot \nu \rangle, \tag{3.13}$$

kde $\chi \cdot \nu \in H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ je tok χ přes hranici $\Gamma(\alpha)$. Základní vlastnosti b jsou shrnuty v

Lemma 3.2 *Platí:*

$$b \textit{ je spojitá v } H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) \times H^0(\mathrm{div}, \Omega); \tag{3.14}$$

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\substack{\chi \in H^0(\mathrm{div},\Omega), \\ \chi \neq 0}} \frac{b(v, \chi)}{\|\chi\|_{0,\Omega}} \geq \beta \|v\|_{1/2,\Gamma(\alpha)} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha)). \tag{3.15}$$

Důkaz. Z Greenovy věty dostaneme:

$$b(v,\chi) = \langle v, \chi\cdot\nu\rangle = \int_\omega \chi\cdot \operatorname{grad} z\, dx \quad \forall z\in V(\omega)$$

takové, že $z = v$ na $\Gamma(\alpha)$. Tedy

$$|b(v,\chi)| \le \|\chi\|_{0,\omega} \inf_{\substack{z\in V(\omega),\\ z=v \text{ na } \Gamma(\alpha)}} |z|_{1,\omega} \le \|\chi\|_{0,\Omega}\cdot\|v\|_{1/2,\Gamma(\alpha)}$$
$$\forall (v,\chi)\in H^{1/2}(\Gamma(\alpha))\times H^0(\operatorname{div},\Omega),$$

čímž je ověřeno (3.14). Abychom dokázali (3.15), uvažujme nejdříve následující dvě úlohy:

$$\begin{cases} -\triangle u_1 = 0 \text{ v } \omega,\\ u_1 = \tilde v \text{ na } \partial\omega,\end{cases} \qquad \begin{cases} -\triangle u_2 = 0 \text{ v } \Xi,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial\tilde\nu} = -\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu} \text{ na } \Gamma(\alpha),\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial\tilde\nu} = 0 \text{ na } \hat\Gamma,\\ u_2 = 0 \text{ na } \partial\Xi\setminus(\overline{\Gamma(\alpha)\cup\hat\Gamma}),\end{cases}$$

kde $v\in H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ je pevně dané a $\tilde v$ značí její rozšíření nulou z $\Gamma(\alpha)$ na zbytek hranice $\partial\omega$. Z definice normy v prostoru $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ plyne, že (viz (3.6))

$$|u_1|_{1,\omega} = \|v\|_{1/2,\Gamma(\alpha)}. \tag{3.16}$$

Nyní z Laxova-Milgramova lemmatu, (3.10) a (3.16) dostaneme:

$$|u_2|_{1,\Xi} \le c\|\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)} \le c|u_1|_{1,\omega} = c\|v\|_{1/2,\Gamma(\alpha)}, \tag{3.17}$$

kde $c = \text{konst}. > 0$. Definujme funkci $\overline{\chi}\in (L^2(\Omega))^2$ pomocí vztahu

$$\overline{\chi} = \begin{cases} \operatorname{grad} u_1 \text{ v } \omega,\\ \operatorname{grad} u_2 \text{ v } \Xi.\end{cases}$$

Je vidět, že $\overline{\chi}\in H^0(\operatorname{div},\Omega)$ a současně

$$\|\overline{\chi}\|_{0,\Omega} \le c\|v\|_{1/2,\Gamma(\alpha)}, \tag{3.18}$$

jak plyne z (3.16) a (3.17). Dále z (3.16), (3.18) a definice u_1 vyplývá, že

$$\sup_{\substack{\chi\in H^0(\operatorname{div},\Omega),\\ \chi\neq 0}} \frac{b(v,\chi)}{\|\chi\|_{0,\Omega}} \ge \frac{b(v,\overline{\chi})}{\|\overline{\chi}\|_{0,\Omega}} = \frac{\langle v, \overline{\chi}\cdot\nu\rangle}{\|\overline{\chi}\|_{0,\Omega}} = \frac{\langle u_1, \frac{\partial u_1}{\partial\nu}\rangle}{\|\overline{\chi}\|_{0,\Omega}} = \frac{|u_1|^2_{1,\omega}}{\|\overline{\chi}\|_{0,\Omega}} \ge \beta\|v\|_{1/2,\Gamma(\alpha)}$$

platí pro nějakou konstantu $\beta > 0$. □

Z předchozího lemmatu plyne

Věta 3.2 *Problém* $(\hat{\mathcal{M}})$ *má jediné řešení* (χ^*, w). *Navíc* χ^* *řeší* $(\hat{\mathcal{D}})$ *a* $w =$

$(\tilde{u} - u)\big|_{\Gamma(\alpha)}$, *kde u a $\tilde{u}$ jsou řešení problémů $(\mathcal{P})$ a (3.9) na ω, resp. Ξ.*

Důkaz. Existence a jednoznačnost (χ^*, w) plyne z (3.14) a (3.15) (viz [7]). Interpretaci χ^* a w pak obdržíme z Greenovy věty. □

Abychom odstranili potíže se splněním podmínky nulové divergence, přeformulujeme úlohu $(\hat{\mathcal{M}})$ pomocí *proudových funkcí.* Je známo (viz např. [14]), že

$$H^0(\mathrm{div}, \Omega) = \mathrm{curl}\, V(\Omega), \tag{3.19}$$

kde

$$V(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \quad \psi = 0 \text{ na } \hat{\Gamma}\}, \tag{3.20}$$

t.j. pro libovolné $\mu \in H^0(\mathrm{div}, \Omega)$ existuje jediná (proudová) funkce $\psi \in V(\Omega)$ taková, že

$$\mu = \mathrm{curl}\, \psi := (\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}).$$

Užijeme-li (3.19) v $(\hat{\mathcal{M}})$, dostaneme novou formulaci $(\tilde{\mathcal{M}})$ založenou na proudových funkcích:

$$(\tilde{\mathcal{M}}) \quad \begin{cases} \qquad \textit{Najdi } (\psi^*, w) \in V(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{curl}\, \psi^* \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx + \langle w, \frac{\partial \psi}{\partial s} \rangle = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx \quad \forall \psi \in V(\Omega), \\ \langle v, \dfrac{\partial \psi^*}{\partial s} \rangle = \langle G, v \rangle \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha)), \end{cases}$$

kde $\dfrac{\partial \psi}{\partial s} \in H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ značí derivaci funkce ψ v tečném směru ke $\Gamma(\alpha)$.

Z toho, co již bylo řečeno, okamžitě vyplývá

Věta 3.3 *Problém $(\tilde{\mathcal{M}})$ má jediné řešení (ψ^*, w). Navíc $\mathrm{curl}\, \psi^* = \chi^*$ v Ω a (χ^*, w) řeší $(\hat{\mathcal{M}})$.*

Poznámka 3.3 Nechť

$$V^G(\Omega) = \{\psi \in V(\Omega) \mid \quad \langle v, \frac{\partial \psi}{\partial s} \rangle = \langle G, v \rangle \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha))\}.$$

Potom první složka ψ^* řešení úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})$ patří do $V^G(\Omega)$ a splňuje podmínku

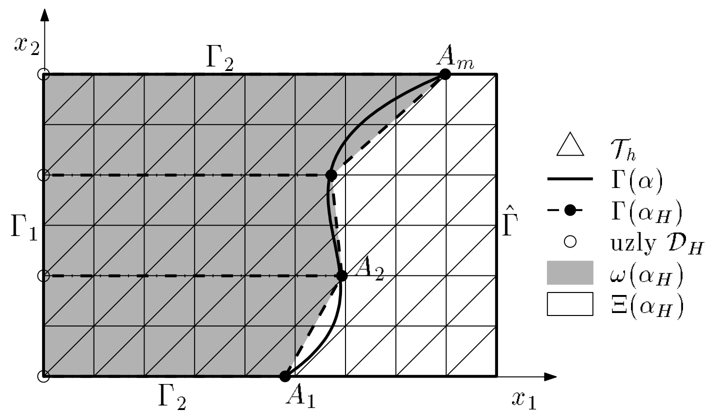
$$\int_\Omega \mathrm{curl}\, \psi^* \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx \quad \forall \psi \in V^0(\Omega), \tag{3.21}$$

kde $V^0(\Omega) := V^G(\Omega)$ s $G = 0$ na $\Gamma(\alpha)$ a w je odpovídající Lagrangeův multiplikátor přiřazený vazbě $\psi \in V^G(\Omega)$. Řešení ψ^* můžeme tedy hledat také ve tvaru $\psi^* = \tilde{\psi} + \psi^0$, kde $\tilde{\psi} \in V^G(\Omega)$ je daná a $\psi^0 \in V^0(\Omega)$ řeší úlohu

$$\int_\Omega \mathrm{curl}\, \psi^0 \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx - \int_\Omega \mathrm{curl}\, \tilde{\psi} \cdot \mathrm{curl}\, \psi \, dx \;\; \forall \psi \in V^0(\Omega). \tag{3.22}$$

Přejděme nyní k diskretizaci úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})$ pomocí smíšené metody konečných prvků podobně jako v předchozí kapitole. Nejdříve zkonstruujeme dva systémy konečně dimenzionálních prostorů $\{V_h\}$ a $\{\Lambda_H\}$, pomocí nichž budeme aproximovat primární a duální složku řešení.

Nechť $\{\mathcal{T}_h\}$, $h \to 0+$ je *regulární systém* triangulací oblasti $\overline{\Omega}$. Tyto triangulace (viz obr. 3.2) konstruujeme stejně jako v případě BLM-metody užité k řešení Dirichletovy úlohy ve 2D (odstavec 2.1). Nechť $V_h(\Omega)$ je prostor všech *spojitých, po*



Obr. 3.2.

částech lineárních funkcí nad $\mathcal{T}_h$ a nulujících se na $\hat{\Gamma}$:

$$V_h(\Omega) = \{\psi_h \in C(\overline{\Omega}) \mid \quad \psi_h \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \psi_h = 0 \text{ na } \hat{\Gamma}\}.$$

Potom systém $\{V_h(\Omega)\}$ aproximuje prostor $V(\Omega)$ definovaný vztahem (3.20). V dalším popíšeme konstrukci aproximací prostoru $\Lambda := H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$.

Označme $\{\mathcal{D}_H\}$, $H \to 0+$ *regulární* systém dělení části hranice $\overline{\Gamma}_1$ splňující:

$$\forall \mathcal{D}_H \in \{\mathcal{D}_H\} \textit{ existuje } \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\} \textit{ takové, že } \mathcal{D}_H \subseteq \mathcal{T}_h|_{\Gamma_1}, \tag{3.23}$$

t.j. všechny uzly z $\mathcal{D}_H$ jsou podmnožinou uzlů z $\mathcal{T}_h$ ležících na $\overline{\Gamma}_1$. Dále nechť $\{\alpha_H\}$ je posloupnost lineárních Lagrangeových interpolačních polynomů funkce α v uzlech z $\{\mathcal{D}_H\}$, $\Gamma(\alpha_H)$ je grafem funkce α_H, $\Gamma(\alpha_H) = \bigcup_{i=1}^{m-1} \overline{A_i A_{i+1}}$ (viz obr. 3.2) a $\omega(\alpha_H)$ je oblast ohraničená Γ_1, Γ_2 a $\Gamma(\alpha_H)$. Prostor Lagrangeových multiplikátorů bude aproximován *spojitými, po částech lineárními* funkcemi nad $\Gamma(\alpha_H)$ a nabývajících nuly na obou koncích $\Gamma(\alpha_H)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_H(\alpha_H) = \{v_H \in C(\overline{\Gamma}(\alpha_H)) \mid \quad & v_H|_{\overline{A_i A_{i+1}}} \in P_1(\overline{A_i A_{i+1}}), \\ & i = 1, \dots, m-1;\ v_H(A_1) = v_H(A_m) = 0\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Aproximace $(\tilde{\mathcal{M}})$ je definována následovně:

$$
(\tilde{\mathcal{M}})_h^H \quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\psi_h^*, w_H) \in V_h(\Omega) \times \Lambda_H(\alpha_H) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{curl} \psi_h^* \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx + \langle w_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx \\ \hfill \forall \psi_h \in V_h(\Omega), \\ \langle v_H, \dfrac{\partial \psi_h^*}{\partial s_H} \rangle_H = \langle G_H, v_H \rangle_H \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H), \end{array} \right.
$$

kde

$$
\langle v_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H := \int_{\Gamma(\alpha_H)} \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} v_H \, ds,
$$

$$
\langle G_H, v_H \rangle_H := \int_{\Gamma(\alpha_H)} G_H v_H \, ds
$$

a $G_H \in L^2(\Gamma(\alpha_H))$ je vhodná aproximace $G \in H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$. Symbol $\dfrac{\partial}{\partial s_H}$ značí tečnou derivaci funkce podél $\Gamma(\alpha_H)$.

Poznámka 3.4 Označme $H_h^0(\mathrm{div}, \Omega) := \operatorname{curl} V_h(\Omega)$, $\chi_h^* := \operatorname{curl} \psi_h^*$ a $\mu_h := \operatorname{curl} \psi_h$. Potom $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ můžeme přepsat následovně:

$$
(\hat{\mathcal{M}})_h^H \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\chi_h^*, w_H) \in H_h^0(\mathrm{div}, \Omega) \times \Lambda_H(\alpha_H) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \chi_h^* \cdot \mu_h \, dx + \langle w_H, \mu_h \cdot \nu_H \rangle_H = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mu_h \, dx \quad \forall \mu_h \in H_h^0(\mathrm{div}, \Omega), \\ \langle v_H, \chi_h^* \cdot \nu_H \rangle_H = \langle G_H, v_H \rangle_H \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H), \end{array} \right.
$$

kde ν_H je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\omega(\alpha_H)$. Je zřejmé, že problém $(\hat{\mathcal{M}})_h^H$ je aproximací $(\hat{\mathcal{M}})$. V následující konvergenční analýze jsou užity obě formulace $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ i $(\hat{\mathcal{M}})_h^H$ současně.

Abychom dokázali existenci a jednoznačnost řešení úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$, předpokládejme, že je splněna následující *podmínka stability*:

$$
\text{(S)} \quad v_H \in \Lambda_H(\alpha_H) : \langle v_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h(\Omega) \quad \Longrightarrow v_H = 0 \text{ na } \Gamma(\alpha_H).
$$

Poznámka 3.5 Zde si uvedeme postačující podmínku, za které je podmínka (S) splněna. Integrací per partes v $\langle\, , \,\rangle_H$ a z toho, že $v_H(A_1) = v_H(A_m) = 0$ dostaneme:

$$
\langle v_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H = -\int_{\Gamma(\alpha_H)} \psi_h \frac{\partial v_H}{\partial s_H} \, ds = -\int_{\Gamma_1} (\psi_h \frac{\partial v_H}{\partial s_H}) \circ \alpha_H \sqrt{1 + (\alpha_H')^2} \, dx_2.
$$

Označme:

$$
Y_h(\Gamma_1) = \{\xi_h \in C(\overline{\Gamma}_1) \mid \quad \xi_h \text{ je po částech lineární na } \mathcal{T}_h|_{\Gamma_1}\},
$$

$$
Z_H(\Gamma_1) = \{\eta_H \in L^2(\Gamma_1) \mid \quad \eta_H \text{ je po částech konstantní na } \mathcal{D}_H\}.
$$

Potom $\xi_h := \psi_h \circ \alpha_H \in Y_h(\Gamma_1)$ a $\eta_H := (\frac{\partial v_H}{\partial s_H}) \circ \alpha_H \sqrt{1 + (\alpha'_H)^2} \in Z_H(\Gamma_1)$ pro libovolné $\alpha_H \in \{\alpha_H\}$, jak vyplývá z (3.23). Podmínka (S) bude splněna, platí-li:

$$\eta_H \in Z_H(\Gamma_1) : \int_{\Gamma_1} \xi_h \eta_H \, dx_2 = 0 \quad \forall \xi_h \in Y_h(\Gamma_1) \implies \eta_H = 0 \text{ na } \Gamma_1, \tag{3.25}$$

neboť je-li $\eta_H = 0$ na Γ_1, potom $v_H = \text{konst}$. na $\Gamma(\alpha_H)$. Poněvadž $v_H(A_1) = v_H(A_m) = 0$, je nutně $v_h = 0$ na $\Gamma(\alpha_H)$. Z předchozí části však víme, že podmínka (3.25) je splněna, pokud poměr H/h je "dostatečně" velký. Jinými slovy, dělení $\mathcal{D}_H$ je hrubší, než dělení $\mathcal{T}_h$. Pokud tento poměr je větší nebo roven 3 (viz [13]) obdržíme i splnění LBB-podmínky, která v tomto případě má tvar:

$$\text{(LBB)} \quad \left\{ \sup_{\substack{\psi_h \in V_h(\Omega), \\ \psi_h \neq 0}} \frac{\langle \frac{\partial v_H}{\partial s_H}, \psi_h \rangle_H}{\|\psi_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta_0 \|\frac{\partial v_H}{\partial s_H}\|_{-1/2, \Gamma(\alpha_H)} \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H) \right.$$

s konstantou $\beta_0 > 0$, která nezávisí na krocích diskretizace h, resp. H a na $\alpha_H \in \{\alpha_H\}$. Tato problematika je rovněž podrobně studována v [13]. $\square$

Důsledkem podmínky (S) je

Lemma 3.3 *Nechť jsou splněny* (S) *a* (3.23). *Potom problém* $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ *má jediné řešení* (ψ_h^*, w_H).

V dalším zaměříme svoji pozornost na chování posloupnosti $\{\psi_h^*\}$ pro $h \to 0+$.
Označme

$$V_h^{G_H}(\Omega) = \{\psi_h \in V_h(\Omega) \mid \langle v_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H = \langle G_H, v_H \rangle_H \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H)\}$$

podmnožinu $V_h(\Omega)$. Poznamenejme, že v důsledku podmínky (S) je tato množina neprázdná. Potom první složka ψ_h^* řeší úlohu

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Najdi } \psi_h^* \in V_h^{G_H}(\Omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{curl} \psi_h^* \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx \quad \forall \psi_h \in V_h^0(\Omega), \end{array} \right. \tag{3.26}$$

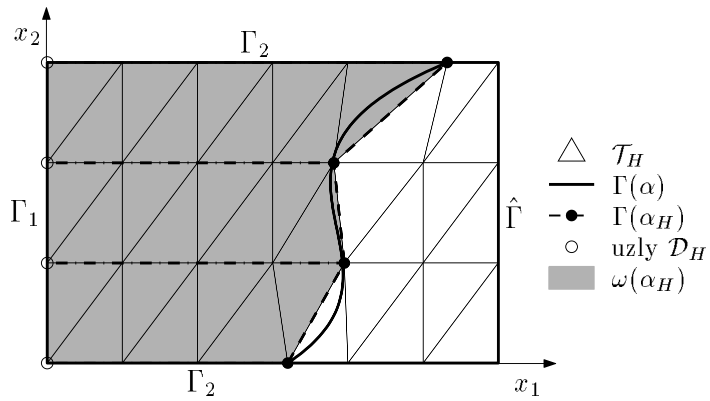
kde $V_h^0(\Omega) := V_h^{G_H}(\Omega)$ s $G_H = 0$ na $\Gamma(\alpha_H)$ a w_H je odpovídající Lagrangeův multiplikátor přiřazený vazbě $\psi_h^* \in V_h^{G_H}(\Omega)$.

V dalším budeme potřebovat ještě následující předpoklady:

(3.27) $h \to 0+ \;\Leftrightarrow\; H \to 0+$ *a platí* (3.23)*;*

(3.28) *pro každou dvojici* (h, H) *splňující* (3.27) *existuje omezená posloupnost* $\{\tilde{\psi}_h\}$ *ve* $V_h^{G_H}$*, t.j.*
$\exists c > 0 : \|\tilde{\psi}_h\|_{1,\Omega} \leq c \quad \forall h, H > 0$ *splňující* (3.27) *a* $\tilde{\psi}_h \in V_h^{G_H}(\Omega)$*;*

(3.29) *posloupnost* $\{G_H\}$ *aproximuje* G *v následujícím smyslu:*
nechť $\{\mathcal{T}_H\}$, $H \to 0+$ *je další regulární systém triangulací oblasti* $\overline{\Omega}$ *(nezávislý na* $\{\mathcal{T}_h\}$*) a takový, že hranice* $\Gamma(\alpha_H)$ *pro každé* $\alpha_H \in \{\alpha_H\}$ *je tvořena hranami z* $\mathcal{T}_H$ *pro libovolné* $H > 0$ *(viz obr. 3.3). Dále nechť*



Obr. 3.3.

$$V_H(\Omega) = \{z_H \in C(\overline{\Omega}) \mid \quad z_H\big|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_H, \quad z_H = 0 \ \text{na} \ \partial\Omega\} \tag{3.30}$$

je konečně dimenzionální podprostor $H_0^1(\Omega)$ a tudíž $\Lambda_H(\alpha_H)$ definovaný pomocí (3.24) je roven $V_H(\Omega)\big|_{\Gamma(\alpha_H)}$. Potom žádáme, aby

$$\langle G_H, v_H\rangle_H \to \langle G, v\rangle,$$

kdykoli $z_H \to z$ v $H_0^1(\Omega)$, přičemž $z_H \in V_H(\Omega)$ a $z \in H_0^1(\Omega)$ jsou takové, že $v_H :=$ stopa$_{\Gamma(\alpha_H)}\, z_H$ a $v :=$ stopa$_{\Gamma(\alpha)}\, z$.

Poznámka 3.6 Předpoklad (3.28) je ekvivalentní splnění LBB-podmínky (viz [7]).

Užitím předchozích předpokladů dokážeme následující konvergenční výsledek:

Věta 3.4 *Nechť jsou splněny* (3.27)-(3.29) *a nechť $\{(\psi_h^*, w_H)\}$ je posloupnost řešení úloh $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$, $h, H \to 0+$. Potom*

$$\operatorname{curl}\psi_h^* \rightharpoonup \operatorname{curl}\psi^* \ \textit{(slabě)} \ v\ (L^2(\Omega))^2, \quad h \to 0+ \tag{3.31}$$

a $\chi^* := \operatorname{curl}\psi^*$ je řešením $(\hat{\mathcal{D}})$.

Důkaz. Nejdříve dokažme, že $\{\psi_h^*\}$ je omezená v $H^1(\Omega)$-normě. Nechť $\{\tilde{\psi}_h\}$ je omezená posloupnost z (3.28). Potom $\psi_h^* = \tilde{\psi}_h + \psi_h^0$ a $\psi_h^0 \in V_h^0(\Omega)$ je řešením úlohy

$$\int_\Omega \operatorname{curl}\psi_h^0 \cdot \operatorname{curl}\psi_h\, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl}\psi_h\, dx - \int_\Omega \operatorname{curl}\tilde{\psi}_h \cdot \operatorname{curl}\psi_h\, dx \qquad \forall \psi_h \in V_h^0(\Omega), \tag{3.32}$$

jak vyplývá dosazením do (3.26). Dosadíme-li dále $\psi_h := \psi_h^0$ do (3.32) a užijeme-li (3.28), dostaneme, že $\{\psi_h^0\}$ je omezená a tudíž i posloupnost $\{\psi_h^*\}$ je omezená v $H^1(\Omega)$-normě. Můžeme tedy vybrat podposloupnost z $\{\psi_h^*\}$ (značenou stejně) takovou, že

$$\psi_h^* \rightharpoonup \psi^* \ \text{(slabě) ve } V(\Omega). \tag{3.33}$$

Ukažme, že $\chi^* := \operatorname{curl}\psi^*$ řeší $(\hat{\mathcal{D}})$, t.j.

$$(3.34)\qquad \begin{cases} \operatorname{curl}\psi^* \in H^0_G(\Omega) \text{ a} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{curl}\psi^* \cdot \mu\, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mu\, dx \quad \forall \mu \in H^0_0(\Omega). \end{cases}$$

Nejprve dokážeme, že χ^* splňuje rovnici v (3.34). Nechť $\overline{\mu} \in H^0_0(\Omega)$ je dáno. Potom existuje funkce $\overline{\psi} \in H^1(\Omega)$, $\overline{\psi} = 0$ na $\Gamma(\alpha) \cup \hat{\Gamma}$ taková, že $\overline{\mu} = \operatorname{curl}\overline{\psi}$. Z věty o hustotě pak plyne existence posloupnosti $\{\overline{\psi}_\kappa\}$, $\overline{\psi}_\kappa \in C^\infty(\overline{\Omega})$ takové, že

$$(3.35)\qquad \begin{cases} \overline{\psi}_\kappa \to \overline{\psi} \text{ v } H^1(\Omega),\ \kappa \to 0+, \\ \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\overline{\psi}_\kappa, \overline{\Gamma}(\alpha) \cup \overline{\hat{\Gamma}}) > 0 \end{cases}$$

pro libovolné $\kappa > 0$, t.j. $\overline{\psi}_\kappa$ aproximují $\overline{\psi}$ a nulují se v blízkosti $\overline{\Gamma}(\alpha) \cup \overline{\hat{\Gamma}}$.

Nechť $\kappa > 0$ je pevně dáno. Protože $\overline{\psi}_\kappa$ je hladká, můžeme zkonstruovat její po částech lineární Lagrangeovu interpolaci $r_h\overline{\psi}_\kappa \in V_h(\Omega)$ nad $\mathcal{T}_h$, která může být užita jako testovací funkce v úloze $(\tilde{\mathcal{M}})^H_h$:

$$(3.36)\qquad \begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{curl}\psi^*_h \cdot \operatorname{curl}(r_h\overline{\psi}_\kappa)\, dx + \langle w_H, \frac{\partial}{\partial s_H}(r_h\overline{\psi}_\kappa)\rangle_H \\ = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl}(r_h\overline{\psi}_\kappa)\, dx. \end{aligned}$$

Z definice $r_h\overline{\psi}_\kappa$ plyne, že hraniční člen $\langle\, ,\, \rangle_H$ v (3.36) je roven 0 pro h, H dostatečně malé za předpokladu, že κ zůstává neměnné. To je zřejmé z toho, že pro h, H dostatečně malá, $\Gamma(\alpha_H)$ neprotíná $\operatorname{supp}(r_h\overline{\psi}_\kappa)$, což plyne ze stejnoměrné konvergence $\alpha_H \rightrightarrows \alpha$ v $\overline{\Gamma}_1$ a $(3.35)_2$. Je tedy $\dfrac{\partial}{\partial s_H}(r_h\overline{\psi}_\kappa) = 0$ na $\overline{\Gamma}(\alpha_H)$. Limitním přechodem $h \to 0+$ a poté $\kappa \to 0+$ v (3.36) dostáváme:

$$(3.37)\qquad \int_\Omega \operatorname{curl}\psi^* \cdot \overline{\mu}\, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \overline{\mu}\, dx,$$

jak plyne z (3.33), $(3.35)_1$ a toho, že $r_h\overline{\psi}_\kappa \to \overline{\psi}_\kappa$ v $H^1(\Omega)$, $h \to 0+$.

Na závěr ukážeme, že $\operatorname{curl}\psi^* \in H^0_G(\Omega)$, t.j.

$$\langle v, \operatorname{curl}\psi^* \cdot \nu\rangle = \langle G, v\rangle$$

je splněno pro libovolné $v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$. Z (3.8) víme, že toto je ekvivalentní

$$(3.38)\qquad \int_\Omega \chi^* \cdot \operatorname{grad} z\, dx = \langle G, v\rangle \quad \forall z \in V(\omega),$$

kde $z = v$ na $\Gamma(\alpha)$. Z definice problému $(\tilde{\mathcal{M}})^H_h$ plyne, že

$$\langle v_H, \frac{\partial\psi^*_h}{\partial s_H}\rangle_H = \langle G_H, v_H\rangle_H \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H),$$

což je ekvivalentní

$$(3.39)\qquad \int_{\omega(\alpha_H)} \chi^*_h \cdot \operatorname{grad} z_H\, dx = \langle G_H, v_H\rangle_H$$

pro každé $z_H \in V_H(\Omega)$ (viz (3.30)) takové, že $z_H = v_H$ na $\Gamma(\alpha_H)$ a $\chi_h^* := \operatorname{curl} \psi_h^*$.

Nechť $\overline{v} \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ je dáno a $\overline{z} \in V(\omega)$ je takové, že $\overline{z} = \overline{v}$ na $\Gamma(\alpha)$. Je známo, že $\overline{z}$ může být rozšířeno z ω na oblast Ω takovým způsobem, že rozšířená funkce (označme ji opět $\overline{z}$) patří do prostoru $H_0^1(\Omega)$. Dále nechť $\{\overline{z}_H\}$, $\overline{z}_H \in V_H(\Omega)$ je taková posloupnost, že

$$\overline{z}_H \to \overline{z} \text{ v } H_0^1(\Omega), \ H \to 0+ . \tag{3.40}$$

Limitním přechodem $h, H \to 0+$ v (3.39) dostaneme, že

$$\int_{\omega(\alpha_H)} \chi_h^* \cdot \operatorname{grad} \overline{z}_H \, dx \to \int_{\omega(\alpha)} \chi^* \cdot \operatorname{grad} \overline{z} \, dx,$$

vezmeme-li do úvahy (3.33), (3.40) a to, že $\alpha_H \rightrightarrows \alpha$ v $\overline{\Gamma}_1$. Pravá strana rovnice (3.39) konverguje k

$$\langle G_H, \overline{v}_H \rangle_H \to \langle G, \overline{v} \rangle \quad (\overline{v}_H = \text{ stopa}_{\Gamma(\alpha_H)} \overline{z}_H),$$

jak plyne z předpokladu (3.29). V důsledku toho je χ^* řešením $(\hat{\mathcal{D}})$ a celá posloupnost $\{\operatorname{curl} \psi_h^*\}$ konverguje slabě k funkci χ^*, neboť toto řešení je jediné. $\square$

Nechť ψ_h^*, ψ^* jsou stejné jako ve větě 3.4 a označme: $\lambda_h^* := \operatorname{curl} \psi_h^* + \lambda_0$ a $\lambda^* := \operatorname{curl} \psi^* + \lambda_0$, kde λ_0 je zvolené partikulární řešení úlohy (3.2) na Ω. Potom z vět 3.1, 3.4 a poznámky 3.2 okamžitě obdržíme

Věta 3.5 *Nechť jsou splněny (3.27)–(3.29). Potom*

$$\lambda_h^* \rightharpoonup \lambda^* \ v \ (L^2(\Omega))^2, \ h \to 0+,$$

kde $\lambda^*\big|_\omega = \operatorname{grad} u$, $\lambda^*\big|_\Xi = \operatorname{grad} \tilde{u}$ *a* u, $\tilde{u}$ *jsou řešeními úloh* $(\mathcal{P})$ *a* (3.9) *na* ω, *resp.* Ξ.

Abychom dokázali silnou konvergenci, můžeme předpokládat, že existuje taková posloupnost $\{\tilde{\psi}_\kappa\}$, $\tilde{\psi}_\kappa \in H^1(\Omega)$, že

$$\tilde{\psi}_\kappa \to \tilde{\psi} \text{ v } H^1(\Omega), \quad \kappa \to 0+, \tag{3.41}$$

kde $\tilde{\psi} \in V^G(\Omega)$ (viz poznámku 3.3) a κ je parametr obecně nezávislý na h, H, ale platí pro něj, že $\kappa \to 0+ \ \Leftrightarrow \ h, H \to 0+$.

Definujme *novou aproximaci* úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})$ následovně:

$$\left\{ \begin{aligned} & \qquad \textit{Najdi } (\psi_h^0, w_H) \in V_h(\Omega) \times \Lambda_H(\alpha_H) \textit{ takové, že} \\ & \int_\Omega \operatorname{curl} \psi_h^0 \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx + \langle w_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx \\ & \qquad\qquad - \int_\Omega \operatorname{curl} \tilde{\psi}_\kappa \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx \quad \forall \psi_h \in V_h(\Omega), \\ & \langle v_H, \frac{\partial \psi_h^0}{\partial s_H} \rangle_H = 0 \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H). \end{aligned} \right. \tag{3.42}$$

Je vidět, že ψ_h^0 je řešením problému:

$$
(3.43)\begin{cases} \quad \textit{Najdi } \psi_h^0 \in V_h^0(\Omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{curl}\psi_h^0 \cdot \operatorname{curl}\psi_h \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl}\psi_h \, dx - \int_\Omega \operatorname{curl}\tilde{\psi}_\kappa \cdot \operatorname{curl}\psi_h \, dx \\ \hfill \forall \psi_h \in V_h^0(\Omega). \end{cases}
$$

Položme $\psi_{h\kappa}^* := \tilde{\psi}_\kappa + \psi_h^0$ a dokažme, že $\{\psi_{h\kappa}^*\}$ již konverguje silně k funkci $\tilde{\psi} + \psi^0$ v $H^1(\Omega)$, kde ψ^0 řeší (3.22). Z (3.41) a (3.43) plyne, že $\{\psi_h^0\}$ je omezená v $H^1(\Omega)$-normě a tedy

$$
\psi_h^0 \rightharpoonup \overline{\psi}^0 \text{ v } H^1(\Omega) \tag{3.44}
$$

pro nějakou (stejně značenou) podposloupnost a nějakou funkci $\overline{\psi}^0 \in H^1(\Omega)$. Užitím stejného postupu jako v důkazu předchozí věty můžeme dokázat, že $\overline{\psi}^0 \in V^0(\Omega)$ (viz poznámku 3.3) a limitním přechodem $h, \kappa \to 0+$ v (3.43) obdržíme:

$$
\int_\Omega \operatorname{curl}\overline{\psi}^0 \cdot \operatorname{curl}\psi \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl}\psi \, dx - \int_\Omega \operatorname{curl}\tilde{\psi} \cdot \operatorname{curl}\psi \, dx \qquad \forall \psi \in V^0(\Omega).
$$

To znamená, že $\overline{\psi}^0 = \psi^0$ a funkce $\psi^* := \tilde{\psi} + \psi^0 \in V^G(\Omega)$ řeší úlohu (3.21) a z (3.44) vidíme, že vybraná posloupnost $\{\psi_{h\kappa}^*\}$ konverguje slabě k ψ^*. Protože však ψ^* je jediné, nejen vybraná, ale celá posloupnost $\{\psi_{h\kappa}^*\}$ slabě konverguje k ψ^*. Nyní ještě ukažme, že ψ_h^0 konverguje silně k ψ^0. Z (3.43) a (3.22) plyne:

$$
\begin{aligned} |\psi_h^0|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \operatorname{curl}\psi_h^0 \cdot \operatorname{curl}\psi_h^0 \, dx \;\longrightarrow\; & -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl}\psi^0 \, dx \\ & -\int_\Omega \operatorname{curl}\tilde{\psi} \cdot \operatorname{curl}\psi^0 \, dx = |\psi^0|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}
$$

Odtud, z (3.41) a (3.44) pak plyne silná konvergence $\{\psi_{h\kappa}^*\}$ k ψ^* v $H^1(\Omega)$-normě. Poznamenejme však, že $\psi_{h\kappa}^*$ obecně nepatří do množiny $V_h^{G_H}(\Omega)$.

Konečně položme

$$
\lambda_{h\kappa}^* := \operatorname{curl}(\tilde{\psi}_\kappa + \psi_h^0) + \lambda_0.
$$

Z předchozí analýzy plyne:

Věta 3.6 *Nechť jsou splněny* (3.27)–(3.29) *a* (3.41). *Potom*

$$
\lambda_{h\kappa}^* \to \lambda^* \textit{ v } (L^2(\Omega))^2, \quad h, \kappa \to 0+,
$$

přičemž λ^* *je stejné jako ve větě* 3.5.

Nyní si uvedeme příklady různých aproximací G_H funkcionálu G splňující předpoklad spojitosti (3.29). Připomeňme, že $G := g - \lambda_0 \cdot \nu$, kde λ_0 je zvolené partikulární řešení úlohy (3.2) na Ω. Označme $\tilde{g}$ následující rozšíření g z $\Gamma(\alpha)$ do celé oblasti Ω:

$$
\tilde{g}(x_1, x_2) = g \circ \alpha(x_2) := g(\alpha(x_2), x_2), \quad x_2 \in \Gamma_1. \tag{3.45}
$$

Varianta 1 Nechť funkce $G\circ\alpha$ je *spojitá* v $\overline{\Gamma}_1$. Definujme

$$\langle G_H, v_H\rangle_H := \int_{\Gamma_1} r_H(G\circ\alpha)\; v_H\circ\alpha_H\sqrt{1+(\alpha_H')^2}\,dx_2, \tag{3.46}$$

kde $r_H(G\circ\alpha)$ je po částech lineární Lagrangeova interpolace funkce $G\circ\alpha$ na $\mathcal{D}_H$ a $v_H \in \Lambda_H(\alpha_H)$. Potom platí:

Lemma 3.4 *Nechť* $G\circ\alpha \in C(\overline{\Gamma}_1)$ *a* $\alpha \in C^{1,1}(\overline{\Gamma}_1)$. *Potom aproximace* G_H *definovaná pomocí* (3.46) *splňuje* (3.29).

Důkaz. Nechť

$$z_H \to z \quad \text{v } H_0^1(\Omega),\ H\to 0+, \tag{3.47}$$

kde $z_H \in V_H(\Omega)$ (viz (3.30)), $v_H = \text{stopa}_{\Gamma(\alpha_H)}\, z_H$ a $v = \text{stopa}_{\Gamma(\alpha)}\, z$. Potom je jednoduché ukázat (viz [26]), že z (3.47) plyne:

$$v_H\circ\alpha_H \to v\circ\alpha \quad \text{v } L^2(\Gamma_1),\ H\to 0+\,. \tag{3.48}$$

Navíc

$$\begin{aligned}&\langle G_H, v_H\rangle_H - \langle G, v\rangle = \int_{\Gamma_1} r_H(G\circ\alpha)\; v_H\circ\alpha_H\sqrt{1+(\alpha_H')^2}\,dx_2\\
&-\int_{\Gamma_1} G\circ\alpha\; v\circ\alpha\sqrt{1+(\alpha')^2}\,dx_2 = \int_{\Gamma_1} r_H(G\circ\alpha)\; v_H\circ\alpha_H(\sqrt{1+(\alpha_H')^2}-\sqrt{1+(\alpha')^2})\,dx_2\\
&+\int_{\Gamma_1}(r_H(G\circ\alpha)\; v_H\circ\alpha_H - G\circ\alpha\; v\circ\alpha)\sqrt{1+(\alpha')^2}\,dx_2 := I_{1,H}+I_{2,H}.\end{aligned}$$

Poněvadž

$$r_H(G\circ\alpha) \to G\circ\alpha \quad \textit{(bodově) na } \Gamma_1, \quad H\to 0, \tag{3.49}$$

plyne z (3.48), (3.49) a Lebesgueovy věty, že $I_{2,H}\to 0$, $H\to 0+$. Analyzujme první člen $I_{1,H}$:

$$\begin{aligned}|I_{1,H}| &\le \int_{\Gamma_1} |r_H(G\circ\alpha)\; v_H\circ\alpha_H|\; |(\sqrt{1+(\alpha_H')^2}-\sqrt{1+(\alpha')^2}|\,dx_2\\
&\le c\int_{\Gamma_1} |v_H\circ\alpha_H|\;|\alpha_H'-\alpha'|\;|\alpha_H'+\alpha'|\,dx_2\\
&\le c\|v_H\circ\alpha_H\|_{L^2(\Gamma_1)}\|\alpha_H'-\alpha'\|_{L^2(\Gamma_1)} \longrightarrow 0+,\end{aligned}$$

vezmeme-li do úvahy omezenost funkce $r_H(G\circ\alpha)$, Lipschitzovskou spojitost funkce $x_1 \to \sqrt{1+x_1^2}$ na $\mathbb{R}^1$ a předpoklad, že $\alpha\in C^{1,1}(\overline{\Gamma}_1)$. □

K tomu, abychom zkonstruovali funkci $r_H(G\circ\alpha)$, je nutná znalost normálového vektoru ν. Níže je uvedena alternativní konstrukce G_H, ve které je ν nahrazeno jednotkovým vektorem vnější normály ν_H k $\partial\omega(\alpha_H)$, který může být jednoduše spočten.

Varianta 2 Nechť $\lambda_0 = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)})$ je partikulární řešení úlohy (3.2) na Ω definované následovně:

$$\lambda_0^{(1)}(x_1,x_2) = -\int f(x_1,x_2)\,dx_1,\ \ \lambda_0^{(2)} \equiv 0 \quad \text{v } \Omega$$

a předpokládejme, že $\lambda_0^{(1)} \in C(\overline{\Omega})$. Dále nechť

$$(3.50) \qquad \langle G_H, v_H \rangle_H := \int_{\Gamma_1} (\tilde{g} - r_H(\lambda_0^{(1)} \circ \alpha_H)\nu_H^{(1)})\ v_H \circ \alpha_H \sqrt{1 + (\alpha_H')^2}\, dx_2,$$

kde $\nu_H = (\nu_H^{(1)}, \nu_H^{(2)})$ a $\tilde{g}$ je definováno pomocí (3.45). Protože $\nu_H^{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_H')^2}}$ a $r_H(\lambda_0^{(1)} \circ \alpha_H) = r_H(\lambda_0^{(1)} \circ \alpha)$, můžeme psát (3.50) v následujícím tvaru:

$$\langle G_H, v_H \rangle_H = \int_{\Gamma_1} \tilde{g}\, v_H \circ \alpha_H \sqrt{1 + (\alpha_H')^2}\, dx_2 - \int_{\Gamma_1} r_H(\lambda_0^{(1)} \circ \alpha)\ v_H \circ \alpha_H\, dx_2.$$

Postupujíce stejně jako v důkazu lemmatu 3.4 můžeme dokázat

Lemma 3.5 *Nechť* $\tilde{g}, \lambda_0^{(1)} \circ \alpha \in C(\overline{\Gamma}_1)$ *a* $\alpha \in C^{1,1}(\overline{\Gamma}_1)$. *Potom* G_H *definované pomocí* (3.50) *splňuje* (3.29).

Nyní si ukážeme, jak zkonstruovat posloupnost $\{\tilde{\psi}_\kappa\}$ splňující podmínku (3.41), která garantuje silnou konvergenci posloupnosti $\{\lambda_{h\kappa}^*\}$ k λ^*.

Nechť $\alpha \in C^{1,1}(\overline{\Gamma}_1)$, $g \circ \alpha \in H^1(\overline{\Gamma}_1)$ a nechť funkce ψ je definovaná vztahem

$$\psi(x_2) = \int_0^{x_2} \tilde{g} \sqrt{1 + (\alpha')^2}\, d\tau.$$

Z předpokladů na $g \circ \alpha$ a α pak plyne, že $\psi \in H^2(\Gamma_1)$ a proto její rozšíření z Γ_1 na Ω definované vztahem:

$$\tilde{\psi}(x_1, x_2) := \psi(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega$$

patří do $H^2(\Omega)$. Navíc $\dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s} = g$ na $\Gamma(\alpha)$. Dále můžeme předpokládat, že $\tilde{\psi} = 0$ na $\hat{\Gamma}$ (pokud ne, můžeme přenásobit $\tilde{\psi}$ vhodnou funkcí, která tento požadavek zrealizuje) a tudíž $\tilde{\psi} \in V^G(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Posloupnost $\{\tilde{\psi}_\kappa\}$ splňující (3.41) je tvořena např. po částech lineárními Lagrangeovými interpolacemi funkce $\tilde{\psi}$ nad $\mathcal{T}_h$, t.j.

$$\tilde{\psi}_\kappa := r_h \tilde{\psi} \in V_h(\Omega)$$

a $\kappa = h$.

Poznámka 3.7 Jestliže je splněna LBB-podmínka, můžeme odvodit řád konvergence aproximací řešení. Z důvodu jednoduchosti předpokládejme, že funkce α je po částech lineární a její uzly patří do $\mathcal{D}_H$ pro libovolné $H > 0$. Jinými slovy $\omega(\alpha)$ je *polygonální* a $\alpha_H = \alpha \quad \forall H > 0$. Nechť $\tilde{b} : H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) \times V(\Omega) \to \mathbb{R}^1$, kde $V(\Omega)$ je definováno pomocí (3.20), je bilineární forma daná vztahem:

$$(3.51) \qquad \tilde{b}(v, \psi) = \langle v, \frac{\partial \psi}{\partial s} \rangle = \int_\omega \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{curl} \psi\, dx = -\langle \frac{\partial v}{\partial s}, \psi \rangle,$$

přičemž $w \in V(\omega)$ je taková, že $w = v$ na $\Gamma(\alpha)$ a $\dfrac{\partial \psi}{\partial s}$, $\dfrac{\partial v}{\partial s} \in H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ jsou tečné derivace funkcí ψ a v podél $\Gamma(\alpha)$. Nahrazením členu $\langle v, \dfrac{\partial \psi}{\partial s} \rangle$ za $-\langle \dfrac{\partial v}{\partial s}, \psi \rangle$ ve formulaci $(\tilde{\mathcal{M}})$ vidíme, že ψ^* řeší eliptický problém

$$-\triangle \psi^* = \mathcal{F} \text{ v } \Omega \cup \Xi \text{ (ve smyslu distribucí)}$$

s $\mathcal{F} \in (V(\Omega))' \cup (V(\Xi))'$ a navíc splňuje následující dvě podmínky na $\Gamma(\alpha)$:

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \psi^*}{\partial \nu}\right] = \frac{\partial w}{\partial s}, \\ &\frac{\partial \psi^*}{\partial s} = G, \end{aligned} \right. \tag{3.52}$$

kde $\left[\frac{\partial \psi^*}{\partial \nu}\right]$ značí skok normálové derivace na $\Gamma(\alpha)$. Protože obecně $\frac{\partial w}{\partial s} \neq 0$ na $\Gamma(\alpha)$, tak nejlepší, co můžeme očekávat je, že $\psi^* \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. Je jednoduché ukázat, že

$$\sup_{\substack{\psi \in V(\Omega), \\ \psi \neq 0}} \frac{\langle \frac{\partial v}{\partial s}, \psi \rangle}{|\psi|_{1,\Omega}} \geq \beta^* \| \frac{\partial v}{\partial s} \|_{-1/2,\Gamma(\alpha)}$$

platí s konstantou $\beta^* > 0$, která nezávisí na $v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$. Abychom to dokázali, uvažujme následující eliptické okrajové úlohy v ω a Ξ:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\triangle \psi_1 &=& 0 \text{ v } \omega, \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \nu} &=& \dfrac{\partial v}{\partial s} \text{ na } \Gamma(\alpha), \\ \psi_1 &=& 0 \text{ na } \partial\omega \setminus \Gamma(\alpha), \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\triangle \psi_2 &=& 0 \text{ v } \Xi, \\ \psi_2 &=& \psi_1 \text{ na } \Gamma(\alpha), \\ \psi_2 &=& 0 \text{ na } \partial\Xi \setminus \overline{\Gamma}(\alpha). \end{array} \right.$$

Potom funkce

$$\overline{\psi} = \left\langle \begin{array}{ll} \psi_1 & \text{v} \quad \omega, \\ \psi_2 & \text{v} \quad \Xi \end{array} \right.$$

patří do $V(\Omega)$. Navíc $|\psi_2|_{1,\Xi} \leq c|\psi_1|_{1,\omega}$ pro nějakou konstantu $c > 0$ a tedy

$$|\overline{\psi}|_{1,\Omega} \leq c|\psi_1|_{1,\omega}. \tag{3.53}$$

Nyní z (3.53) a z toho, že $|\psi_1|_{1,\omega} = \|\frac{\partial v}{\partial s}\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)}$, jak plyne z (3.11), dostáváme:

$$\sup_{\substack{\psi \in V(\Omega), \\ \psi \neq 0}} \frac{\langle \frac{\partial v}{\partial s}, \psi \rangle}{|\psi|_{1,\Omega}} \geq \frac{\langle \frac{\partial v}{\partial s}, \overline{\psi} \rangle}{|\overline{\psi}|_{1,\Omega}} = \frac{\langle \frac{\partial v}{\partial s}, \psi_1 \rangle}{|\overline{\psi}|_{1,\Omega}} = \frac{|\psi_1|^2_{1,\omega}}{|\overline{\psi}|_{1,\Omega}} \geq \beta^* \| \frac{\partial v}{\partial s} \|_{-1/2,\Gamma(\alpha)}.$$

Označme $\tilde{\Lambda}_H(\alpha)$ prostor definovaný následovně (připomeňme, že $\Lambda_H(\alpha)$ je definován pomocí (3.24) pro $\alpha = \alpha_H \quad \forall H > 0$):

$$\tilde{\Lambda}_H(\alpha) := \frac{\partial}{\partial s}(\Lambda_H(\alpha)) = \{\eta_H \in L^2(\Gamma(\alpha)) \mid \quad \eta_H \circ \alpha \textit{ je po částech konstantní na } \mathcal{D}_H \textit{ a } \int_{\Gamma(\alpha)} \eta_H \, ds = 0\}.$$

Mezi prvky z $\tilde{\Lambda}_H(\alpha)$ a $\Lambda_H(\alpha)$ existuje následující jednoznačný vztah:

$$v_H \leftrightarrow \eta_H \Leftrightarrow \eta_H = \frac{\partial v_H}{\partial s}, \quad v_H \in \Lambda_H(\alpha), \; \eta_H \in \tilde{\Lambda}_H(\alpha) \tag{3.54}$$

a tudíž úloha $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ může být zapsána v následující ekvivalentní formě (viz poznámku 3.5):

$$\text{(3.55)}\qquad \begin{cases} \textit{Najdi } (\psi_h^*, \eta_H^*) \in V_h(\Omega) \times \tilde{\Lambda}_H(\alpha) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{curl} \psi_h^* \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx - \langle \eta_H^*, \psi_h \rangle = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx \quad \forall \psi_h \in V_h(\Omega), \\ -\langle \eta_H, \psi_h^* \rangle = \langle G_H, v_H \rangle \quad \forall \eta_H \in \tilde{\Lambda}_H(\alpha), \end{cases}$$

kde $\eta_H = \dfrac{\partial v_H}{\partial s}$ a $v_H \in \Lambda_H(\alpha)$ (vzhledem k tomu, že $\Gamma(\alpha_H) = \Gamma(\alpha)$ $\forall H > 0$, platí $\langle\, ,\, \rangle_H = \langle\, ,\, \rangle$).

Nechť je splněna LBB-podmínka. Potom (viz [7] a věta 1.2) existuje konstanta $c > 0$ nezávislá na h a taková, že:

$$\text{(3.56)}\qquad \begin{aligned} \|\psi^* - \psi_h^*\|_{1,\Omega} + \|\frac{\partial w}{\partial s} - \eta_H^*\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)} \leq c\{\|\psi^* - \psi_h\|_{1,\Omega} \\ + \|\frac{\partial w}{\partial s} - \eta_H\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)}\} \end{aligned}$$

platí pro libovolné $\psi_h \in V_h(\Omega)$ a $\eta_H \in \tilde{\Lambda}_H(\alpha)$.

Předpokládejme, že $\psi^* \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ a $\dfrac{\partial w}{\partial s} \in L^2(\Gamma(\alpha))$, pak

$$\text{(3.57)}\qquad \inf_{\psi_h \in V_h(\Omega)} \|\psi^* - \psi_h\|_{1,\Omega} \leq c h^{1/2-\varepsilon}$$

a

$$\text{(3.58)}\qquad \inf_{\eta_H \in \tilde{\Lambda}_H(\alpha)} \|\frac{\partial w}{\partial s} - \eta_H\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)} \leq c H^{1/2}.$$

Poslední odhad plyne z toho, že $\displaystyle\int_{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial w}{\partial s} \, ds = 0$ a $L^2(\Gamma(\alpha))$-projekce funkce $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ na prostor po částech konstantních funkcí na $\mathcal{D}_H$ patří do $\tilde{\Lambda}_H(\alpha)$. Protože $H/h \geq 1$, dostaneme z (3.56)–(3.58), že

$$\text{(3.59)}\qquad \|\psi^* - \psi_h^*\|_{1,\Omega} + \|\frac{\partial w}{\partial s} - \eta_H^*\|_{-1/2,\Gamma(\alpha)} \leq c H^{1/2-\varepsilon}.$$

Z (3.59) je nyní snadné určit řád konvergence přibližných řešení $\lambda_h^* := \operatorname{curl} \psi_h^* + \lambda_0$ k $\lambda^* := \operatorname{curl} \psi^* + \lambda_0$:

Věta 3.7 *Nechť* $\psi^* \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial s} \in L^2(\Gamma(\alpha))$ *a nechť je splněna* LBB-*podmínka. Potom*

$$\text{(3.60)}\qquad \|\lambda^* - \lambda_h^*\|_{0,\Omega} \leq c H^{1/2-\varepsilon}.$$

Důkaz. Přímý důsledek (3.59). □

Algebraický tvar úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ vede opět na soustavu lineárních algebraických rovnic typu (1.7). Ovšem v tomto případě se spočtou prvky matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a vektorů $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ následovně:

$$a_{ij} = \int_\Omega \operatorname{curl}\varphi_i \cdot \operatorname{curl}\varphi_j \, dx = \int_\Omega \operatorname{grad}\varphi_i \cdot \operatorname{grad}\varphi_j \, dx,$$
$$i, j = 1, \dots, n;\ n = \dim V_h(\Omega),$$
$$b_{kj} = \int_{\Gamma(\alpha_H)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s_H} z_k \, ds, \quad g_k = \int_{\Gamma(\alpha_H)} G_H z_k \, ds,\ k = 1, \dots, m;$$
$$j = 1, \dots, n;\ m = \dim \Lambda_H(\alpha_H),$$
$$f_j = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl}\varphi_j \, dx,\ j = 1, \dots, n,$$

kde $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ a $\{z_k\}_{k=1}^m$ jsou Courantovy bázové funkce $V_h(\Omega)$ a $\Lambda_H(\alpha_H)$. Symboly $\mathbf{u}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ z (1.7) budou označovat vektory uzlových hodnot funkcí ψ_h^* a $-w_H$.

Poznámka 2.4 i způsob řešení soustavy (1.7) uvedený v odstavci 2.1 zůstávají platné i v tomto případě.

3.2 Neumannova okrajová úloha

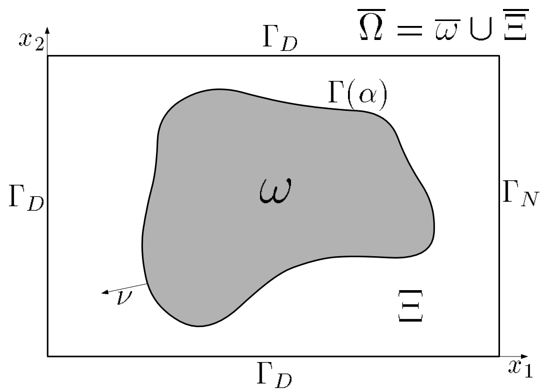
Přístup prezentovaný v předchozím odstavci můžeme jednoduše přenést i na čistě Neumannovu okrajovou úlohu:

$$(\mathcal{P})' \qquad \begin{cases} -\triangle u = f & \text{v} \quad \omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{na} \quad \partial\omega \end{cases}$$

nebo ekvivalentně:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } u \in H^1(\omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}\varphi \, dx = \int_\omega f\varphi \, dx + \int_{\partial\omega} g\varphi \, ds \quad \forall \varphi \in H^1(\omega), \end{cases}$$

kde $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^2(\partial\omega)$ a $\omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega$ (viz obr. 3.4). Přitom musí být splněna podmínka $\int_\omega f \, dx + \int_{\partial\omega} g \, ds = 0$ zajišťující



Obr. 3.4.

existenci řešení. Navíc řešení je určeno až na konstantu.

V dalším budeme značit symbolem $\Gamma(\alpha)$ *celou hranici oblasti* ω *a prostor* $V(\omega)$ *bude totožný s* $H^1(\omega)$, *t.j.* $\Gamma(\alpha) := \partial\omega$ *a* $V(\omega) := H^1(\omega)$*!* Při tomto značení zůstávají definice prostoru $K_{f,g}(\omega)$ (viz (3.1)) a formulace duální úlohy $(\tilde{\mathcal{D}})$ stejné jako v případě smíšené Dirichletovy-Neumannovy úlohy. Výše uvedená podmínka existence řešení znamená, že množina $K_{f,g}(\omega)$ je neprázdná. V platnosti zůstává i věta 3.1.

Podobně jako v předchozím odstavci nahradíme problém $(\tilde{\mathcal{D}})$ ekvivalentní formulací, která je vhodnější z výpočetního hlediska. Nechť $\lambda_0 \in (L^2(\omega))^2$ je partikulární řešení diferenciální rovnice (3.2) v ω. Potom libovolné $\mu \in K_{f,g}(\omega)$ můžeme psát ve tvaru $\mu = \lambda_0 + \chi$, kde $\chi \in K_{0,G}(\omega)$ a $G := g - \lambda_0 \cdot \nu$ na $\Gamma(\alpha)$. Dosazením tohoto vztahu do $(\tilde{\mathcal{D}})$ dostaneme novou úlohu pro složku χ:

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } \chi^* \in K_{0,G}(\omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\omega \chi^* \cdot \mu \, dx = -\int_\omega \lambda_0 \cdot \mu \, dx \quad \forall \mu \in K_{0,0}(\omega). \end{cases}$$

Opět platí, že $\lambda_0 + \chi^* = \operatorname{grad} u$ v ω a $u \in V(\omega)$ řeší $(\mathcal{P})$. Poznamenejme, že jednou z výhod duální formulace je to, že má jediné řešení na rozdíl od primární formulace.

Nyní opět přeformulujeme úlohu $(\mathcal{D})$ na úlohu novou, definovanou na větší (fiktivní) oblasti $\Omega \supset \overline{\omega}$ tak, aby se její řešení zúžené na původní oblast ω shodovalo s řešením úlohy $(\mathcal{D})$.

Nechť Ω je oblast obdélníkového tvaru znázorněná na obr. 3.4. Na hranici $\partial\Omega$ budou předepsány smíšené Dirichletovy-Neumannovy okrajové podmínky, aby primární úloha definovaná na doplňku reálné oblasti a současně duální úloha formulovaná na Ω byly regulární. Z tohoto důvodu rozdělíme hranici $\partial\Omega$ na části Γ_D a Γ_N s předepsanou Dirichletovou, resp. Neumannovou okrajovou podmínkou (viz obr. 3.4). Dále nechť $\lambda_0 \in (L^2(\Omega))^2$ je taková, že (3.2) je splněno na celé oblasti Ω. Označme

$$\begin{aligned} H^0(\operatorname{div}, \Omega) &= \{\mu \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div}\mu = 0 \text{ v } \Omega,\ \mu \cdot \nu = 0 \text{ na } \Gamma_N\}, \\ H^0_G(\Omega) &= \{\mu \in H^0(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mu \cdot \nu = G \text{ na } \Gamma(\alpha)\}. \end{aligned}$$

Místo úlohy $(\mathcal{D})$ uvažujme problém $(\hat{\mathcal{D}})$ definovaný v Ω:

$$(\hat{\mathcal{D}}) \qquad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } \chi^* \in H^0_G(\Omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \chi^* \cdot \mu \, dx = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^0_0(\Omega), \end{cases}$$

kde $H^0_0(\Omega) := H^0_G(\Omega)$ s $G = 0$ na $\Gamma(\alpha)$. Opět platí, že problém $(\hat{\mathcal{D}})$ má jediné řešení $\chi^* \in H^0_G(\Omega)$ a navíc $\chi^*|_\omega$ řeší $(\mathcal{D})$.

Poznámka 3.9 (interpretace $\chi^*|_\Xi$) Podobně jako v poznámce 3.2 z teorie duality vyplývá, že $(\chi^* + \lambda_0)|_\Xi = \operatorname{grad} \tilde{u}$, kde $\tilde{u}$ je jediné řešení úlohy:

$$(3.61) \qquad \begin{cases} -\triangle \tilde{u} = f & \text{v} \quad \Xi, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\nu}} = -g & \text{na} \quad \Gamma(\alpha), \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\nu}} = \lambda_0 \cdot \tilde{\nu} & \text{na} \quad \Gamma_N, \\ \tilde{u} = 0 & \text{na} \quad \Gamma_D, \end{cases}$$

přičemž $\tilde{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Xi$.

Nechť $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ je definován pomocí (3.4) s $V(\omega) = H^1(\omega)$. Podmínku $\mu\cdot\nu = G$ na $\Gamma(\alpha)$ vyskytující se v definici prostoru $H^0_G(\Omega)$ zahrneme do formulace opět pomocí Lagrangeových multiplikátorů definovaných na $\Gamma(\alpha)$. Tímto obdržíme úlohu $(\hat{\mathcal{M}})$ z odstavce 3.1, v níž užijeme výše definovaných prostorů $H^0(\mathrm{div}, \Omega)$ a $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$. Tuto úlohu dále přeformulujeme pomocí proudových funkcí. Opět využijeme toho, že platí:

$$H^0(\mathrm{div}, \Omega) = \mathrm{curl}\, V(\Omega), \tag{3.62}$$

kde

$$V(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \quad \psi = 0 \text{ na } \Gamma_N\}. \tag{3.63}$$

Užijeme-li (3.62) v $(\hat{\mathcal{M}})$, dostaneme formulaci $(\tilde{\mathcal{M}})$ založenou na proudových funkcích:

$$(\tilde{\mathcal{M}}) \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\psi^*, w) \in V(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma(\alpha)) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{curl}\,\psi^* \cdot \mathrm{curl}\,\psi\, dx + \langle w, \frac{\partial \psi}{\partial s}\rangle = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \mathrm{curl}\,\psi\, dx \quad \forall \psi \in V(\Omega), \\ \langle v, \dfrac{\partial \psi^*}{\partial s}\rangle = \langle G, v\rangle \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma(\alpha)), \end{array} \right.$$

kde význam symbolů $\dfrac{\partial}{\partial s}$ a $\langle\, ,\, \rangle$ je stejný jako v případě smíšené Dirichletovy-Neumannovy úlohy. Dosazením $v := 1$ do druhé rovnice v $(\tilde{\mathcal{M}})$ dostaneme podmínku existence řešení $(\tilde{\mathcal{M}})$ ve tvaru:

$$\langle G, 1\rangle = 0, \tag{3.64}$$

což je zřejmé z toho, že

$$\langle 1, \frac{\partial \psi^*}{\partial s}\rangle = -\langle \frac{\partial 1}{\partial s}, \psi^*\rangle = 0.$$

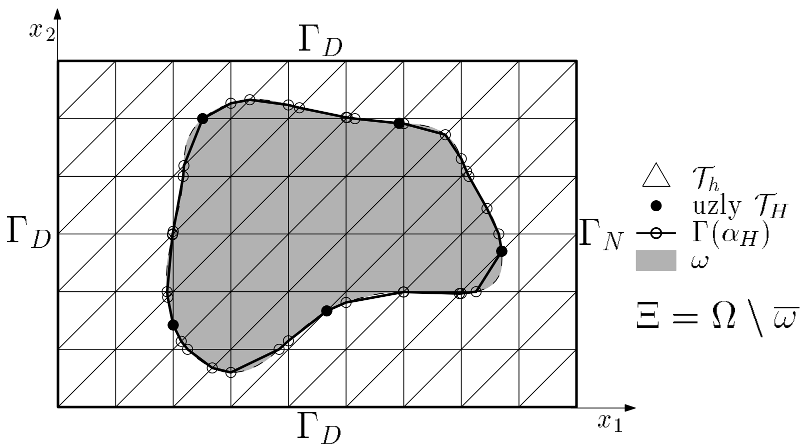
Poznamenejme, že tato podmínka je automaticky splněna, jak plyne z definice G a Greenovy věty.

Přejděme nyní k aproximaci smíšené variační formulace $(\tilde{\mathcal{M}})$. Nechť $\{\mathcal{T}_h\}$, $h \to 0+$ je opět regulární systém triangulací oblasti $\overline{\Omega}$ (viz obr. 3.5). Pro dané $\mathcal{T}_h$ definujeme prostor

$$V_h(\Omega) = \{\psi_h \in C(\overline{\Omega}) \mid \quad \psi_h \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,\ \psi_h = 0 \text{ na } \Gamma_N\},$$

t.j. $V_h(\Omega)$ obsahuje všechny spojité, po částech lineární funkce nad $\mathcal{T}_h$ a nulující se na Γ_N. Systém $\{V_h(\Omega)\}$ aproximuje prostor $V(\Omega)$ definovaný vztahem (3.63). V dalším popíšeme konstrukci aproximace prostoru $\Lambda := H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$.

Nejdříve sestrojíme polygonální aproximaci $\Gamma(\alpha_H)$ hranice $\Gamma(\alpha)$. Tato je jednoznačně určena pomocí průsečíků $\Gamma(\alpha)$ se stranami $\mathcal{T}_h$, jak je vidět na obr. 3.5.



Obrázek 3.5.

Dále rozdělíme $\Gamma(\alpha_H)$ na vzájemně disjunktní části S_i o délce $|S_i| \doteq H \geq 3h$ tak, aby konce úseků S_i ležely na meziprvkových hranicích (viz obr. 3.5). Systém všech takových $\{S_i\}_{i=1}^m$ označíme $\mathcal{T}_H$ a definujeme prostor $\Lambda_H(\alpha_H)$ následovně:

$$\Lambda_H(\alpha_H) = \{v_H \in C(\Gamma(\alpha_H)) \mid \quad v_H\big|_S \in P_1(S) \quad \forall S \in \mathcal{T}_H\},$$

t.j. $\Lambda_H(\alpha_H)$ obsahuje všechny spojité, po částech lineární funkce na $\mathcal{T}_H$. Aproximace $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})$ je definována následovně:

$$(\tilde{\mathcal{M}})_h^H \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad \textit{Najdi } (\psi_h^*, w_H) \in V_h(\Omega) \times \Lambda_H(\alpha_H) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{curl} \psi_h^* \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx + \langle w_H, \frac{\partial \psi_h}{\partial s_H} \rangle_H = -\int_\Omega \lambda_0 \cdot \operatorname{curl} \psi_h \, dx \\ \hfill \forall \psi_h \in V_h(\Omega), \\ \langle v_H, \dfrac{\partial \psi_h^*}{\partial s_H} \rangle_H = \langle G_H, v_H \rangle_H \quad \forall v_H \in \Lambda_H(\alpha_H), \end{array} \right.$$

kde $G_H \in L^2(\Gamma(\alpha_H))$ je vhodná aproximace $G \in H^{-1/2}(\Gamma(\alpha))$ a význam symbolů s_H, $\dfrac{\partial}{\partial s_H}$ a $\langle\, , \rangle_H$ je opět stejný jako u smíšené Dirichletovy-Neumannovy úlohy. K tomu, aby tato úloha měla řešení, je opět nutné a postačující, aby

$$\langle G_H, 1 \rangle_H = 0, \tag{3.65}$$

jak plyne z druhé rovnosti v $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$, dosadíme-li za $v_H := 1$. Ukážeme si jednu z možných konstrukcí G_H splňující (3.65). Předpokládejme, že $G \in C(\Gamma(\alpha))$ a nechť G_H^* je její po částech lineární Lagrangeova interpolace sestrojená nad $\mathcal{T}_H$ (viz poznámku 2.14). Potom funkce

$$G_H := G_H^* - \delta/L,$$

kde

$$\delta := \langle G_H^*, 1\rangle_H = \int_{\Gamma(\alpha_H)} G_H^*\, ds,$$

$$L := \int_{\Gamma(\alpha_H)} ds,$$

splňuje (3.65). Současně předpokládáme, že podíl $|\delta/L|$ je "dostatečně malý".

Algebraická formulace i způsob výpočtu prvků matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a vektorů $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ jsou stejné jako v případě smíšené Dirichletovy-Neumannovy okrajové úlohy.

3.3 Numerická realizace a příklady

V příkladech, které následují, ilustrujeme užití právě popsané metody k řešení modelové smíšené Dirichletovy-Neumannovy (příklad 3.1) a čistě Neumannovy (příklad 3.2) okrajové úlohy. Tyto jsou opět zvoleny tak, aby jejich řešení bylo snadno vyjádřitelné v analytickém tvaru.

Příklad 3.1 Uvažujme následující smíšenou Dirichletovu-Neumannovu úlohu:

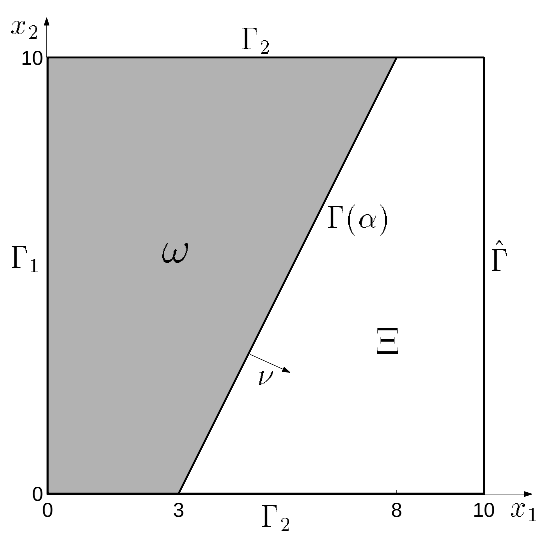
$$(\mathcal{P})_1 \qquad \begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{v } \omega,\ \omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{na } \Gamma(\alpha), \end{cases}$$

kde

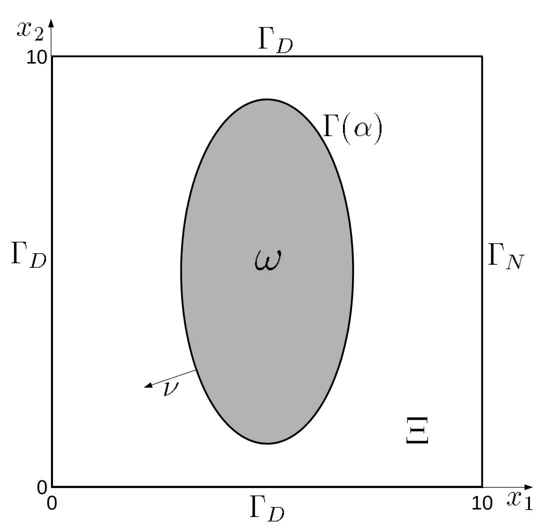
$$(3.66) \qquad f = -\triangle(u_d|_\omega) \in L^2(\omega),\ g = \frac{\partial}{\partial \nu}(u_d|_\omega) \in L^2(\Gamma(\alpha)),$$

$$u_d(x_1, x_2) = x_1(L_{x_1} - x_1)^2 x_2(L_{x_2} - x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ a } L_{x_1} = L_{x_2} = 10.$$

Tvar oblasti ω a rozklad hranice $\partial\omega$ na části Γ_1, Γ_2 a $\Gamma(\alpha)$ jsou patrné z obrázku



Obrázek 3.6.



Obrázek 3.7.

3.6, přičemž hranice $\Gamma(\alpha)$ je popsána grafem funkce

$$\alpha(x_2) = (x_2 + 6)/2, \quad x_2 \in [0, 10].$$

Z (3.66) a z toho, že $u_d = 0$ na $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ okamžitě vyplývá, že $u_d\big|_\omega$ je řešením úlohy $(\mathcal{P})_1$.

Příklad 3.2 Pomocí stejné metody řešme Neumannovu úlohu (viz odstavec 3.2)

$$(\mathcal{P})_2 \qquad \begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{v } \omega,\ \omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{na } \Gamma(\alpha) = \partial\omega, \end{cases}$$

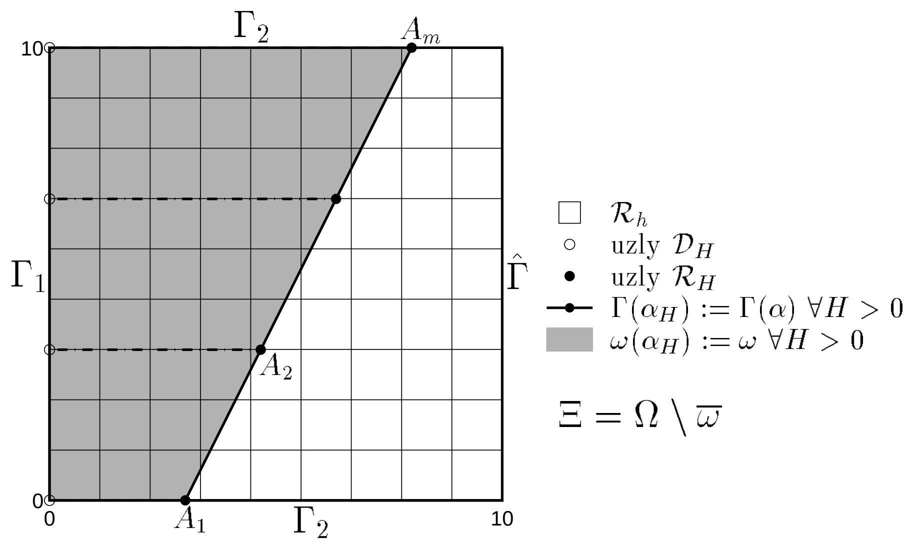
kde f, g a u_d jsou definovány stejně jako v předchozím příkladě. Tvar oblasti ω je znázorněn na obrázku 3.7 a její hranice $\Gamma(\alpha) = \partial\omega$ je popsána implicitní funkcí

$$\frac{(x_1 - L_{x_1}/2)^2}{4} + \frac{(x_2 - L_{x_2}/2)^2}{16} = 1,$$

kde $L_{x_1} = L_{x_2} = 10$. Z (3.66) ihned vyplývá, že $u_d\big|_\omega$ je řešením úlohy $(\mathcal{P})_2$.

Numerická realizace příkladu 3.1

Nechť fiktivní oblast Ω je tvaru $\Omega = (0,10) \times (0,10)$. Z důvodů uvedených v poznámce 2.10 použijeme při konkrétní numerické realizaci opět rektangulace $\mathcal{R}_h$ fiktivní oblasti $\overline{\Omega}$ namísto triangulací (viz obr. 3.8). Každé $\mathcal{R}_h$ přiřadíme prostor $V_h(\Omega)$,



Obrázek 3.8.

kde

$$V_h(\Omega) = \{\psi_h \in C(\overline{\Omega}) \ \mid \ \psi_h\big|_R \in Q_1(R) \ \ \forall R \in \mathcal{R}_h, \quad \psi_h = 0 \text{ na } \hat{\Gamma}\},$$

t.j. $V_h(\Omega)$ obsahuje všechny spojité, po částech bilineární funkce na $\mathcal{R}_h$ nulující se na $\hat{\Gamma}$. Prostor $\Lambda_H(\alpha_H) := \Lambda_H(\alpha)$ je definován následovně:

$$\Lambda_H(\alpha) = \{v_H \in C(\overline{\Gamma}(\alpha)) \ \mid \ v_H\big|_{\overline{A_i A_{i+1}}} \in P_1(\overline{A_i A_{i+1}}),$$
$$i = 1, \dots, m-1;\ v_H(A_1) = v_H(A_m) = 0\}.$$

Přitom způsob volby dělení $\mathcal{D}_H$ a bodů A_i, $i = 1, \ldots, m$ je patrný z obrázku 3.8. Aproximací spojité formulace $(\tilde{\mathcal{M}})$ je úloha $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ z odstavce 3.1, kde za $V_h(\Omega)$ a $\Lambda_H(\alpha)$ vezmeme výše uvedené prostory. K aproximaci funkce G použijeme variantu 1 s tím rozdílem, že po částech lineární Lagrangeovu interpolaci funkce $G \circ \alpha$ nebudeme konstruovat nad $\mathcal{D}_H$, ale nad jemnějším dělením hranice Γ_1, jež je určeno průsečíky $\Gamma(\alpha)$ se stranami $\mathcal{R}_h$ promítnutými na Γ_1. Tímto obdržíme výrazně přesnější aproximaci funkce $G \circ \alpha$. Sestavení matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a vektorů $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ a také postup při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic typu (1.7) zůstávají beze změn, t.j. vyřešíme soustavu (2.7) pouze v duální proměnné a primární veličiny dopočítáme.

Označme

$$E^0_{rel}(h) = \|\lambda^*_h - \operatorname{grad} u_d\|_{0,\omega_h} / \|\operatorname{grad} u_d\|_{0,\omega_h}$$

relativní chybu řešení $\lambda^*_h|_{\omega_h}$ v normě $L^2(\omega_h)$. Připomeňme ještě, že oblast ω_h je tvořena elementy R, jež celé leží v ω. Přitom $\lambda^*_h := \operatorname{curl} \psi^*_h + \lambda_0$ a $\lambda^* := \operatorname{curl} \psi^* + \lambda_0$, kde ψ^*_h a ψ^* jsou první složky řešení problémů $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ a $(\tilde{\mathcal{M}})$. Z interpretace $\lambda^*|_\Xi$ (viz poznámku 3.2) je ihned vidět, že $\lambda^*|_\Xi$ a tedy i $\lambda^*_h|_\Xi$ jsou závislé na volbě λ_0 a proto bude zajímavé zjistit, jaký má tato volba vliv na relativní chybu řešení $\lambda^*_h|_{\omega_h}$. Z tohoto důvodu začněme s analýzou závislosti $E^0_{rel}(h)$ na h a současně na volbě λ_0.

V dalším budeme uvažovat následující volby λ_0:

$$(i)\lambda_0 = [-\textstyle\int f\,dx, 0]; \qquad (ii)\lambda_0 = [0, -\textstyle\int f\,dy];$$
$$(iii)\lambda_0 = [-\textstyle\int f_1\,dx, -\int f_2\,dy]; \quad (iv)\lambda_0 = [-\textstyle\int f_2\,dx, -\int f_1\,dy],$$

kde

$$f = -\triangle(u_d|_\Omega) = -\frac{\partial^2(u_d|_\Omega)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2(u_d|_\Omega)}{\partial x_2^2} := f_1 + f_2 \text{ v } \Omega.$$

Z tabulky 3.1 je patrné, že volba λ_0 má velký vliv nejen na velikost relativní

Krok h	Var. (i)	Var. (ii)	Var. (iii)	Var. (iv)
10/32	8.0742e-02	6.3070e-03	4.4128e-02	3.7390e-02
10/64	3.8858e-02	1.6083e-03	2.1176e-02	1.7800e-02
10/128	1.8442e-02	4.0339e-04	9.9966e-03	8.4628e-03
Řád konv.	1.0652	1.9834	1.0711	1.0717

Tab. 3.1. Relativní chyba E^0_{rel} řešení $\lambda^*_h|_{\omega_h}$ v závislosti na h a volbě λ_0.

chyby řešení E^0_{rel}, ale i na řád konvergence. Zvláště markantní je rozdíl mezi (ii) a zbývajícími variantami. To je dáno tím, že v případě varianty (ii) platí pro funkci $\tilde{u}$, jež je řešením (3.9) na Ξ, že

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\nu}} = \lambda_0 \tilde{\nu} = [0, -\textstyle\int f\,dy] \cdot [1,0]^T = 0 = \frac{\partial u_d}{\partial \tilde{\nu}} \quad \text{na } \hat{\Gamma}.$$

Z poznámky 3.2 tudíž plyne, že $\tilde{u} = u_d|_{\Xi}$ v Ξ a proto

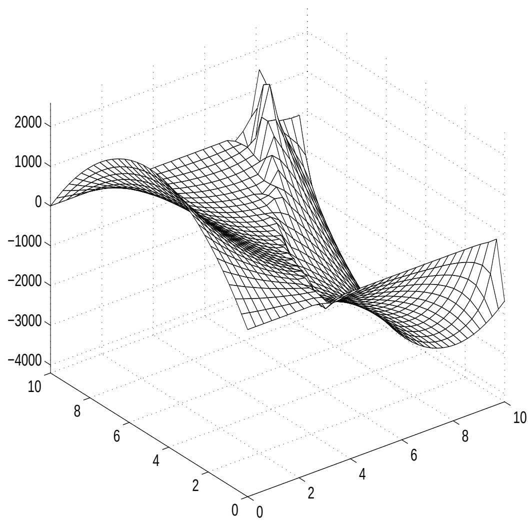
$$\lambda_h^* \to \lambda^* = \operatorname{grad}(u_d|_{\Omega}) \text{ v } (L^2(\Omega))^2.$$

Ve větě 3.7 jsme při odvozování řádu konvergence vycházeli z toho, že řešení $\psi^* \in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, což mělo za následek, že výsledný řád konvergence přibližných řešení byl $1/2 - \varepsilon$. V případě varianty (ii) však funkce λ^* a tedy i ψ^* patří do $C^\infty(\overline{\Omega})$. Toto, jak můžeme vidět z tabulky 3.1, má pozitivní vliv na velikost řádu konvergence.

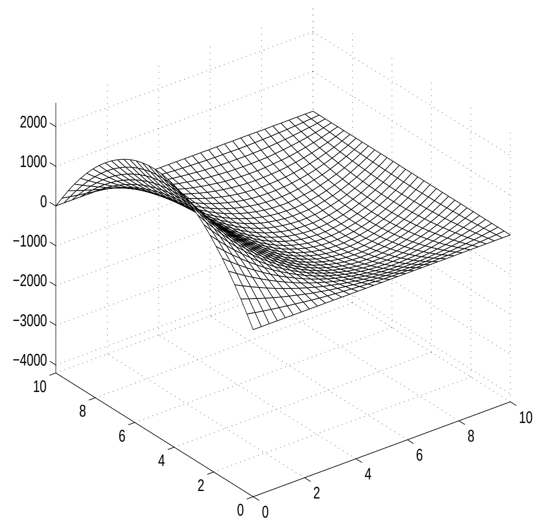
V dalším jsou pro různé volby λ_0 grafem, popř. tabulkou znázorněny:

- vypočtené řešení $\lambda_h^* := \operatorname{curl} \psi_h^* + \lambda_0$;
- odpovídající Lagrangeův multiplikátor w_H;
- počet iterací metody sdružených gradientů v závislosti na h;
- relativní chyba $E_{rel}^0(h)$ řešení $\lambda_h^*|_{\omega_h}$ v normě prostoru $(L^2(\omega_h))^2$;
- doba řešení soustavy (2.7) v závislosti na h;
- řád změny počtu iterací metody sdružených gradientů vzhledem k h;
- řád konvergence vypočtený z relativní chyby řešení $\lambda_h^*|_{\omega_h}$ v normě prostoru $(L^2(\omega_h))^2$;
- řád změny doby řešení soustavy (2.7) vzhledem k h.

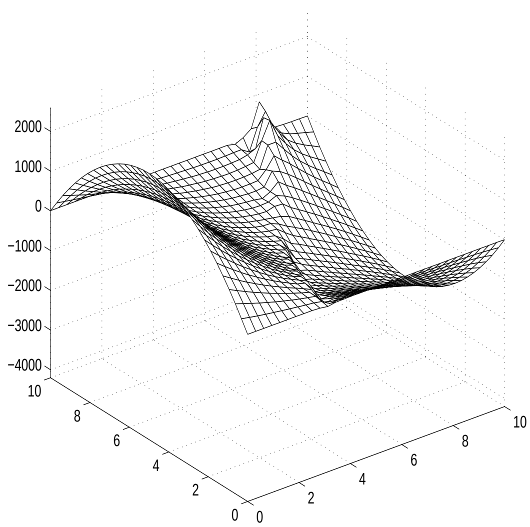
V následujících obrázcích je znázorněno vypočtené řešení $\lambda_h^* = \operatorname{curl} \psi_h^* + \lambda_0 = [\lambda_h^{*(1)}, \lambda_h^{*(2)}]$ pro různé volby λ_0 a v tabulce 3.2 jsou uvedeny uzlové hodnoty w_H. Přitom $(\psi_h^*, w_H) \in V_h(\Omega) \times \Lambda_H(\alpha)$ je řešením úlohy $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ pro $h = 10/32$, parametr v ukončovacím kritériu metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$ a $H/h \doteq 3$. Obrázky 3.9-12, resp. 3.13-16 zachycují první, resp. druhou složku funkce λ_h^*. Z obrázků 3.10 a 3.14 vidíme, že pouze v případě varianty (ii) volby λ_0 je řešení pěkně hladké na celé oblasti Ω a λ_h^* odpovídá aproximaci $\operatorname{grad} u_d$ na celé Ω.



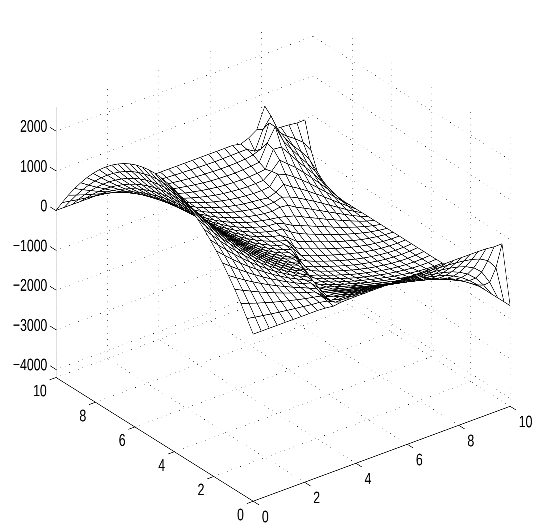
Obrázek 3.9. $\lambda_h^{*(1)}$, var. (i).



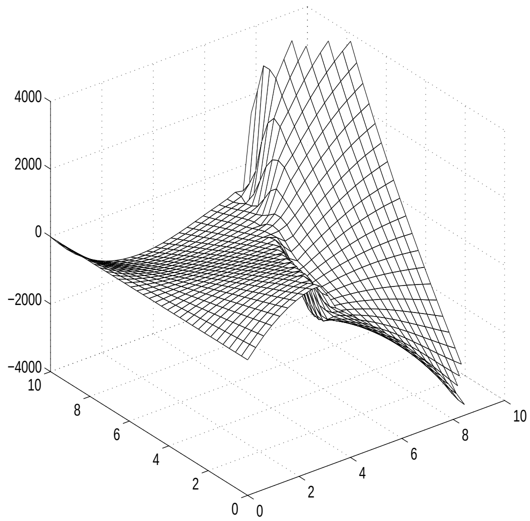
Obrázek 3.10. $\lambda_h^{*(1)}$, var. (ii).



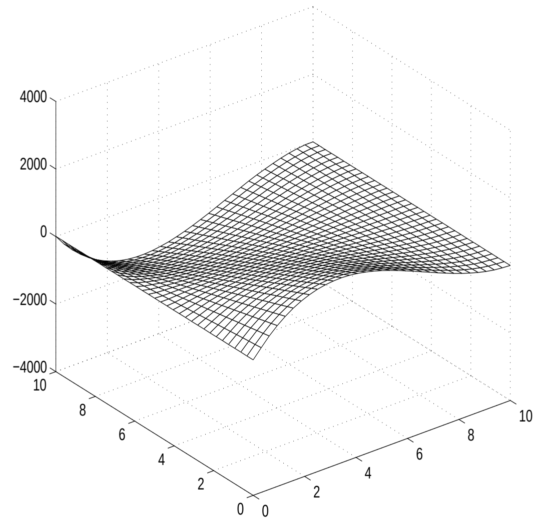
Obrázek 3.11. $\lambda_h^{*(1)}$, var. (iii).



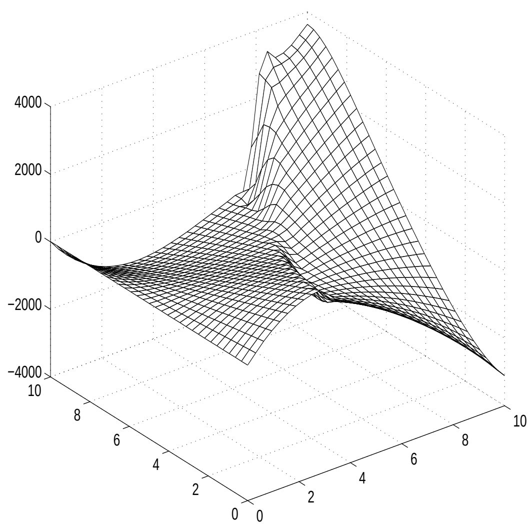
Obrázek 3.12. $\lambda_h^{*(1)}$, var. (iv).



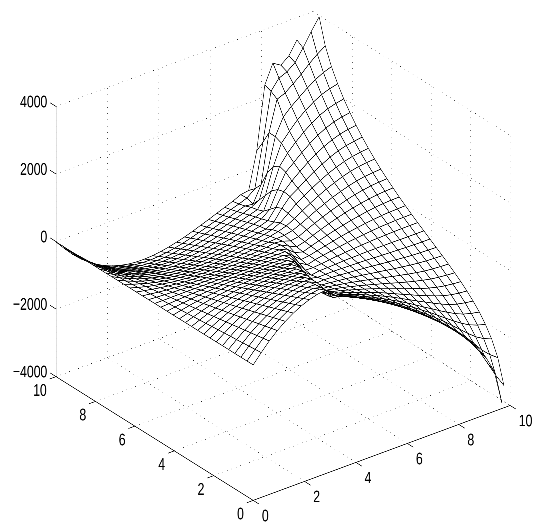
Obrázek 3.13. $\lambda_h^{*(2)}$, var. (i).



Obrázek 3.14. $\lambda_h^{*(2)}$, var. (ii).



Obrázek 3.15. $\lambda_h^{*(2)}$, var. (iii).



Obrázek 3.16. $\lambda_h^{*(2)}$, var. (iv).

V tabulce 3.2 jsou uvedeny uzlové hodnoty $w_i = w_H(A_i)$, $i = 2, \ldots, m-1$ vypočteného po částech lineárního LM w_H pro různé varianty λ_0. Přitom $m = 12$ a $w_1 = w_{12} = 0$, jak plyne z definice $\Lambda_H(\alpha)$. Z této tabulky je patrné, že v případě varianty (ii) jsou hodnoty w_i v absolutní hodnotě zhruba 1000x menší než pro ostatní volby λ_0. To plyne z toho, že $w_H \to w = (\tilde{u} - u)$ v $H^{1/2}(\Gamma(\alpha))$ a v případě varianty (ii) je tento rozdíl roven 0.

λ_0	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	Řád
(i)	0.09	0.26	0.43	0.65	0.82	0.93	1.03	1.03	0.91	0.65	$\cdot 10^4$
(ii)	-5.40	-4.74	-9.36	-4.88	-8.64	-12.37	-0.30	-14.11	3.64	-10.68	$\cdot 10^0$
(iii)	0.49	1.43	2.37	3.56	4.48	5.09	5.65	5.65	4.92	3.46	$\cdot 10^3$
(iv)	0.40	1.17	1.94	2.92	3.67	4.16	4.64	4.68	4.16	3.00	$\cdot 10^3$

Tab. 3.2. Odpovídající LM.

Další charakteristiky numerického řešení úlohy $(\mathcal{P})_1$

Z tabulek 3.3-7 je vidět, že počet iterací, doba řešení soustavy (2.7) (soustava lineárních algebraických rovnic pouze v duální proměnné) a odpovídající řády změn těchto charakteristik jsou téměř nezávislé na volbě λ_0. Závislost chyby řešení a řádu konvergence na λ_0 již byla analyzována v předchozím textu. Ještě připomeňme, že teoreticky odvozený řád konvergence je $1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (viz věta 3.7 pro případ triangulace $\overline{\Omega}$). Pokud ovšem uvažujeme pouze normu v prostoru $(L^2(\omega_h))^2$, vychází řád konvergence větší (viz tabulku 3.7).

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	10	6	8.0742e-02	3.0000e-02
10/64	4225	22	10	3.8858e-02	3.2000e-01
10/128	16641	46	15	1.8442e-02	2.9600e+00

Tab. 3.3. Volba (i).

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	10	7	6.3070e-03	3.5000e-02
10/64	4225	22	10	1.6083e-03	3.2000e-01
10/128	16641	46	15	4.0339e-04	2.9600e+00

Tab. 3.4. Volba (ii).

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	10	6	4.4128e-02	3.0000e-02
10/64	4225	22	10	2.1176e-02	3.2000e-01
10/128	16641	46	15	9.9966e-03	2.9600e+00

Tab. 3.5. Volba (iii)**.**

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	10	7	3.7390e-02	3.5000e-02
10/64	4225	22	10	1.7800e-02	3.2000e-01
10/128	16641	46	15	8.4628e-03	2.9600e+00

Tab. 3.6. Volba (iv)**.**

Řád	Var. (i)	Var. (ii)	Var. (iii)	Var. (iv)
změny počtu iterací	-0.6610	-0.5498	-0.6610	-0.5498
konvergence řešení v normě $(L^2(\omega_h))^2$	1.0652	1.9834	1.0711	1.0717
změny doby řešení soustavy (2.7)	-3.3315	-3.1023	-3.3098	-3.3171

Tab. 3.7.

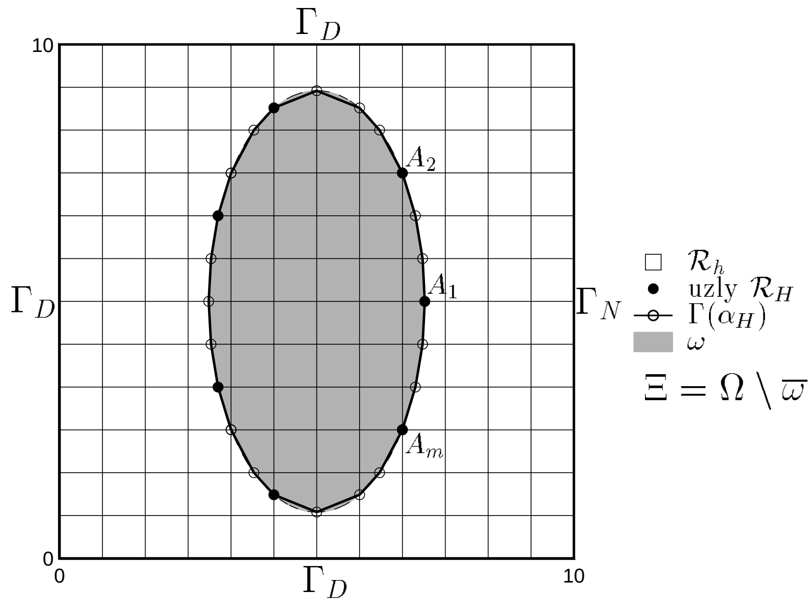
Numerická realizace příkladu 3.2

V tomto případě budeme opět pracovat s rektangulacemi $\mathcal{R}_h$ fiktivní oblasti $\overline{\Omega}$ tvaru $\Omega = (0,10) \times (0,10)$. Definice prostoru $V_h(\Omega)$ bude stejná jako v příkladě 3.1 s tím rozdílem, že $\hat{\Gamma}$ nahradíme Γ_N. Při konstrukci prostoru $\Lambda_H(\alpha_H)$ postupujeme stejně jako v případě triangulace $\overline{\Omega}$, t.j. nejdříve sestrojíme polygonální aproximaci $\Gamma(\alpha_H)$ hranice $\Gamma(\alpha)$. Tato je jednoznačně určena pomocí průsečíků $\Gamma(\alpha)$ se stranami $\mathcal{R}_h$ (viz obr. 3.17). Dále rozdělíme $\Gamma(\alpha_H)$ na vzájemně disjunktní části S_i o délce $|S_i| \doteq H \geq 3h$ tak, aby konce úseků S_i ležely na meziprvkových hranicích (viz obr. 3.17). Systém všech takových $\{S_i\}_{i=1}^m$ označíme $\mathcal{R}_H$ a definujeme prostor $\Lambda_H(\alpha_H)$ následovně:

$$\Lambda_H(\alpha_H) = \{v_H \in C(\Gamma(\alpha_H)) \mid \quad v_H|_S \in P_1(S) \quad \forall S \in \mathcal{R}_H\},$$

t.j. $\Lambda_H(\alpha_H)$ obsahuje všechny spojité, po částech lineární funkce na $\mathcal{R}_H$. Aproximací spojité formulace $(\tilde{\mathcal{M}})$ je úloha $(\tilde{\mathcal{M}})_h^H$ z odstavce 3.2, v níž užijeme právě zkonstruované prostory $V_h(\Omega)$ a $\Lambda_H(\alpha_H)$. K aproximaci funkce G použijeme její po částech lineární Lagrangeovu interpolaci zkonstruovanou nad $\mathcal{R}_H$ a následně modifikovanou tak, aby byla splněna podmínka (3.65) zajišťující existenci řešení (viz konec odstavce 3.2). Sestavení matic $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a vektorů $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ včetně řešení soustavy (1.7) je stejné jako v případě smíšené Dirichletovy-Neumannovy okrajové úlohy.

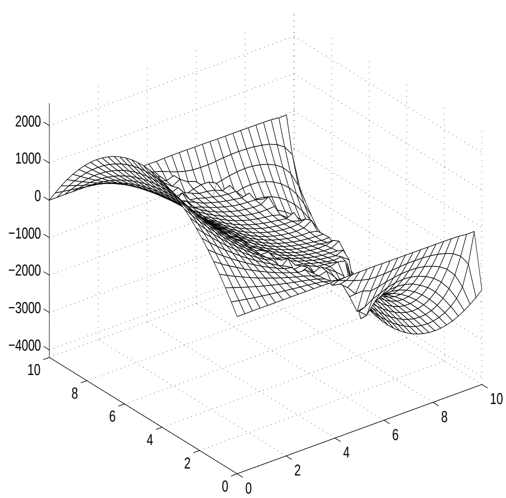
Z interpretace $\lambda^*|_\Xi$ v poznámce 3.9 víme, že $\lambda^*|_\Xi$ a tedy i $\lambda_h^*|_\Xi$ jsou opět závislé na volbě λ_0. Jelikož všechny závěry z analýzy chyby řešení λ_h^* v závislosti na volbě λ_0 jsou stejné jako v příkladě 3.1, nebudeme je již znovu opakovat.



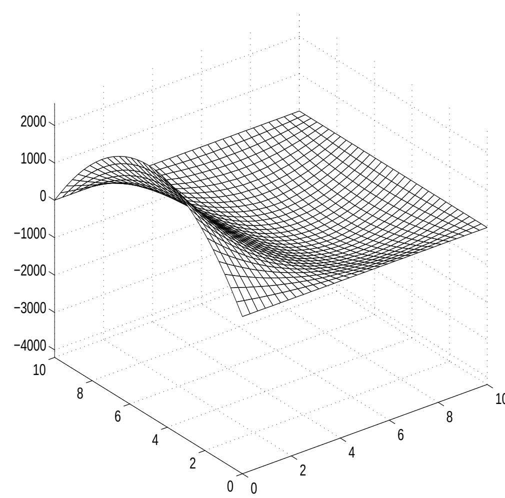
Obrázek 3.17.

V dalším znázorníme grafem, popř. tabulkou jednotlivé charakteristiky numerického řešení úlohy $(\mathcal{P})_2$, přičemž se omezíme pouze na varianty (i) a (ii) volby λ_0.

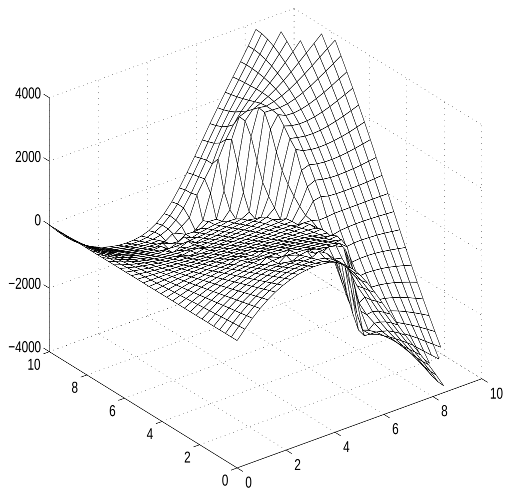
Na obrázcích 3.18-21 jsou vidět obě složky řešení $\lambda_h^* := \operatorname{curl} \psi_h^* + \lambda_0$ a v tabulce 3.8 jsou uvedeny uzlové hodnoty w_H pro zvolené varianty λ_0. Přitom $h = 10/32$, parametr v ukončovacím kritériu metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$ a $H/h \doteq 3$. Opět vidíme, že v případě varianty (ii) vychází složky řešení λ_h^* (obr. 3.19 a 3.21) pěkně hladké na celé oblasti Ω. Toto je způsobeno tím, že i zde $\lambda_h^* \to \operatorname{grad} u_d$ v $(L^2(\Omega))^2$, což plyne ze stejných úvah jako v předchozím příkladě.



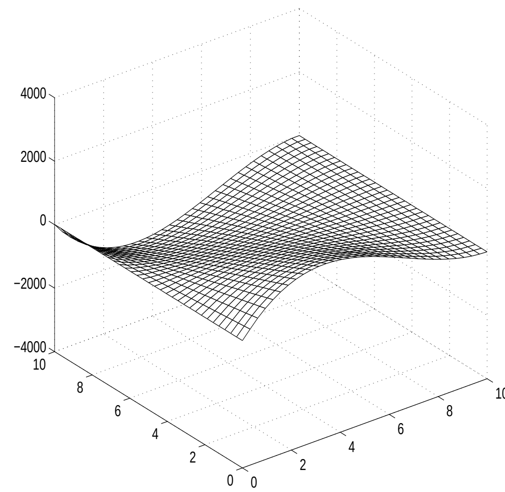
Obrázek 3.18. $\lambda_h^{*(1)}$, var. (i).



Obrázek 3.19. $\lambda_h^{*(1)}$, var. (ii).



Obrázek 3.20. $\lambda_h^{*(2)}$, var. (i).



Obrázek 3.21. $\lambda_h^{*(2)}$, var. (ii).

V následující tabulce jsou pro zvolené varianty λ_0 uvedeny uzlové hodnoty $w_i = w_H(A_i)$ vypočteného multiplikátoru w_H pro $i = 1, \ldots, m$ a $m = 20$ (viz obr. 3.17). Tyto hodnoty jsou v případě varianty (ii) opět řádově menší (bráno v absolutní hodnotě). Tento rozdíl ovšem již není tak markantní, poněvadž v tomto případě realizujeme předepsanou okrajovou podmínku pomocí hraničních LM na aproximaci $\Gamma(\alpha_H)$ hranice $\Gamma(\alpha)$ a ne přímo na $\Gamma(\alpha)$, jak tomu bylo v příkladě 3.1.

λ_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	Řád
(i)	5.85	4.77	2.62	-0.99	-3.83	-5.64	-5.73	-5.69	-5.65	-5.62	$\cdot 10^3$
(ii)	2.53	2.65	2.53	2.72	2.74	2.66	2.57	2.61	2.65	2.51	$\cdot 10^2$

λ_0	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}	w_{18}	w_{19}	w_{20}	Řád
(i)	-5.64	-5.62	-5.66	-5.69	-5.75	-5.51	-3.45	-0.32	3.07	5.01	$\cdot 10^3$
(ii)	2.59	2.57	2.51	2.52	2.54	2.50	2.46	2.48	2.53	2.40	$\cdot 10^2$

Tab. 3.8.

Další charakteristiky numerického řešení úlohy $(\mathcal{P})_2$

Z tabulek 3.9-11 je dále vidět, že realizace předepsané okrajové podmínky pomocí hraničních LM definovaných na aproximaci $\Gamma(\alpha_H)$ a nikoli na $\Gamma(\alpha)$ má za následek nárust chyby řešení $\lambda_h^*|_{\omega_h}$, což vede současně k poklesu odpovídajícího řádu konvergence. Navíc předepsaná okrajová podmínka není splněna přesně, ale pouze v již zmíněném slabém smyslu. Potřebný počet iterací metody sdružených gradientů a tedy i doba řešení soustavy (2.7) jsou taktéž větší oproti předchozímu příkladu. To je ovšem způsobeno tím, že se současně zvýšil i počet duálních proměnných.

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	20	11	1.3682e-001	5.5000e-02
10/64	4225	41	16	9.1868e-002	4.8000e-01
10/128	16641	82	23	6.7844e-002	4.3000e+00

Tab. 3.9. Volba (i).

Krok h	pč.prim.pr.	pč.du.pr.	pč.it.	$E^0_{rel}(h)$	čas [sec]
10/32	1089	20	11	3.9266e-003	5.5000e-02
10/64	4225	41	17	9.1824e-004	5.1000e-01
10/128	16641	82	26	2.9569e-004	4.8500e+00

Tab. 3.10. Volba (ii).

Řád	Var. (i)	Var. (ii)
změny počtu iterací	-0.5321	-0.6205
konvergence řešení v normě $(L^2(\omega_h))^2$	0.5060	1.8656
změny doby řešení soustavy (2.7)	-3.0816	-3.2925

Tab. 3.11.

Část II. Užití MFO v tvarové optimalizaci

V praxi se setkáváme s celou řadou úloh, jejichž geometrie má podstatný vliv na kvalitu výsledného produktu (strojírenství, hornictví atd.). Matematická disciplína zabývající se hledáním optimálního tvaru se nazývá *tvarová optimalizace*.

Tvarová optimalizace je částí teorie optimálního řízení, ve které kontrolní veličina souvisí s geometrií problému. Úlohy tvarové optimalizace sestávají ze dvou úrovní. Vnější úroveň je dána minimizací cenového funkcionálu pomocí vhodného minimalizačního algoritmu a vnitřní úroveň je tvořena stavovou úlohou, jejíž řešení potřebujeme k vyhodnocení cenového funkcionálu, popř. funkcí realizujících různá omezení a jejich derivací. Velká třída úloh tvarové optimalizace má následující abstraktní vyjádření:

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J(\omega^*, u(\omega^*)) = \min\limits_{\omega \in \mathcal{O}} J(\omega, u(\omega)), \end{cases}$$

kde

- $\mathcal{O}$ je *množina připustných oblastí* zahrnující všechny možné kandidáty, jež jsou obvykle podrobeny různým technologickým omezením (např. omezení na objem, na hladkost hranice atd.);
- $\omega \in \mathcal{O}$ je oblast mající význam řídící veličiny, jejíž geometrie reprezentuje daný fyzikální systém a ω^*, pokud existuje, značí *optimální oblast*;
- $u(\omega) \in V(\omega)$ je řešením stavové úlohy $(\mathcal{P}(\omega))$ popisující chování modelu. Ta je obvykle popsána *parciální diferenciální rovnicí* nebo *nerovnicí* formulovanou v $\omega \in \mathcal{O}$;
- J je *cenový funkcionál*, jehož výběr závisí na tom, jakou vlastnost chceme optimalizovat.

Existence řešení úlohy $(\mathbb{P})$ je rozebrána v [26] a [37].

Jelikož řešení $(\mathbb{P})$ nejsou obecně dostupná, nahradíme $(\mathbb{P})$ její aproximací $(\mathbb{P})_{\kappa h}$. Tato spočívá v diskretizaci množiny přípustných oblastí $\mathcal{O}$ a stavové úlohy $(\mathcal{P}(\omega))$ s parametry diskretizace κ, resp. h. Problém $(\mathbb{P})_{\kappa h}$ zapíšeme následovně:

$$(\mathbb{P})_{\kappa h} \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \omega_\kappa^* \in \mathcal{O}_\kappa \text{ takové, že} \\ J_h(\omega_\kappa^*, u_h(\omega_\kappa^*)) = \min\limits_{\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa} J_h(\omega_\kappa, u_h(\omega_\kappa)), \end{cases}$$

kde:

- $\mathcal{O}_\kappa$ je vhodná diskretizace $\mathcal{O}$ obsahující oblasti popsané konečným, vždy stejným počtem parametrů (např. po částech polynomiální aproximace hranice). Tento počet je charakterizován diskretizačním parametrem κ;
- $u_h(\omega_\kappa) \in V_h(\omega_\kappa)$ je řešením stavové úlohy $(\mathcal{P}(\omega_\kappa))_h$, která je obvykle aproximací $(\mathcal{P}(\omega))$ pomocí metody konečných prvků a $\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$ je vhodnou aproximací oblasti $\omega \in \mathcal{O}$. Diskretizační parametr h charakterizuje normu použité sítě v MKP;

- J_h je aproximace J, kterou dostaneme např. užitím metod numerické integrace.

Vztah mezi $(\mathbb{P})$ a $(\mathbb{P})_{\kappa h}$ je podrobně rozebrán v [26].

Ve většině případů je diskrétní stavová úloha dána rozsáhlou soustavou algebraických rovnic, které dostaneme užitím MKP k aproximaci $(\mathcal{P}(\omega))$. Volání dolní úrovně a tedy řešení příslušné soustavy algebraických rovnic se opakuje mnohokrát a proto není překvapující, že efektivnost řešení úlohy $(\mathcal{P}(\omega_\kappa))_h$ hraje důležitou roli v rámci celého výpočetního procesu. Následující kapitola je věnována řešení úloh tvarové optimalizace, kdy k efektivní realizaci stavové úlohy použijeme MFO. V kapitole 5 pak ilustrujeme užití metod tvarové optimalizace v kombinaci s MFO na řešení Bernoulliho úloh s volnou hranicí.

4 MFO v úlohách tvarové optimalizace

V této kapitole budeme analyzovat různé aspekty MFO při numerické realizaci úloh tvarové optimalizace. Její užití zvyšuje efektivnost vnitřní úrovně optimalizačního procesu a současně zjednodušuje implementaci úrovně vnější. Můžeme to vidět, porovnáme-li tento přístup s přístupem klasickým založeným na postupné deformaci hranice. Z tohoto důvodu nejdříve zmíníme klasický způsob řešení úloh tvarové optimalizace (odstavec 4.1) a následně přístup založený na MFO (odstavec 4.2). Užití MFO přináší ovšem i jednu nevýhodu a to, že výsledná úloha matematického programování *je obecně nehladká*. Z tohoto důvodu je odstavec 4.3 věnován algoritmům globální optimalizace, jež užívají k nalezení globálního minima pouze hodnoty cenové funkce a nikoli její drivace. Konečně v odstavci 4.4 ilustrujeme na několika modelových úlohách efektivnost užití MFO v tvarové optimalizaci.

4.1 Klasický přístup k úlohám tvarové optimalizace

Klasický způsob numerické realizace $(\mathbb{P})_{\kappa h}$ je založen na postupné deformaci hranice oblasti, přičemž nový tvar $\omega_\kappa^{(k+1)}$ je zkonstruován z předchozího tvaru $\omega_\kappa^{(k)}$ jeho vhodnou deformací:

$$\omega_\kappa^{(k+1)} = \mathcal{F}_\kappa^{(k)}(\omega_\kappa^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

kde $\mathcal{F}_\kappa^{(k)}$ je spojité prosté zobrazení takové, že

$$J_h(\omega_\kappa^{(k+1)}, u_h(\omega_\kappa^{(k+1)})) \leq J_h(\omega_\kappa^{(k)}, u_h(\omega_\kappa^{(k)})), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Jak jsme již zmínili, množina $\mathcal{O}_\kappa$ obsahuje oblasti určené konečným, stejně velkým počtem parametrů. Z tohoto důvodu libovolná $\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$ může být jednoznačně popsána vektorem $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$, který nazveme *vektorem diskrétních návrhových proměnných*. Nechť $\mathcal{T}_D : \mathcal{O}_\kappa \to \mathbb{R}^q$ je izomorfismus definovaný následovně:

$$\mathcal{T}_D(\omega_\kappa) = \boldsymbol{\alpha}, \quad \omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$$

a označme $\mathcal{U} := \mathcal{T}_D(\mathcal{O}_\kappa)$. Obdobně definujme izomorfismus $\mathcal{T}_S$ mezi prostory $V_h(\omega_\kappa)$ a $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{T}_S(v_h) = \mathbf{v}, \quad v_h \in V_h(\omega_\kappa),$$

kde $\mathbf{v}$ je vektor souřadnic funkce $v_h \in V_h(\omega_\kappa)$ vzhledem k bázi $V_h(\omega_\kappa)$.

Předpokládejme, že stavová úloha $(\mathcal{P}(\omega))$ je lineární a k její numerické realizaci je použita klasická metoda konečných prvků. Potom maticová forma $(\mathcal{P}(\omega_\kappa))_h$ vede na soustavu rovnic

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}), \tag{4.1}$$

kde $\mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha})$ je matice tuhosti, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor zatížení a $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor uzlových hodnot $u_h(\omega_\kappa)$. V tomto případě matice tuhosti $\mathbb{A}$ a vektor zatížení $\mathbf{F}$ jsou závislé na geometrii oblasti $\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$.

Algebraický tvar $(\mathbb{P})_{\kappa h}$ pro $\kappa, h > 0$ pevně zvolené vede na následující úlohu *nelineárního matematického programování*:

$$(\vec{\mathbb{P}}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Najdi } \boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^*, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}^*)) = \min\limits_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})), \end{array} \right.$$

kde $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})) := J_h(\mathcal{T}_D^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}_S^{-1}\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}))$, přičemž symboly $\mathcal{T}_D^{-1}$ a $\mathcal{T}_S^{-1}$ značí inverzní zobrazení k $\mathcal{T}_D$, resp. $\mathcal{T}_S$. Nevýhody tohoto přístupu jsou zřejmé. K získání nové konfigurace $\omega_\kappa^{(k+1)}$ musíme udělat následující kroky:

(i) znovu provést dělení nové oblasti na konečné prvky;

(ii) sestavit novou matici tuhosti a vektor zatížení;

(iii) řešit novou soustavu lineárních algebraických rovnic.

Tyto kroky se opakují mnohokrát, z čehož vyplývá, že tento přístup není obecně příliš efektivní.

4.2 MFO užitá k realizaci úloh tvarové optimalizace

K odstranění výše zmíněných nedostatků nebo alespoň k jejich potlačení použijeme MFO k numerické realizaci $(\mathcal{P}(\omega_\kappa))_h$. Tímto úplně obejdeme krok (i), jelikož všechny výpočty provádíme na pevné oblasti Ω a na jejím pevném dělení $\mathcal{T}_h$. To znamená, že Ω i $\mathcal{T}_h$ jsou *zcela nezávislé* na geometrii reálné oblasti. Důsledkem toho je, že matice tuhosti je *nezávislá* na vektoru diskrétních návrhových proměnných a nemusíme ji přepočítávat pro každou novou konfiguraci $\omega_\kappa^{(k+1)}$. Částečně tedy zjednodušíme i krok (ii).

Abstraktní schéma úloh tvarové optimalizace, jež užívají k řešení stavového problému metodu fiktivních oblastí, vypadá následovně:

$$(\hat{\mathbb{P}})_{\kappa h}^H \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Najdi } \omega_\kappa^* \in \mathcal{O}_\kappa \text{ takové, že} \\ J_h(\omega_\kappa^*, \hat{u}_h(\omega_\kappa^*)\big|_{\omega_\kappa^*}) = \min\limits_{\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa} J_h(\omega_\kappa, \hat{u}_h(\omega_\kappa)\big|_{\omega_\kappa}), \end{array} \right.$$

kde $\hat{u}_h(\omega_\kappa) \in V_h(\Omega)$ je řešením pomocí jedné z dříve uvedených metod fiktivních oblastí. Zde vstupuje do hry další diskretizační parametr H, který se vztahuje ke konstrukci diskrétních prostorů Lagrangeových multiplikátorů. Matematickou analýzu existence řešení ω_κ^* úlohy $(\hat{\mathbb{P}})_{\kappa h}^H$ a studium konvergence posloupnosti $\{\omega_\kappa^*\}$ k ω^* je možné nalézt v [26].

Připomeňme, že algebraická forma MFO založených na Lagrangeových multiplikátorech je následující (viz (1.7)):

$$(\vec{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha})) \qquad \begin{cases} \quad \text{Najdi } (\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \text{ takové, že} \\ \mathbb{A}\,\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbb{B}^T(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}), \\ \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}), \end{cases}$$

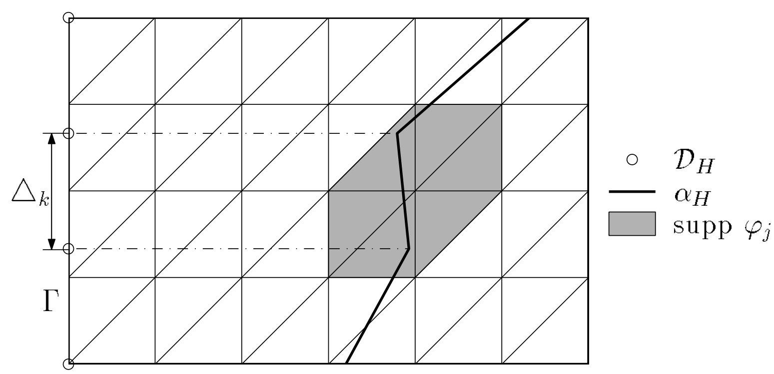
kde $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$, resp. $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor uzlových hodnot funkce $\hat{u}_h(\omega_\kappa)$, resp. Lagrangeového multiplikátoru $\lambda_H(\omega_\kappa)$ a $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$ je vektor diskrétních návrhových proměnných charakterizujících $\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$. Znovu zopakujme, že pouze matice $\mathbb{B}$ a pravá strana v $(\vec{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}))$ jsou závislé na $\boldsymbol{\alpha}$, nikoli však matice tuhosti $\mathbb{A}$. To znamená, že matice $\mathbb{A}$ může být spočtena pouze na začátku optimalizačního procesu a pak již zůstává nezměněna. Tvarová optimalizace s řešiči založenými na BLM-technice je studována v [15], [22], [36] aj. DLM-technika v tvarové optimalizaci byla použita v [25], [42] a dalších.

Nedílnou součástí každého optimalizačního procesu je analýza citlivosti, to jest studium diferencovatelnosti zobrazení, které řídící proměnné přiřadí řešení stavové úlohy. V následujícím se proto budeme zabývat diferencovatelností zobrazení $\mathbf{u} : \boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$, kde $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ je první složka řešení $(\vec{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}))$. Z formulace $(\vec{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}))$ je vidět, že

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbb{I} - \mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T(\boldsymbol{\alpha})(\mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T(\boldsymbol{\alpha}))^{-1}\,\mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha}))\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{4.2}$$

Předpokládáme-li, že zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ je dostatečně hladké, diferencovatelnost $\mathbf{u}$ závisí pouze na diferencovatelnosti zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$.

Začněme s metodou hraničních LM. Z důvodu jednoduchosti prezentace předpokládejme, že pouze část hranice je proměnná a že je realizována spojitou, po částech lineární funkcí α_H sestrojenou nad dělením $\mathcal{D}_H$ hranice Γ (viz obr. 4.1). Je zřejmé,



Obrázek 4.1.

že vektor návrhových proměnných $\boldsymbol{\alpha}$ může být ztotožněn s hodnotami funkce α_H v uzlech $\mathcal{D}_H$. Připomeňme, že prvky matice $\mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})$ spočteme následovně:

$$b_{kj}(\boldsymbol{\alpha}) := b_{kj}(\alpha_H) = \int_{S_k(\alpha_H)} \varphi_j \, ds = \int_{\triangle_k} \varphi_j \circ \alpha_H \sqrt{1 + (\alpha_H')^2}\, dx_2,$$

kde φ_j je j-tá Courantova bázová funkce $V_h(\Omega)$ a $S_k(\alpha_H)$ je k-tý přímý úsek α_H nad $\triangle_k \subset \Gamma$ (viz obr. 4.1).

Nechť β_H je další spojitá, po částech lineární funkce nad $\mathcal{D}_H$ a $\boldsymbol{\beta}$ odpovídající vektor návrhových proměnných. Spočítejme nyní směrovou derivaci $b'_{kj}(\alpha_H, \beta_H)$:

$$b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := b'_{kj}(\alpha_H, \beta_H) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\triangle_k} \varphi_j \circ (\alpha_H + t\beta_H)\sqrt{1 + (\alpha'_H + t\beta'_H)^2}\, dx_2\right)\Big|_{t=0+}.$$

Obdržíme:

$$b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\triangle_k} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}) \circ \alpha_H \sqrt{1 + (\alpha'_H)^2}\beta_H\, dx_2 + \int_{\triangle_k} \varphi_j \circ \alpha_H \frac{\alpha'_H \beta'_H}{\sqrt{1 + (\alpha'_H)^2}}\, dx_2. \tag{4.3}$$

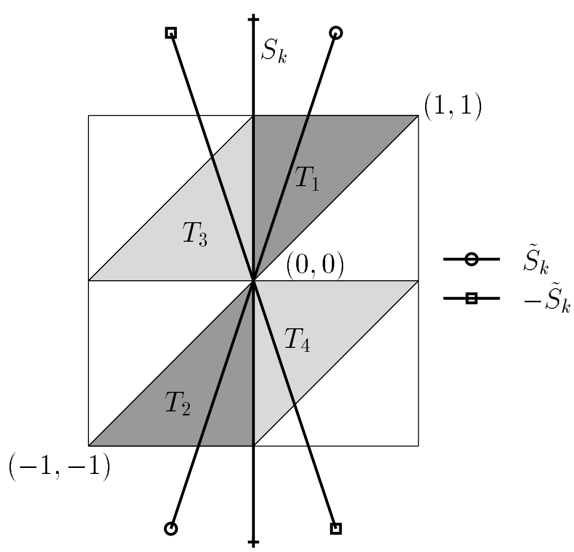
Z (4.3) je zřejmé, že pokud člen $(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}) \circ \alpha_H$ není definován na "podstatné" části $\triangle_k$, potom obecně platí:

$$b'_{kj}(\alpha_H, \beta_H) \neq -b'_{kj}(\alpha_H, -\beta_H),$$

t.j. funkce b_{kj} není v α_H spojitě diferencovatelná. Tato situace nastane tehdy, když úsek S_k má neprázdný průnik s konečně prvkovými hranicemi, jehož jednorozměrná Lebesgueova míra je kladná. Abychom to ukázali, uvažujme situaci znázorněnou na obrázku 4.2 pro případ triangulace $\overline{\Omega}$, kde bázová funkce φ_j je přiřazena uzlu $(0,0)$ čtvercové sítě s délkou kroku rovnou jedné. Označme $\varphi_j^{(i)} = \varphi_j|_{T_i}$, kde T_i, $i = 1, \ldots, 4$ jsou trojúhelníky, jež jsou částí nosiče φ_j. Potom je zřejmě

$$\varphi_j^{(1)} = 1 - x_2; \qquad \varphi_j^{(2)} = 1 + x_2;$$
$$\varphi_j^{(3)} = 1 + x_1 - x_2; \quad \varphi_j^{(4)} = 1 - x_1 + x_2.$$

Předpokládejme, že úsek S_k funkce α_H leží v konečně prvkové hranici oddělující trojúhelníky T_2 a T_3 od T_1 a T_4, t.j. $\alpha_H = 0$ nad $\triangle_k$. Spočítejme $b'_{kj}(\alpha_H, \beta_H)$, kde funkce β_H je reprezentovaná úsekem $\tilde{S}_k$ nad $\triangle_k$, který prochází bodem $(0,0)$ (viz obr. 4.2). Z (4.3) plyne, že $b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, kdežto $b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta}) = -2\int_0^1 \beta_H\, dx_2$,



Obrázek 4.2.

přičemž funkce $-\beta_H$ zůžená na $\triangle_k$ odpovídá úseku $-\tilde{S}_k$. Z této elementární analýzy vyplývá, že zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})$ není spojitě diferencovatelné. Není proto ani důvod očekávat, že zobrazení $\mathbf{u}: \ \boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$ je spojitě diferencovatelné.

Podobný výsledek obdržíme i v případě rektangulace $\overline{\Omega}$. Nechť R_i je čtvercový element obsahující T_i (viz obr. 4.2) a označme $\varphi_j^{(i)} = \varphi_j|_{R_i}$, $i = 1, \ldots, 4$, kde φ_j je odpovídající bázová po částech bilineární funkce. Potom

$$\varphi_j^{(1)} = 1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2; \quad \varphi_j^{(2)} = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2;$$
$$\varphi_j^{(3)} = 1 + x_1 - x_2 - x_1 x_2; \qquad \varphi_j^{(4)} = 1 - x_1 + x_2 - x_1 x_2.$$

Z (4.3) plyne, že $b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 2\int_0^1 \beta_H(x_2 - 1)\, dx_2$ a také $b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta}) = 2\int_0^1 \beta_H(x_2 - 1)\, dx_2$. Tudíž opět $b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq -b'_{kj}(\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta})$.

Uvažujme nyní metodu distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů. V tomto případě se projeví vliv locking efektu zmíněného nad poznámkou 2.7. Změníme-li oblast ω_κ tak, že množina $\Xi_{\kappa h}$ zůstane stejná, nezmění se ani řešení $u_h := \hat{u}_h|_{\omega_{\kappa h}}$ úlohy (2.4) s $\omega_h := \omega_{\kappa h}$. Přitom $\omega_{\kappa h}$ je oblast tvořená elementy, jež celé leží v ω_κ a $\Xi_{\kappa h} := \Omega \setminus \overline{\omega}_{\kappa h}$ (viz obr. 2.3 pro $\omega := \omega_\kappa$). Důsledkem toho je necitlivost funkce $\omega_{\kappa h} \mapsto J_h(\omega_{\kappa h}, \hat{u}_h(\omega_{\kappa h})|_{\omega_{\kappa h}})$ na změnu oblasti ω_κ. Toto má za následek patologické chování cenové funkce (nejen nediferencovatelnost, ale dokonce i její nespojitost) (viz obr. 4.10). Vliv locking efektu můžeme omezit tím, že uvažujeme dělení $\mathcal{T}_H$, resp. $\mathcal{R}_H$ hrubší, než $\mathcal{T}_h$ (v případě triangulace), resp. $\mathcal{R}_h$ (v případě rektangulace).

Na základě těchto výsledků můžeme konstatovat, že metoda hraničních i distribuovaných LM užitá k realizaci vnitřní úrovně optimalizačního procesu, může redukovat hladkost minimizované funkce. Z toho plyne, že užitím gradientních metod k minimizaci cenové funkce nemusíme dostat uspokojivý výsledek a to hlavně v případech, kdy bude síť pro MKP příliš hrubá!

4.3 Algoritmy globální optimalizace

Shrneme-li dosavadní poznatky můžeme říci, že metoda fiktivních oblastí užitá k řešení úloh tvarové optimalizace zvyšuje efektivnost vnitřní úrovně optimalizačního procesu (řešení stavového problému), ale přináší určité komplikace na vnější úrovni (optimalizační algoritmus musí vzít v úvahu možnou nediferencovatelnost nebo dokonce i nespojitost cenové funkce).

Jednou z možností, jak obejít tyto komplikace, je užít metody globální optimalizace jako jsou různé typy genetických a migračních algoritmů, algoritmy řízeného náhodného prohledávání, simulovaného žíhání a další, které jsou založeny pouze na vyčíslení hodnot cenové funkce. Tyto algoritmy mají obrovskou výhodu v tom, že jsou jednoduše implementovatelné a současně velmi dobře paralelizovatelné. Nevýhodou je ale velké množství vyhodnocování cenové funkce, jež potřebujeme k nalezení globálního minima. V této části popíšeme stručně velmi jednoduchý, v praxi osvědčený algoritmus MCRS (Modified Controlled Random Search algorithm) a následně jej porovnáme s genetickými algoritmy.

Typické schéma úloh globální optimalizace je následující:

$$(\mathbb{P})_{GO} \qquad \begin{cases} \text{Najdi } x^* \in \chi \text{ takové, že} \\ f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \chi, \end{cases}$$

kde $\chi \subseteq \chi_1 \times \ldots \times \chi_n$ je přípustný vyhledávací prostor o n parametrech, $f: \chi \mapsto \mathbb{R}^1$ je zvolená cenová funkce a x^* je bod z χ, v němž funkce f nabývá globálního minima. Prostor parametrů v praktických úlohách je zpravidla vymezen intervalem jejich přípustných hodnot tzv. "box constraints". Vyhledávací prostor χ tedy můžeme definovat následovně:

$$\chi = \{x \in \chi_1 \times \ldots \times \chi_n \mid \quad h_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m\},$$

kde $h_j(x),\ j = 1, \ldots, m$ jsou nerovnostní omezení a χ_i se obvykle volí jako interval $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^1$.

Algoritmus MCRS

Algoritmus MCRS je modifikací algoritmu CRS (viz [38]). Tato modifikace spočívá ve znáhodnění operátoru reflexe. Prvek $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \chi$ označme jako individum (jedinec, bod z χ) a množinu individuí jako populaci P. Velikost populace je po celou dobu běhu algoritmu konstantní a je rovna $N \gg n$.

Algoritmus MCRS začíná s populací P obsahující N náhodně vygenerovaných bodů z χ. Tato populace je neustále měněna nahrazováním nejhorších jedinců lepšími, přičemž kvalita každého jedince je dána hodnotou cenové funkce f (kriteriální funkce, fitness funkce). Nového jedince $\mathbf{w}$ získáme aplikací operátoru reflexe na simplex S (určený pomocí $n+1$ různých, náhodně vybraných bodů z populace P) následovně:

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} - \Gamma(\mathbf{u} - \mathbf{g}),$$

kde $\mathbf{u}$ je jeden (náhodně vybraný) vrchol simplexu S, $\mathbf{g}$ je těžiště stěny určené zbylými n vrcholy a Γ je náhodný multiplikativní koeficient.

Podstata modifikace původního Priceova operátoru reflexe spočívá ve znáhodnění výběru multiplikativního koeficientu Γ. Několik rozdělení koeficientu Γ bylo testováno na celé řadě složitých úloh odhadování parametrů nelineární regrese. Ukázalo se, že nejlepších výsledků bylo dosaženo pro koeficient Γ s rovnoměrným rozdělením na intervalu $< 0, \alpha)$, kde α je v rozsahu od 4 do 8.

Procedura **Reflexe** vypadá následovně:

procedure **Reflexe**(P, *var* $\mathbf{w}$)
begin
  repeat
    $S :=$ množina $n+1$ různých, náhodně vybraných bodů z P;
    $\mathbf{u} :=$ náhodně vybraný vrchol simplexu S;
    $\mathbf{g} := \dfrac{\sum_{\forall \mathbf{x} \in S,\, \mathbf{x} \neq \mathbf{u}} \mathbf{x}}{n}$;
    $\Gamma :=$ náhodné číslo z intervalu $< 0, \alpha)$;
    $\mathbf{w} := \mathbf{g} - \Gamma(\mathbf{u} - \mathbf{g})$;
  until $\mathbf{w} \in \chi$;
end.

Celkový algoritmus MCRS lze popsat takto:

procedure **MCRS**

begin $P :=$ populace N náhodně vygenerovaných bodů z χ;

repeat

Reflexe(P,w);

if $f(\mathbf{w}) < f(\mathbf{w}_{max})$ *then* $\mathbf{w}_{max} := \mathbf{w}$;

until splněna podmínka ukončení;

end,

kde $\mathbf{w}_{max}$ je bod z P s největší hodnotou cenové funkce.

Prvky v populaci P je vhodné z důvodu efektivnosti udržovat setříděné podle odpovídajících hodnot kriteriální funkce. Nového jedince s lepší hodnotou fitness funkce, než má nejhorší prvek populace, vložíme do P např. prostřednictvím algoritmu binárního vkládání (binary insert) a nejhorší prvek současně z populace odstraníme.

Neuvažujeme žádnou speciální podmínku na ukončení algoritmu MCRS. Nejčastěji používané ukončovací kritérium ve většině optimalizačních úloh je

$$f(\mathbf{w}_{max}) - f(\mathbf{w}_{min}) \leq \varepsilon,$$

kde $\mathbf{w}_{min}$ je bod z P s nejnižší hodnotou cenové funkce a $\varepsilon > 0$ je vstupní parametr. Další často používané ukončovací kritérium spočívá v omezení počtu vyhodnocení cenové funkce.

Vstupními parametry tohoto algoritmu jsou:

- velikost populace N;
- hodnota koeficientu α z rozdělení Γ;
- hodnota ε v podmínce ukončení;
- specifikace vyhledávacího prostoru χ.

Nastavení vstupních parametrů je ovlivněno úlohou, která je řešena. Je zřejmé, že pro větší hodnoty α a N bude hledání důkladnější. Empiricky zjištěné hodnoty vhodné pro většinu optimalizačních úloh jsou: $\alpha = 8$ a $N = \max(5n, n^2)$. Pro naši třídu úloh, ve kterých je jedno vyhodnocení cenové funkce velmi drahé, se ukázala tato volba koeficientu α nevhodná. Lepších, popř. srovnatelných výsledků s podstatně menším počtem funkčních vyhodnocení bylo dosaženo pro volbu koeficientu $\alpha = 4$.

Žádný důkaz konvergence algoritmu MCRS nebyl doposud proveden. Předpokládá se, že algoritmus MCRS je nejméně tak dobrý jako algoritmus *uniform random search*, u něhož byla konvergence dokázána (viz [5]) pp. 48–49. Na několika problémech bylo experimentálně ukázáno, že řád konvergence MCRS je mnohem vyšší než u algoritmu uniform random search.

Bližší informace o algoritmu MCRS můžeme nalézt v [30] a [31].

Srovnání algoritmu MCRS s genetickými algoritmy (GA)

Algoritmus MCRS je velmi blízký genetickému algoritmu s tím, že reflexe přebírá v tomto algoritmu úlohu křížení z GA. Pro něj je typická párová reprodukce, zatímco v algoritmu MCRS se nové body (potomci) generují aplikací operátoru reflexe na množinu $n + 1$ náhodně vybraných simplexových vrcholů (rodičů). Jedná se tedy o jakousi zobecněnou vícenásobnou reprodukci.

Pravděpodobnost selekce v MCRS není závislá na hodnotě cenové funkce vybraného individua, ale díky odstraňování nejhorších jedinců a jejich nahrazování lepšími, se projevuje v populaci tendence samoorganizace.

Operátor mutace není v algoritmu MCRS explicitně zahrnut, ale i tento krok byl již udělán a vede na tzv. evolution strategy (ES2) algoritmus (viz [31] a [32]). Experimentálně se ukázalo, že algoritmus ES2 je spolehlivější v hledání "pravého" globálního minima, ale má nižší řád konvergence ve srovnání s MCRS.

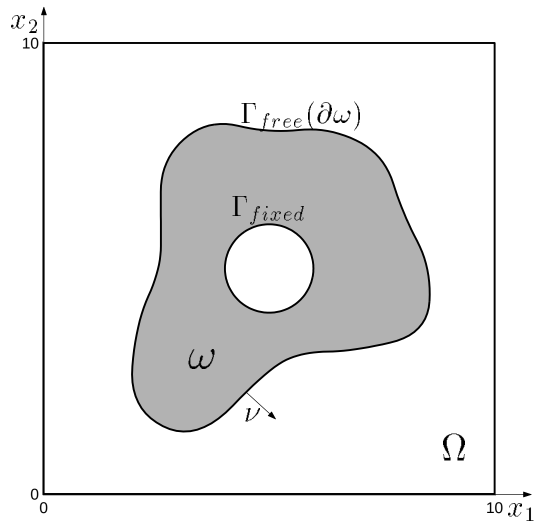
Z optimální volby parametrů algoritmu MCRS pro většinu optimalizačních úloh ($\alpha = 8$ a $N = \max(5n, n^2)$) plyne, že pro počet optimalizačních parametrů $n \geq 5$ roste velikost populace kvadraticky v závislosti na n. Čím větší tedy bude velikost populace, tím pomalejší bude již zmiňovaná tendence samoorganizace. Naproti tomu u genetických algoritmů z důvodu implementovaného operátoru mutace je velikost populace takřka nezávislá na počtu optimalizačních parametrů.

MCRS i GA pracují s celou populací bodů (nikoli s jediným bodem), využívají pouze hodnot optimalizované funkce f (nikoli jejích derivací) a respektují stochastické principy reprodukce (selekce a křížení).

4.4 Realizace optimalizačního procesu a příklady

Na příkladech, které následují, budeme ilustrovat užití MFO v úlohách tvarové optimalizace. Úlohy jsou zvoleny takovým způsobem, aby jejich řešení bylo předem známo a mohli jsme tak porovnat správnost nalezeného řešení. V dalším budeme pracovat s parametry $L_{x_1} = L_{x_2} = L_{x_3} = 10$.

Příklad 4.1 *(identifikace primární veličiny ve 2D)* Nechť $\omega \subset \mathbb{R}^2$ je dvojnásobně souvislá oblast s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega = \Gamma_{fixed} \cup \Gamma_{free}(\partial\omega)$, kde Γ_{fixed} je pevná část hranice popsaná implicitní funkcí $(x_1 - L_{x_1}/2)^2 + (x_2 - L_{x_2}/2)^2 = 1$ a $\Gamma_{free}(\partial\omega)$ je proměnná (vnější) část $\partial\omega$ (viz obr. 4.3). Systém všech takových oblastí označme



Obrázek 4.3.

$\mathcal{O}$. Pro libovolnou $\omega \in \mathcal{O}$ definujme stavovou úlohu $(\mathcal{P}(\omega))$ následovně:

$$(\mathcal{P}(\omega)) \qquad \begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{v } \omega,\ \omega \in \mathcal{O}, \\ u &= g \quad \text{na } \Gamma_{fixed}, \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_{free}(\partial\omega), \end{cases}$$

kde

$$f = -\triangle(u_d|_{\omega}),\ g = u_d|_{\Gamma_{fixed}} \quad \text{a}$$

$$u_d(x_1, x_2) = 1 - \frac{(x_1 - L_{x_1}/2)^2}{16} - \frac{(x_2 - L_{x_2}/2)^2}{4}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.4}$$

Úloha tvarové optimalizace je definovaná následovně:

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J(\omega^*, u(\omega^*)) \leq J(\omega, u(\omega)) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

kde

$$J(\omega, u(\omega)) = \frac{1}{2}\|u(\omega) - u_d\|^2_{0,\omega},$$

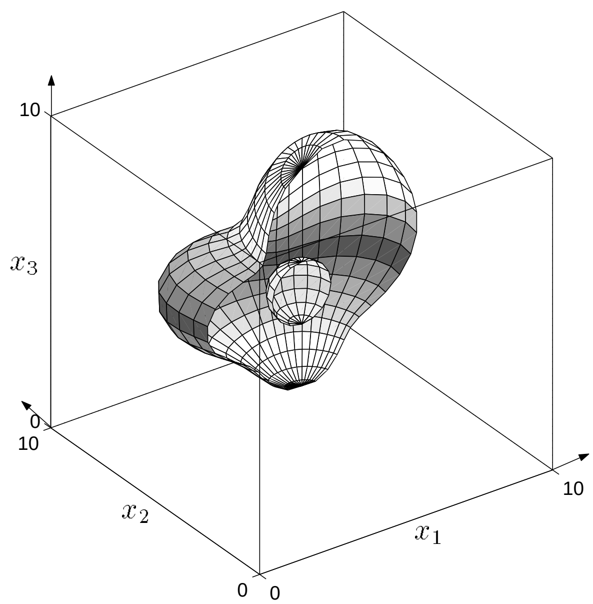
$u(\omega)$ je řešením $(\mathcal{P}(\omega))$ v $\omega \in \mathcal{O}$ a u_d je definováno pomocí (4.4).

Označme $\tilde{\omega} \in \mathcal{O}$ oblast s hranicí $\Gamma_{free}(\partial\tilde{\omega})$ popsanou implicitní funkcí $u_d(x_1, x_2) = 0$. Z definice stavové úlohy $(\mathcal{P}(\tilde{\omega}))$ plyne, že $u(\tilde{\omega}) = u_d\big|_{\tilde{\omega}}$ v $\tilde{\omega}$ a tudíž $J(\tilde{\omega}, u(\tilde{\omega})) = 0$. Oblast $\tilde{\omega}$ je tedy jedním z řešení $(\mathbb{P})$ ve 2D.

Příklad 4.2 *(identifikace primární veličiny ve 3D)* Uvažujme stejné zadání jako v příkladě 4.1 ovšem ve 3D s následujícími modifikacemi:

$$u_d(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{(x_1 - L_{x_1}/2)^2}{3.9^2} - \frac{(x_2 - L_{x_2}/2)^2}{2.6^2} - \frac{(x_3 - L_{x_3}/2)^2}{2.6^2}, \tag{4.5}$$

kde $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a množina přípustných oblastí $\mathcal{O}$ bude obsahovat dvojnásobně souvislé oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^3$ s Lipschitzovskou hranicí tvořenou pevnou částí Γ_{fixed} popsanou implicitní funkcí $(x_1 - L_{x_1}/2)^2 + (x_2 - L_{x_2}/2)^2 + (x_3 - L_{x_3}/2)^2 = 1$ a proměnnou (vnější) částí $\Gamma_{free}(\partial\omega)$ (viz obr. 4.4, kde je znázorněna polovina oblasti ω).



Obrázek 4.4.

Nechť $\tilde{\omega} \in \mathcal{O}$ je oblast s hranicí $\Gamma_{free}(\partial\tilde{\omega})$ popsanou implicitní funkcí $u_d(x_1, x_2, x_3) = 0$. Z definice stavové úlohy $(\mathcal{P}(\tilde{\omega}))$ ve 3D opět plyne, že $u(\tilde{\omega}) = u_d\big|_{\tilde{\omega}}$ v $\tilde{\omega}$ a tudíž $J(\tilde{\omega}, u(\tilde{\omega})) = 0$, t.j. oblast $\tilde{\omega}$ je jedním z řešení $(\mathbb{P})$ ve 3D.

Příklad 4.3 *(identifikace duální veličiny ve 2D)* Zadání úlohy je opět stejné jako v příkladě 4.1. V tomto případě uvažujeme problém $(\mathbb{P})$ s následujícími variantami cenových funkcionálů:

$$(a)\;\; J_a(\omega, u(\omega)) = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u(\omega)}{\partial\nu} - Q\|^2_{0,\Gamma_{free}(\partial\omega)},$$

$$(b)\;\; J_b(\omega, u(\omega)) = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u(\omega)}{\partial\nu} - Q\|^2_{-1/2,\Gamma_{free}(\partial\omega)},$$

kde

$$Q(x_1, x_2) := Q(A(\varphi), B(\varphi)) = \operatorname{grad} u_d(A(\varphi), B(\varphi)) \cdot \tilde{\nu},$$

přičemž

$$A(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi) + L_{x_1}/2, \quad B(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi) + L_{x_2}/2 \quad \text{a}$$
$$r(\varphi) = \frac{4}{\sqrt{1 + 3\sin^2(\varphi)}}, \quad \varphi = \arctan(\frac{x_2 - L_{x_2}/2}{x_1 - L_{x_1}/2}) \in [-\pi, \pi].$$

Poznamenejme, že pro bod $x = (x_1, x_2)$ ležící na $\Gamma_{free}(\partial\tilde{\omega})$ představují $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ jeho parametrické vyjádření. Symbol $\tilde{\nu}$ pak značí jednotkový vektor vnější normály k této hranici. Všimněme si, že takto vyjádřená funkce Q je definovaná v celém $\mathbb{R}^2 \setminus \{(L_{x_1}/2, L_{x_2}/2)\}$.

Nechť $\tilde{\omega}$ je stejná jako v příkladě 4.1. Z definice stavové úlohy $(\mathcal{P}(\omega))$ ve 2D opět plyne, že $u(\tilde{\omega}) = u_d|_{\tilde{\omega}}$ v $\tilde{\omega}$ a tudíž $J_a(\tilde{\omega}, u(\tilde{\omega})) = J_b(\tilde{\omega}, u(\tilde{\omega})) = 0$. Oblast $\tilde{\omega}$ je tedy jedním z řešení ($\mathbb{P}$) ve 2D pro obě varianty cenového funkcionálu.

Příklad 4.4 *(minimalizace compliance)* Nechť $\omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega$ a taková, že meas $\omega = 9\pi$. Systém všech takových oblastí označme $\mathcal{O}$. Na libovolné $\omega \in \mathcal{O}$ uvažujeme následující stavovou úlohu:

$$(\mathcal{P}(\omega)) \qquad \begin{cases} -\triangle u = 4 \quad \text{v} \quad \omega, \quad \omega \in \mathcal{O}, \\ \quad u = 0 \quad \text{na} \quad \partial\omega. \end{cases}$$

Dále označme

$$J(\omega) = -4\int_\omega u(\omega)\, dx$$

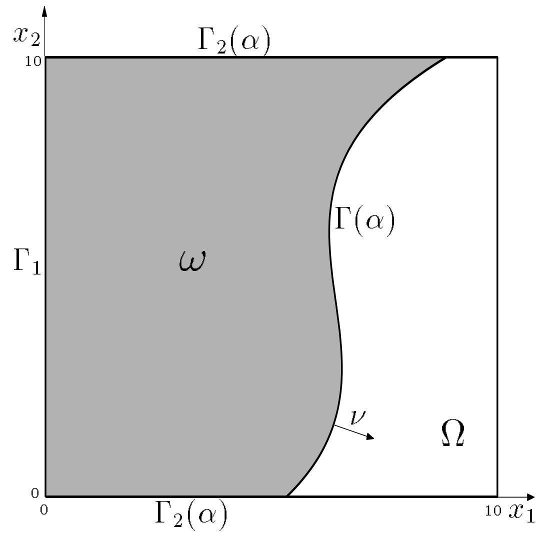
cenový funkcionál nazývaný anglicky compliance. Definujme úlohu tvarové optimalizace:

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{cases} \quad \text{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J(\omega^*) \le J(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Tato úloha může být ve 2D interpretována jako hledání průřezu homogenní tyče na jednom konci vetknuté a mající maximální pevnost při kroucení. Optimální tvar je známý a není to nic jiného než kruh.

Příklad 4.5 (*identifikace gradientu primární veličiny v případě smíšené Dirichletovy-Neumannovy úlohy*) Označme $\mathcal{O}$ systém všech jednoduše souvislých oblastí $\omega \subset \mathbb{R}^2$ s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2(\alpha) \cup \Gamma(\alpha)$. Přitom rozklad hranice $\partial\omega$ je zřejmý z obrázku 4.5. Zde Γ_1 představuje pevnou a $\Gamma_2(\alpha) \cup \Gamma(\alpha)$ proměnnou část $\partial\omega$. Pro libovolnou $\omega \in \mathcal{O}$ definujme stavovou úlohu:

$$(\mathcal{P}(\omega)) \qquad \begin{cases} -\triangle u &= f \quad \text{v } \omega, \ \omega \in \mathcal{O}, \\ \quad u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \cup \Gamma_2(\alpha), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad \text{na } \Gamma(\alpha), \end{cases}$$



Obrázek 4.5.

kde

$$f = -\triangle(u_d|_{\omega}),\ g(x_1, x_2) := g(\tilde{\alpha}(x_2), x_2) = \frac{\partial u_d}{\partial \tilde{\nu}}(\tilde{\alpha}(x_2), x_2),$$

přičemž

$$u_d(x_1, x_2) = x_1(L_{x_1} - x_1)^2 x_2(L_{x_2} - x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.6}$$

a $\tilde{\nu}$ je jednotkový vektor vnější normály ke $\Gamma(\tilde{\alpha})$, jež je grafem funkce

$$\tilde{\alpha}(x_2) = 4\sin\left(\frac{\pi}{L_{x_2}}x_2\right) + 3, \quad x_2 \in (0, L_{x_2}). \tag{4.7}$$

Všimněme si, že takto vyjádřená funkce g je definovaná na celém pásu $(-\infty, \infty) \times [0, L_{x_2}] \subset \mathbb{R}^2$.

Úloha tvarové optimalizace je definovaná následovně:

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J(\omega^*, u(\omega^*)) \le J(\omega, u(\omega)) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

kde

$$J(\omega, u(\omega)) = \frac{1}{2}\|\operatorname{grad} u(\omega) - \operatorname{grad} u_d\|^2_{0,\omega},$$

$u(\omega)$ je řešením $(\mathcal{P}(\omega))$ v $\omega \in \mathcal{O}$ a u_d je definováno pomocí (4.6).

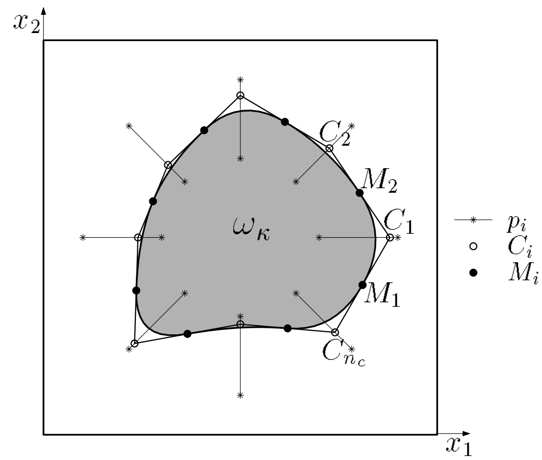
Označme $\tilde{\omega} \in \mathcal{O}$ oblast s hranicí $\Gamma(\alpha) := \Gamma(\tilde{\alpha})$, kde $\tilde{\alpha}$ je definováná pomocí (4.7). Z definice stavové úlohy $(\mathcal{P}(\omega))$ plyne, že $\operatorname{grad} u(\tilde{\omega}) = \operatorname{grad} u_d|_{\tilde{\omega}}$ v $\tilde{\omega}$ a tudíž $J(\tilde{\omega}, u(\tilde{\omega})) = 0$. Oblast $\tilde{\omega}$ je tedy jedním z řešení $(\mathbb{P})$.

V dalším ukážeme, jak vhodně zkonstruovat diskretizaci $\mathcal{O}_\kappa$ množiny přípustných oblastí $\mathcal{O}$. Za tímto účelem budeme předpokládat, že proměnná část hranice oblasti, jejíž optimální tvar hledáme, je tvořena po částech Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu ve 2D a nebo plochou popsanou pomocí sférických funkcí ve 3D.

Tento způsob aproximace hranice ve 2D, resp. 3D splňuje všechny podmínky, které jsme požadovali při numerické realizaci stavové úlohy v části I. této práce (viz text mezi poznámkami 2.9 a 2.10). Začněme s 2D případem.

Realizace proměnné části hranice ve 2D po částech Bezierovou křivkou

Označme Γ proměnnou (uzavřenou) část hranice $\partial\omega_\kappa$ modelovanou po částech Bezierovou křivkou řádu $r \leq 2$ (viz obr. 4.6). Každý úsek Γ tvořený Bezierovou křivkou β_i nejvýše druhého řádu je jednoznačně určen trojicí bodů $\{M_i, C_i, M_{i+1}\}$ v $\mathbb{R}^2$. Počet



Obrázek 4.6.

těchto úseků označme n_c. Bodům $C_i,\ i = 1, \ldots, n_c$, které jsou zadány à-priori, budeme říkat *řídící* a bodům $M_i,\ i = 1, \ldots, n_c + 1$, kde $M_{n_c+1} := M_1$, *krajní.* Každý řídící bod C_i se bude pohybovat na úsečce p_i a krajní body dopočteme tak, abychom zajistili hladkou návaznost Bezierových částí $\beta_i,\ i = 1, \ldots, n_c$. Toho dosáhneme tím, že body M_i budou ležet na úsečkách určených C_{i-1} a C_i, $i = 1, \ldots, n_c$. V našem případě vezmeme body M_i přímo jako středy těchto úseček, t.j.

$$M_i = \frac{C_{i-1} + C_i}{2} \tag{4.8}$$

pro $i = 1, \ldots, n_c$ a $C_0 := C_{n_c}$. Parametrické vyjádření β_i jednoznačně určené trojicí bodů $\{M_i, C_i, M_{i+1}\}$ v $\mathbb{R}^2$ vypadá následovně:

$$\beta_i : \quad [x_1^{(i)}(t), x_2^{(i)}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_i \\ C_i \\ M_{i+1} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Řídící body $C_i,\ i = 1, \ldots, n_c$ hrají roli diskrétních návrhových proměnných. Příklad uzavřené hladké hranice realizované po částech Bezierovou křivkou řádu $r \leq 2$ je vidět na obr. 4.6.

Poznámka 4.1 Je-li hranice Γ otevřená (viz obr. 4.23), jsou dány à-priori nejen řídící body $C_i,\ i = 1, \ldots, n_c$, ale i krajní M_1 a M_{n_c+1}. Zbylé M_i dopočteme pomocí (4.8) pro $i = 2, \ldots, n_c$.

Realizace proměnné části hranice ve 3D pomocí sférických funkcí

V tomto případě bude parametrické vyjádření hranice $\partial\omega_\kappa$ vypadat následovně:

$$x_1(\varphi,\vartheta) = \mathcal{S}(\varphi,\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\vartheta); \quad x_2(\varphi,\vartheta) = \mathcal{S}(\varphi,\vartheta)\sin(\varphi)\sin(\vartheta);$$

$$x_3(\varphi,\vartheta) = \mathcal{S}(\varphi,\vartheta)\cos(\vartheta); \quad \varphi \in [0,2\pi],\ \vartheta \in [0,\pi],$$

kde

$$\mathcal{S}(\varphi,\vartheta) = \sum_{k=0}^{K-1} W_k(\varphi,\vartheta)$$

je konečný součet sférických funkcí W_k. Tyto jsou definovány vztahem:

$$W_k(\varphi,\vartheta) = a_{k,0}P_k(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{k}(a_{k,m}\cos m\varphi + b_{k,m}\sin m\varphi)\cdot P_{k,m}(\cos\vartheta),$$

přičemž

$$P_k(x) \text{ je Legendrův polynom } k\text{-tého stupně}, \quad P_{k,m}(x) = \sqrt{(1-x^2)^m}\frac{d^m P_k(x)}{dx^m}$$

a $a_{i,j},\ b_{i,j}$ jsou reálné parametry. Při praktické realizaci $\mathcal{S}(\varphi,\vartheta)$ vyjádříme takto:

$$\mathcal{S}(\varphi,\vartheta) = \sum_{i=1}^{n_c} c_i\psi_i(\varphi,\vartheta), \quad n_c = \sum_{k=0}^{K-1}(2k+1),$$

kde reálné koeficienty $c_i,\ i = 1,\dots,n_c$ hrají roli diskrétních návrhových proměnných a odpovídají postupně parametrům $a_{k,0},\ a_{k,m},\ b_{k,m}$ pro $k = 0,\dots,K-1$, $m = 1,\dots,k$ a ψ_i jsou příslušné funkční části u těchto parametrů určené z definice W_k. Např. $c_1 = a_{0,0}$ a $\psi_1(\varphi,\vartheta) = P_0(\cos\vartheta)$, $c_2 = a_{1,0}$ a $\psi_2(\varphi,\vartheta) = P_1(\cos\vartheta)$ atd. Příklad hranice realizované plochou popsanou pomocí sférických funkcí s $n_c = 17$ je vidět na obr. 4.4.

Poznámka 4.2 Diskrétní systém $\mathcal{O}_\kappa$ ve všech úlohách tvarové optimalizace vyskytujících se v této práci bude vždy obsahovat oblasti ω_κ s Lipschitzovskou hranicí, kde proměnná část hranice bude realizována po částech Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu ve 2D a nebo plochou definovanou pomocí sférických funkcí ve 3D.

Numerická realizace příkladů 4.1-5

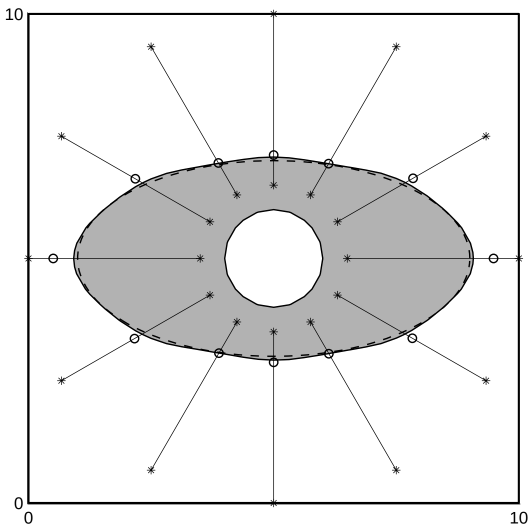
Výše uvedené úlohy tvarové optimalizace budeme v následujícím řešit pomocí MFO zmíněných v části I. Nechť tedy fiktivní oblast Ω je tvaru $\Omega = (0,L_{x_1})\times(0,L_{x_2})$ (ve 2D) a $\Omega = (0,L_{x_1})\times(0,L_{x_2})\times(0,L_{x_3})$ (ve 3D), kde $L_{x_1} = L_{x_2} = L_{x_3} = 10$. Dále nechť $H/h \doteq 3$ u BLM a parametr v ukončovací podmínce metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$. Abstraktní schéma úloh tvarové optimalizace užívající MFO je uvedeno na počátku odstavce 4.2. Specifikace $\mathcal{O}_\kappa$ a volba varianty MFO, kterou využijeme k řešení stavového problému, jsou závislé na zadání úlohy a proto je zmíníme u každého příkladu zvlášť. Postup při numerické realizaci stavového problému pomocí MFO a norem vyskytujících se v cenových funkcionálech je podrobně rozebrán v části I. této práce a proto jej již znovu neopakujeme.

Z důvodu již zmíněné nediferencovatelnosti cenové funkce J_h, použijeme k hledání optimální oblasti ve všech příkladech algoritmus MCRS s ukončovací podmínkou na omezení počtu vyhodnocení cenové funkce na 3000 (ve 2D) a 5000 (ve 3D). Nalezený tvar pak ještě zpřesníme užitím známého algoritmu Nealder-Mead (viz [35]). Toto obnáší dalších maximálně 500 vyhodnocení cenové funkce.

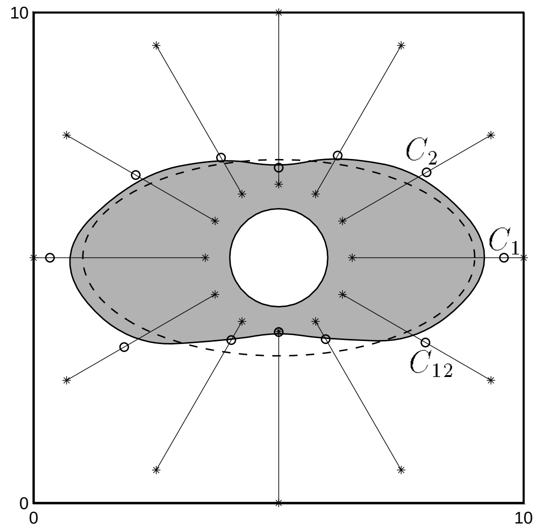
Numerická realizace a výsledky příkladu 4.1

Systém $\mathcal{O}$ bude diskretizován pomocí $\mathcal{O}_\kappa$, jež obsahuje dvojnásobně souvislé oblasti $\omega_\kappa \subset \Omega$ ve 2D s pevnou částí hranice Γ_{fixed} a proměnnou částí $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$, jež je realizována po částech Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu. Počet řídících bodů je $n_c = 12$ a krok diskretizace $h = 10/32$. K numerické realizaci stavové úlohy použijeme BLM i DLM-metodu.

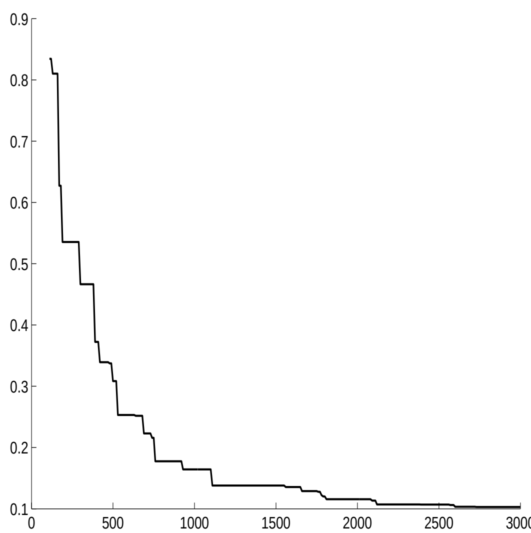
Nalezené optimální tvary oblastí jsou vidět na obrázcích 4.7 a 4.8 pro případ BLM, resp. DLM-metody. Dále na obr. 4.9 je vidět typický průběh hodnoty ce-



Obrázek 4.7. BLM2D, $h = 10/32$.



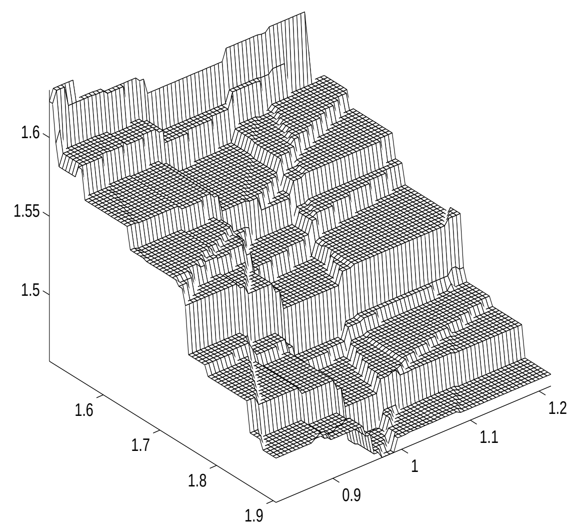
Obrázek 4.8. DLM2D, $h = 10/32$.



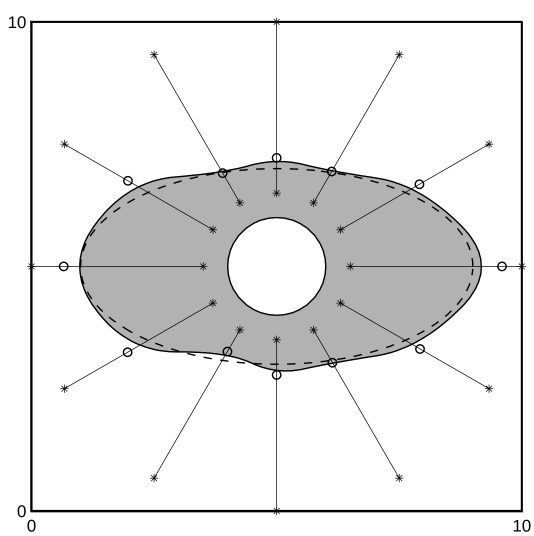
Obrázek 4.9.

nové funkce J_h v bodě, jež odpovídá nejlepšímu individuu v populaci. Přibližování k optimálnímu tvaru je ze začátku relativně rychlé (v našem případě zhruba 1000 vyhodnocení) a následující zlepšování je již velmi pozvolné. Proto k dohledání optimálního tvaru po 3000 vyhodnoceních cenové funkce použijeme lokální minimizační metodu a sice algoritmus Nealder-Mead. Přitom předpokládáme (experimentálně lze ověřit), že po 3000 vyhodnoceních jsme již "dostatečně" blízko globálního minima.

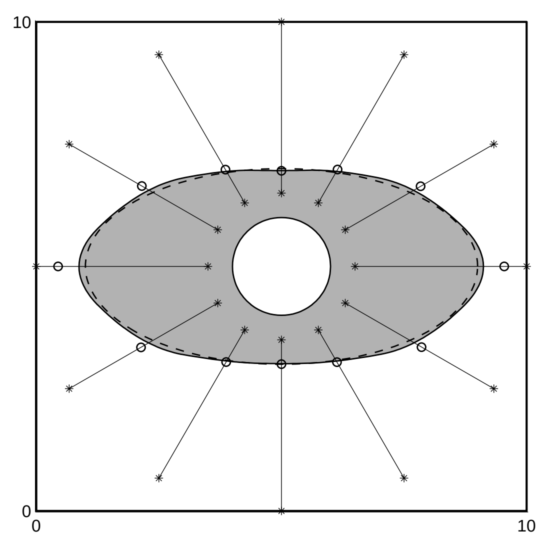
Jak jsme již zmínili, u DLM-metody dochází v důsledku locking efektu k patologickému chování minimizované fukce J_h. Abychom to ukázali, zafixujeme všechny řídící body $C_i,\ i = 1,\ldots,n_c$ definující tvar oblasti $\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$ s výjimkou prvních dvou (viz obr. 4.8). Tyto necháme volně pohybovat na vyznačených úsečkách, čímž dostaneme J_h jako funkci dvou proměnných. Její graf je znázorněn na obrázku 4.10. Okamžitě vidíme, že tento průběh je schodovitý, což automaticky vylučuje možnost užití gradientních metod k minimizaci J_h. Necitlivost cenové fukce J_h na změnu oblasti ω_κ má také za následek, že zvláště při hrubé síti obdržíme tvary dosti vzdálené od optima (obrázek 4.8). Postupným zjemňováním však dostaneme stále lepší a lepší tvary nalezených oblastí (obrázky 4.11-12).



Obrázek 4.10. DLM2D, řez J_h.



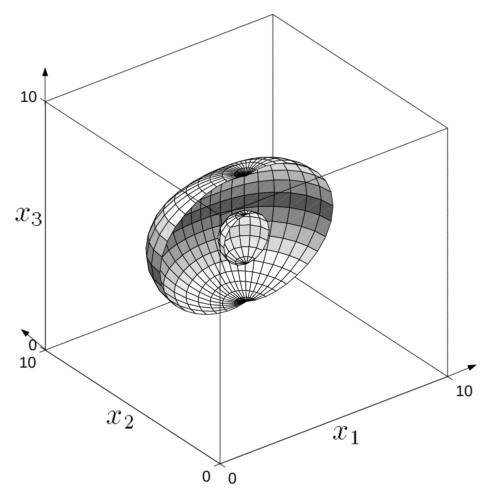
Obrázek 4.11. DLM2D, $h = 10/64$.



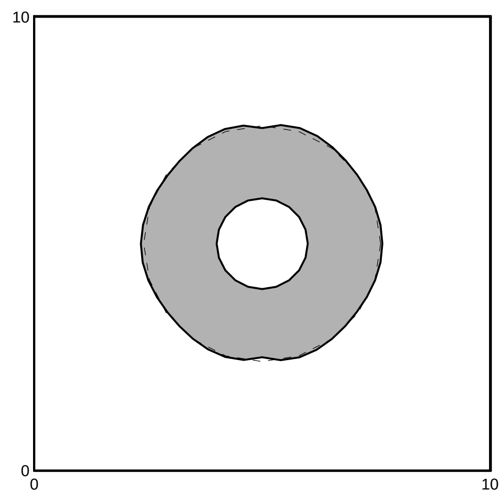
Obrázek 4.12. DLM2D, $h = 10/128$.

V tomto případě bude množina $\mathcal{O}_\kappa$ opět obsahovat dvojnásobně souvislé oblasti $\omega_\kappa \subset \Omega$ ve 3D s pevnou částí hranice Γ_{fixed} a proměnnou částí $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$ realizovanou plochou popsanou pomocí sférických funkcí. Počet návrhových proměnných je $n_c = 17$ (viz definice sférických funkcí) a krok diskretizace $h = 10/32$. K realizaci stavové úlohy použijeme BLM-metodu.

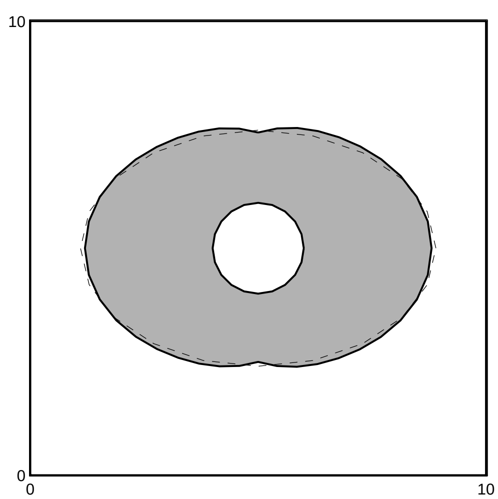
Na obrázku 4.13 je znázorněna nalezená optimální oblast ω_κ^* (přesněji její polovina). V obrázcích 4.14-16 pak vidíme postupně tvar ω_κ^* v řezech $\mathcal{M}_{x_1}$, $\mathcal{M}_{x_2}$ a $\mathcal{M}_{x_3}$ fiktivní oblastí Ω rovinami určenými funkcemi $x_1 = L_{x_1}/2$, $x_2 = L_{x_2}/2$ a $x_3 = L_{x_3}/2$. Pokud bychom chtěli modelovat složitější tvary oblastí, zvětšíme počet návrhových proměnných n_c.



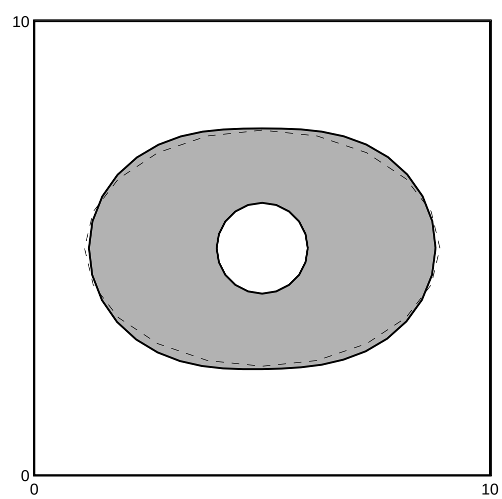
Obrázek 4.13. 3D oblast.



Obrázek 4.14. Řez $\mathcal{M}_{x_1}$.



Obrázek 4.15. Řez $\mathcal{M}_{x_2}$.

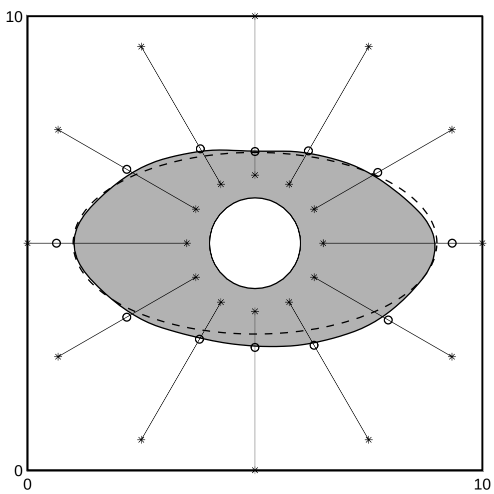


Obrázek 4.16. Řez $\mathcal{M}_{x_3}$.

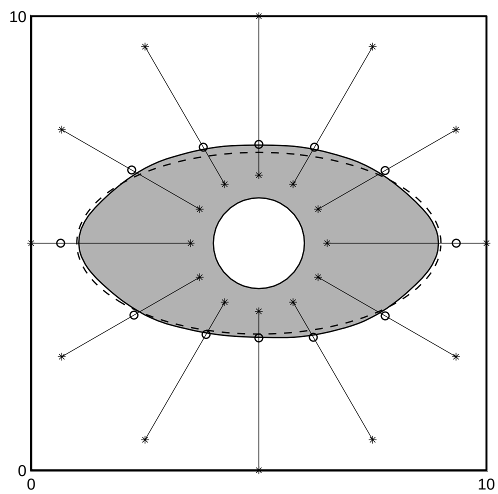
Numerická realizace a výsledky příkladu 4.3

Množina $\mathcal{O}_\kappa$ včetně počtu řídících bodů je stejná jako v příkladě 4.1. Krok diskretizace $h = 10/64$ a stavová úloha je realizována pomocí BLM-metody. Navíc při vyčíslení hodnoty cenové funkce J_h u obou variant (a) i (b) využijeme toho, že vypočtený LM definovaný na $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$ má význam normálové derivace řešení $\hat{u}(\omega_\kappa)$ na této hranici. Tento přístup je podrobně popsán v kapitole 5, kde jej používáme při řešení Bernoulliho úloh s volnou hranicí. Poznamenejme, že k numerickému výpočtu duální normy použijeme postup popsaný v poznámce 2.13.

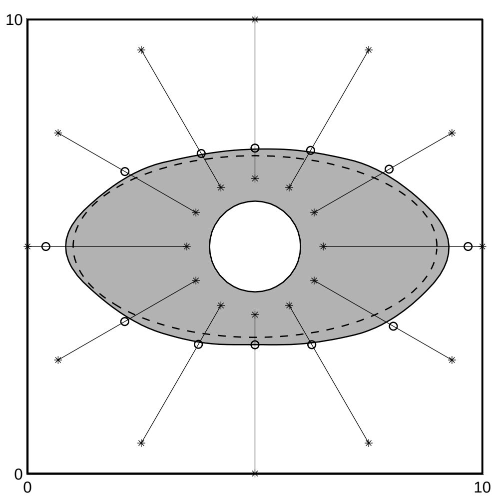
Vliv volby cenové fukce je vidět z obrázků 4.17-18. Přesnější výledky obdržíme v případě varianty (b), což je možné očekávat z provedené analýzy chyby aproximace duální proměnné u BLM-metody (viz tabulku 2.1). Z obrázků 4.19-20 je pak zřejmé, že vyhlazení průběhu LM pomocí filtrace se současným užitím varianty (a) cenového funkcionálu může zmenšit schopnost zidentifikovat optimální oblast $\tilde{\omega}$ zvláště v případě hrubších sítí. Tuto variantu značíme (c).



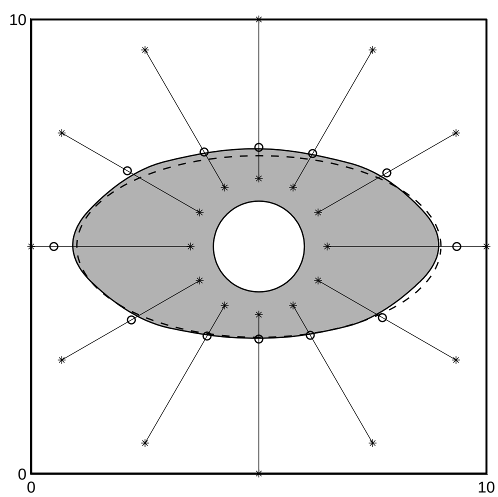
Obrázek 4.17. Var. (a).



Obrázek 4.18. Var. (b).



Obrázek 4.19. Var. (c), $h = 10/64$.

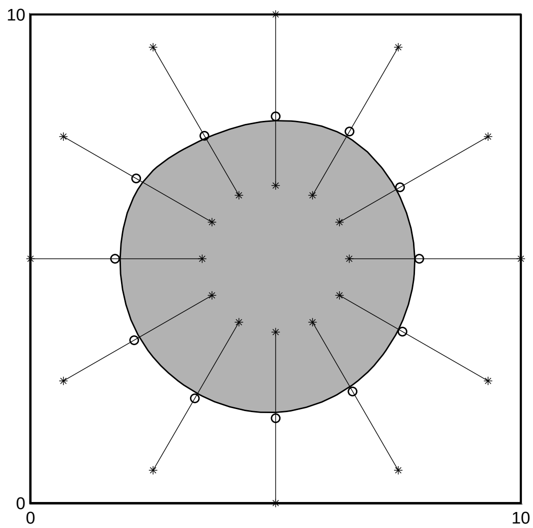


Obrázek 4.20. Var. (c), $h = 10/128$.

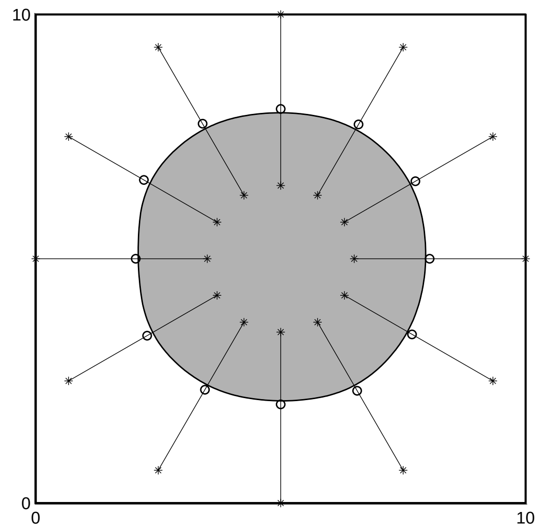
Numerická realizace a výsledky příkladu 4.4

Systém $\mathcal{O}$ diskretizujeme pomocí $\mathcal{O}_\kappa$ obsahující jednoduše souvislé oblasti $\omega_\kappa \subset \Omega$ ve 2D takových, že $\operatorname{meas} \omega_\kappa \doteq 9\pi$ a s hranicemi $\partial\omega_\kappa$ realizovanými po částech Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu. Počet řídících bodů je opět $n_c = 12$. K realizaci stavové úlohy použijeme BLM a DLM-metodu s krokem diskratizace $h = 10/32$, resp. $h = 10/128$.

Nalezené optimální tvary oblastí jsou znázorněny na obrázcích 4.21-22. Výsledky jsou srovnatelné pouze díky tomu, že v případě DLM-metody jsme užili podstatně (konkrétně 4x) jemnější dělení $\overline{\Omega}$.



Obrázek 4.21. BLM2D, $h = 10/32$.

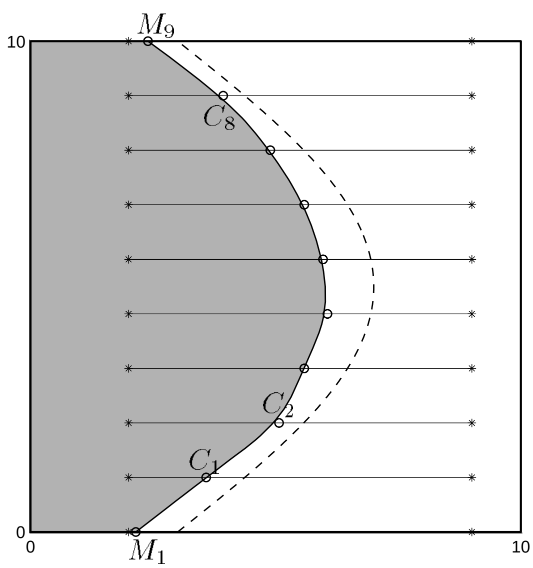


Obrázek 4.22. DLM2D, $h = 10/128$.

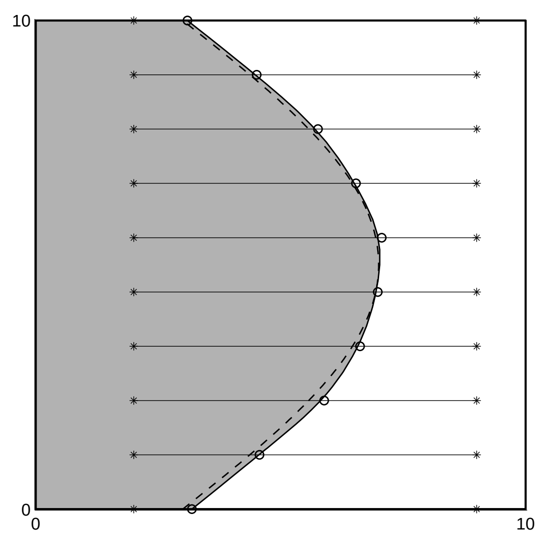
Numerická realizace a výsledky příkladu 4.5

V tomto případě je $\mathcal{O}$ diskretizovaná pomocí $\mathcal{O}_\kappa$, jež obsahuje jednoduše souvislé oblasti $\omega_\kappa \subset \Omega$ ve 2D s hranicí $\partial\omega_\kappa = \Gamma_1 \cup \Gamma_2(\alpha) \cup \Gamma(\alpha)$, kde proměnná část $\Gamma(\alpha)$ bude realizovaná Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu. Počet návrhových proměnných je 10. Z toho je 8 řídících bodů $C_i,\ i = 1, \ldots, 8$ a 2 krajní M_1, M_9 (viz obr. 4.23). K realizaci stavové úlohy užijeme přístupu popsaného v odstavci 3.1 s krokem diskretizace $h = 10/32$.

Na obrázcích 4.23-24 jsou znázorněny nalezené optimální oblasti pro variantu (i), resp. (ii) volby λ_0. V případě varianty (i) se λ^* a tedy i λ_h^* odpovídající $\tilde{\omega}$ mění skokem při přechodu přes $\Gamma(\alpha)$, kdežto u var. (ii) je tento přechod hladký (viz obr. 3.9-10 a 3.13-14 z numerické realizace příkladu 3.1 pro $\alpha(x_2) = (x_2 + 6)/2$). Toto má u varianty (i) za následek, že vypočtené řešení λ_h^* je zatíženo velkou chybou v okolí hranice $\Gamma(\alpha)$. Není proto překvapující, že v případě této varianty (obr. 4.23) je optimální oblast $\tilde{\omega}$ zidentifikována s poměrně velkou chybou. Vhodná volba λ_0 hraje tedy důležitou roli jak při řešení stavové úlohy, tak i ve vlastní tvarové optimalizaci. Pro obecnou volbu λ_0 obdržíme uspokojivý výsledek tehdy, když použijeme dostatečně jemné dělení (např. $h = 10/128$) a cílová oblast, na níž budeme porovnávat vypočtené a přesné řešení, bude "dostatečně" vzdálená od $\Gamma(\alpha)$.



Obrázek 4.23. Var. (i).

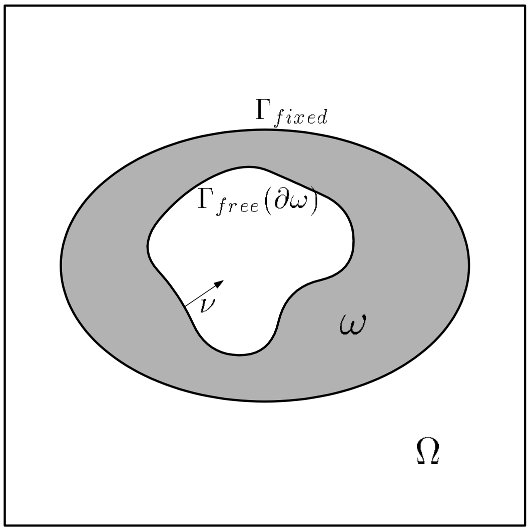


Obrázek 4.24. Var. (ii).

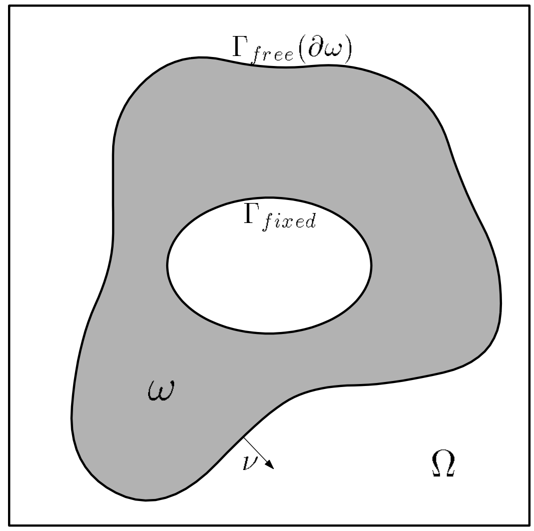
5 Řešení Bernoulliho úloh s volnou hranicí

Matematický model celé řady úloh mechaniky tekutin, galvanizace kovů, elektrostatiky apod. (viz [1],[10],[12]) vede na tzv. *Bernoulliho vnitřní nebo vnější úlohu s volnou hranicí*. V této části ukážeme *nový* způsob řešení těchto úloh pomocí technik tvarové optimalizace kombinovaných s MFO. Příslušné formulace Bernoulliho úloh uvádíme níže.

Nechť $\omega \subset \mathbb{R}^2$ je dvojnásobně souvislá oblast s Lipschitzovskou hranicí $\partial\omega = \Gamma_{fixed} \cup \Gamma_{free}(\partial\omega)$, kde Γ_{fixed} je daná komponenta a $\Gamma_{free}(\partial\omega)$ je (*vnitřní* vzhledem ke Γ_{fixed}) hledaná část $\partial\omega$ (viz obr. 5.1). Systém všech takových ω označme symbolem $\mathcal{O}$. *Vnitřní* Bernoulliův problém je definován následovně:



Obrázek 5.1.



Obrázek 5.2.

$$(\mathcal{P})_{int} \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \quad a \quad u : \omega^* \to \mathbb{R}^1 \textit{ takové, že} \\ -\triangle u = 0 \quad \text{v} \quad \omega^*, \\ u = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_{fixed}, \\ u = 1 \quad \text{na} \quad \Gamma_{free}(\partial\omega^*), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = Q \quad \text{na} \quad \Gamma_{free}(\partial\omega^*), \end{cases}$$

kde $Q = \text{konst}\,. > 0$ je dané.

Poznámka 5.1 Z výpočetního hlediska bude důležité mít předepsáno $u = 0$ na $\Gamma_{free}(\partial\omega^*)$. Toho můžeme jednoduše dosáhnout užitím substituce $u := \tilde{u}+1$ v $(\mathcal{P})_{int}$, čímž pozměníme pouze Dirichletovy podmínky. Konkrétně bude $\tilde{u} = -1$ na Γ_{fixed} a $\tilde{u} = 0$ na $\Gamma_{free}(\partial\omega^*)$. Transformovaný problém označme znovu $(\mathcal{P})_{int}$ a jeho řešení symbolem u.

Nechť $\Gamma_{free}(\partial\omega)$ je nyní *vnější* komponentou hranice $\partial\omega$ (viz obr. 5.2). Všechny takové oblasti označme opět symbolem $\mathcal{O}$ a definujme *vnější* Bernoulliův problém:

$$(\mathcal{P})_{ext} \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \quad \textit{a} \quad u : \omega^* \to \mathbb{R}^1 \textit{ takové, že} \\ -\triangle u = 0 \quad \text{v} \quad \omega^*, \\ u = 1 \quad \text{na} \quad \Gamma_{fixed}, \\ u = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_{free}(\partial\omega^*), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = Q \quad \text{na} \quad \Gamma_{free}(\partial\omega^*), \end{cases}$$

kde $Q = \text{konst}\,. < 0$ je dané.

Klasický způsob řešení těchto úloh je založen na užití explicitních nebo implicitních Neumannových schémat (viz [11]). V dalším ukážeme alternativní způsob užívající technik tvarové optimalizace kombinovaných s MFO.

Z formulací úloh $(\mathcal{P})_{int}$ a $(\mathcal{P})_{ext}$ je zřejmé, že jednou z neznámých je oblast $\omega^* \in \mathcal{O}$. Pro à-priori danou oblast $\omega \in \mathcal{O}$ oba problémy $(\mathcal{P})_{int}$ a $(\mathcal{P})_{ext}$ nejsou korektní, protože předepsané okrajové podmínky na hranici $\Gamma_{free}(\partial\omega)$ tvoří přeurčený systém. Abychom odstranili tuto obtíž, přeformulujeme obě úlohy pomocí metod optimálního řízení, kdy tvar oblasti ω bude hrát roli řídící proměnné. Tato technika byla s úspěchem použita k numerické realizaci úloh filtrace (viz [6],[20]). Základní myšlenka tohoto přístupu je velmi jednoduchá: přebývající okrajovou podmínku zahrneme do vhodného cenového funkcionálu a zbylou pak budeme splňovat à-priori jako součást vhodné stavové úlohy, která již bude zadaná korektně. V dalším ukážeme tento postup v případě Bernoulliho úloh.

Uvažujme stejnou množinu přípustných oblastí $\mathcal{O}$, jak byla uvedena výše a předpokládejme, že oblast ω^* řešící $(\mathcal{P})_{int}$, resp. $(\mathcal{P})_{ext}$ patří do $\mathcal{O}$. Pro dané $\omega \in \mathcal{O}$ definujme stavový problém $(\mathcal{P}(\omega))$ pomocí prvních tří rovnic z $(\mathcal{P})_{int}$, resp. $(\mathcal{P})_{ext}$, t.j. vynecháme Neumannovu okrajovou podmínku předepsanou na $\Gamma_{free}(\partial\omega)$. Dále nechť

$$J(\omega) = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u(\omega)}{\partial \nu} - Q\|^2_{-1/2,\Gamma_{free}(\partial\omega)}$$

je cenový funkcionál, kde $u(\omega)$ je řešením $(\mathcal{P}(\omega))$. Uvažujme následující úlohu tvarové optimalizace:

$$(\mathbb{P}) \qquad \begin{cases} \textit{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \textit{ takové, že} \\ J(\omega^*) \le J(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Vztah mezi problémy $(\mathcal{P})_{int}$ a $(\mathcal{P})_{ext}$ na jedné straně a úlohou $(\mathbb{P})$ na straně druhé je snadno vidět: oblast $\omega^* \in \mathcal{O}$ je řešením $(\mathcal{P})_{int}$, resp. $(\mathcal{P})_{ext}$ tehdy a jen tehdy, jestliže ω^* řeší $(\mathbb{P})$ a současně $J(\omega^*) = 0$. Úloha $(\mathbb{P})$ se skládá ze dvou úrovní: horní úroveň je reprezentována minimizací funkcionálu J, zatímco dolní je dána řešením $(\mathcal{P}(\omega))$. K efektivnější realizaci dolní úrovně s výhodou použijeme BLM-metodu popsanou v kapitole 2.

Nechť tedy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je fiktivní oblast obdélníkového tvaru, $V = H^1_0(\Omega)$ a $\Lambda_1 = H^{-1/2}(\Gamma_{fixed})$, resp. $\Lambda_2(\partial\omega) = H^{-1/2}(\Gamma_{free}(\partial\omega))$ je prostor Lagrangeových multiplikátorů definovaných na Γ_{fixed}, resp. $\Gamma_{free}(\partial\omega)$. Označme $(\hat{\mathcal{P}}(\omega))$ následující úlohu definovanou v Ω:

$$
(\hat{\mathcal{P}}(\omega)) \quad \begin{cases} \quad \textit{Najdi } (\hat{u}, \lambda_1, \lambda_2) \in V \times \Lambda_1 \times \Lambda_2(\partial\omega) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u} \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \langle \lambda_1, v \rangle_{\Gamma_{fixed}} + \langle \lambda_2, v \rangle_{\Gamma_{free}(\partial\omega)} \quad \forall v \in V, \\ \langle \mu_1, \hat{u} \rangle_{\Gamma_{fixed}} + \langle \mu_2, \hat{u} \rangle_{\Gamma_{free}(\partial\omega)} = \langle \mu_1, g \rangle_{\Gamma_{fixed}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2(\partial\omega), \end{cases}
$$

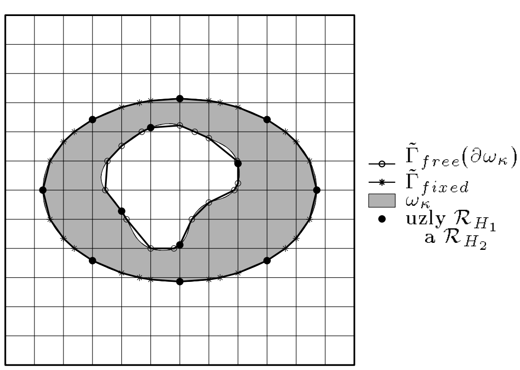
kde symboly $\langle\ ,\ \rangle_{\Gamma_{fixed}}$, resp. $\langle\ ,\ \rangle_{\Gamma_{free}(\partial\omega)}$ označují dualitu mezi prostory Λ_1 a $H^{1/2}(\Gamma_{fixed})$, resp. $\Lambda_2(\partial\omega)$ a $H^{1/2}(\Gamma_{free}(\partial\omega))$. Dále pak $g = -1$ nebo $g = 1$ na Γ_{fixed} v případě vnitřní, resp. vnější Bernoulliho úlohy.

Poznámka 5.2 Úloha $(\hat{\mathcal{P}}(\omega))$ je ekvivalentní problému $(\hat{\mathcal{P}})$ z odstavce 2.3 s následující volbou dat: $\tilde{f} = 0$ v Ω a $q = g$ na Γ_{fixed}, přičemž v případě úlohy $(\mathcal{P})_{int}$ je $\Gamma_{int} := \Gamma_{free}(\partial\omega)$ a $\Gamma_{ext} := \Gamma_{fixed}$. U $(\mathcal{P})_{ext}$ je přiřazení hranic prohozené.

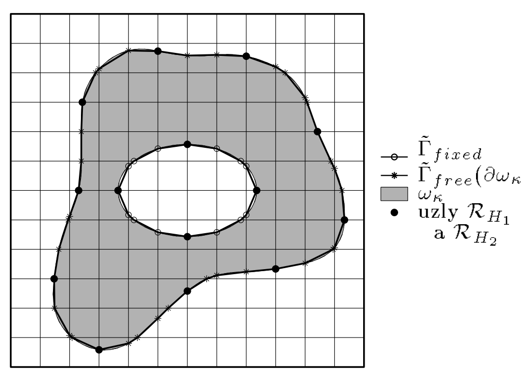
Z toho plyne (viz poznámka 2.9), že úloha $(\hat{\mathcal{P}}(\omega))$ má jediné řešení $(\hat{u}, \lambda_1, \lambda_2) \in V \times \Lambda_1 \times \Lambda_2(\partial\omega)$ a $u := \hat{u}_{|_\omega}$ řeší $(\mathcal{P}(\omega))$. Navíc $\lambda_2 = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ na $\Gamma_{free}(\partial\omega)$. Toto umožňuje zapsat $J(\omega)$ následovně:

$$
J(\omega) = \frac{1}{2} \|\lambda_2 - Q\|^2_{-1/2, \Gamma_{free}(\partial\omega)}.
$$

Nyní popišme diskretizaci úlohy $(\mathbb{P})$. Místo $\mathcal{O}$ užijeme jinou množinu $\mathcal{O}_\kappa$ obsahující dvojnásobně souvislé oblasti ω_κ s pevnou částí hranice Γ_{fixed} a proměnnou částí $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$ realizovanou po částech Bezierovou křivkou druhého stupně (viz odstavec 4.4). Postup při diskretizaci úlohy $(\hat{\mathcal{P}}(\omega))$ byl podrobně popsán v odstavci 2.3 a proto jej dále uvádíme jen ve stručnosti. Nechť $V_h \subset H^1_0(\Omega)$ je prostor spojitých, po částech bilineárních funkcí nad pravidelnou rektangulací $\mathcal{R}_h$ fiktivní oblasti $\overline{\Omega}$ a nulových na $\partial\Omega$. Dále nechť $\tilde{\Gamma}_{fixed}$, $\tilde{\Gamma}_{free}(\partial\omega_\kappa)$ jsou polygonální aproximace Γ_{fixed} a $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$. Označme Λ_{H_1}, $\Lambda_{H_2}(\partial\omega_\kappa)$ prostory po částech konstantních funkcí, jež jsou definovány na $\tilde{\Gamma}_{fixed}$, $\tilde{\Gamma}_{free}(\partial\omega_\kappa)$ za pomocí dělení $\mathcal{R}_{H_1}$, resp. $\mathcal{R}_{H_2}$ (viz obr. 5.3-4). Pro dané $\omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa$ definujeme aproximaci $(\hat{\mathcal{P}}(\omega))$ následovně:



Obrázek 5.3.



Obrázek 5.4.

$$
(\hat{\mathcal{P}}(\omega_\kappa))_h^H \begin{cases} \qquad \textit{Najdi } (\hat{u}_h, \lambda_{H_1}, \lambda_{H_2}) \in V_h \times \Lambda_{H_1} \times \Lambda_{H_2}(\partial\omega_\kappa) \textit{ takové, že} \\ \displaystyle\int_\Omega \operatorname{grad} \hat{u}_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_{\tilde{\Gamma}_{fixed}} \lambda_{H_1} v_h \, ds + \int_{\tilde{\Gamma}_{free(\partial\omega_\kappa)}} \lambda_{H_2} v_h \, ds \\ \hfill \forall v_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_{\tilde{\Gamma}_{fixed}} \mu_{H_1} \hat{u}_h \, ds + \int_{\tilde{\Gamma}_{free(\partial\omega_\kappa)}} \mu_{H_2} \hat{u}_h \, ds = \int_{\tilde{\Gamma}_{fixed}} \mu_{H_1} g \, ds \\ \hfill \forall (\mu_{H_1}, \mu_{H_2}) \in \Lambda_{H_1} \times \Lambda_{H_2}(\partial\omega_\kappa), \end{cases}
$$

kde g je stejné jako v $(\hat{\mathcal{P}}(\omega))$. Maticová formulace $(\hat{\mathcal{P}}(\omega_\kappa))_h^H$ i způsob jejího řešení zůstávají beze změn.

Aproximací $(\mathbb{P})$ bude úloha:

$$
(\hat{\mathbb{P}})_{\kappa h}^H \qquad \begin{cases} \qquad \textit{Najdi } \omega_\kappa^* \in \mathcal{O}_\kappa \textit{ takové, že} \\ J_{h,H}(\omega_\kappa^*) \leq J_{h,H}(\omega_\kappa) \quad \forall \omega_\kappa \in \mathcal{O}_\kappa, \end{cases}
$$

kde za $J_{h,H}$ vezmeme postupně následující varianty cenové funkce:

(a) $J_{h,H}(\omega_\kappa) := \frac{1}{2} \|\lambda_{H_2} - Q\|^2_{0,\tilde{\Gamma}_{free(\partial\omega_\kappa)}}$,

(b) $J_{h,H}(\omega_\kappa) := \frac{1}{2} \|\lambda_{H_2} - Q\|^2_{-1/2,\tilde{\Gamma}_{free(\partial\omega_\kappa)}}$,

(c) Varianta (a) + filtrace průběhu λ_{H_2},

kde λ_{H_2} je poslední komponenta řešení problému $(\hat{\mathcal{P}}(\omega_\kappa))_h^H$. K výpočtu duální normy opět užijeme postup uvedený v poznámce 2.13.

Tuto techniku budeme nyní ilustrovat na následujících dvou úlohách:

Příklad 5.1 (*vnitřní Bernoulliho úloha*) Uvažujme vnitřní Bernoulliho úlohu $(\mathcal{P})_{int}$ s hranicí Γ_{fixed} znázorněnou na obr. 5.5 pro Q nabývající hodnot 0.35, 0.5 a 1.0.

Příklad 5.2 (*vnější Bernoulliho úloha*) Tímtéž způsobem řešme vnější Bernoulliho úlohu $(\mathcal{P})_{ext}$, přičemž hranice Γ_{fixed} je nyní znázorněna na obr. 5.8. V tomto případě Q nabývá hodnot -1.25,-1.0 a -0.9.

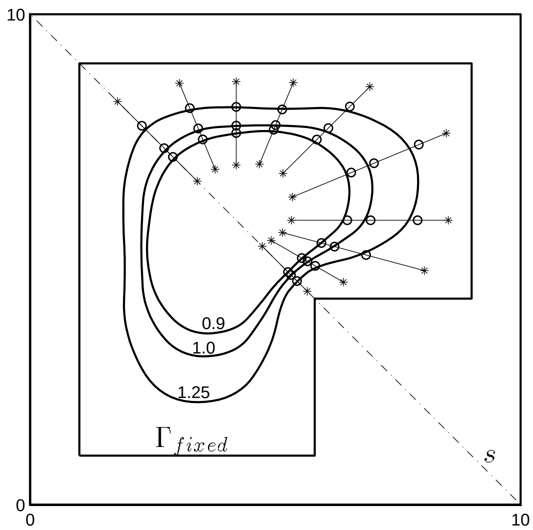
Z důvodu již zmíněné eventuelní nediferencovatelnosti cenového funkcionálu $J_{h,H}$ užijeme k řešení úlohy $(\hat{\mathbb{P}})_{\kappa h}^H$ algoritmus MCRS s omezením počtu vyhodnocení cenové funkce na 3000 a s následným dohledáním optimálního tvaru pomocí algoritmu Nealder-Mead (maximálně dalších 500 vyhodnocení).

Ještě jednou zopakujme, že efektivnost výše popsaného přístupu spočívá v užití rychlých MFO-řešičů na vnitřní úrovni optimalizačního procesu s možností paralelizace jednotlivých vyhodnocení cenového funkcionálu na úrovni vnější a zvláště v jednoduchosti implementace celého problému. Navíc může být tento přístup užit v podstatně složitějších úlohách s volnou hranicí než jsou Bernoulliho úlohy.

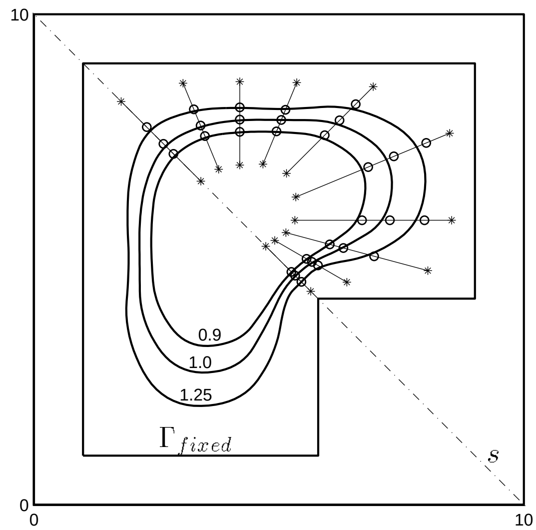
Numerická realizace a výsledky příkladu 5.1

Diskretizace $\mathcal{O}_\kappa$ je tvořena dvojnásobně souvislými oblastmi $\omega_\kappa \subset \Omega$ ve 2D s pevnou částí hranice znázorněnou na obr. 5.5 a proměnnou částí $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$ realizovanou po částech Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu. Z důvodu symetrie úlohy vzhledem k ose s (viz obr. 5.5) stačí za návrhové proměnné vzít pouze řídící body z jedné poloviny oblasti Ω rozdělené osou s. Tímto se počet návrhových proměnných sníží zhruba na polovinu. Konkrétně v našem případě je $n_c = 10$. Krok diskretizace $h = 10/64$, $H/h \doteq 3$ a parametr v ukončovací podmínce metody sdružených gradientů je $\varepsilon = 10^{-5}$.

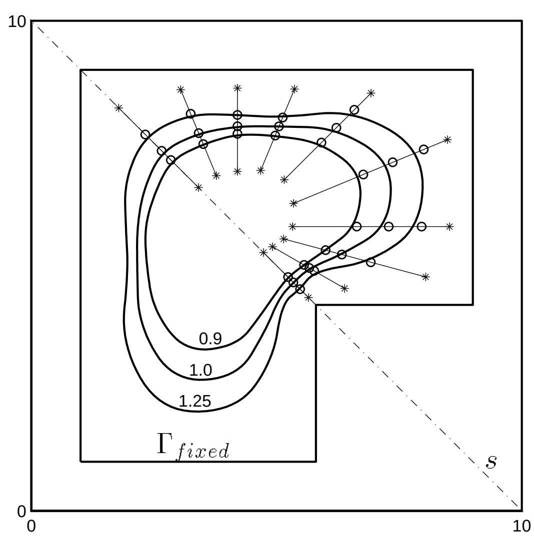
Na obrázcích 5.5-7 vidíme nalezené tvary volné hranice pro zadané hodnoty Q a pro různé varianty cenové funkce $J_{h,H}$. Nejlepších výsledků bylo dosaženo v případě varianty (b), což je možné očekávat na základě výsledků příkladu 4.3. Chování volné hranice vzhledem k volbě Q odpovídá teoreticky známým výsledkům (viz [11]).



Obrázek 5.5. Var. (a).



Obrázek 5.6. Var. (b).

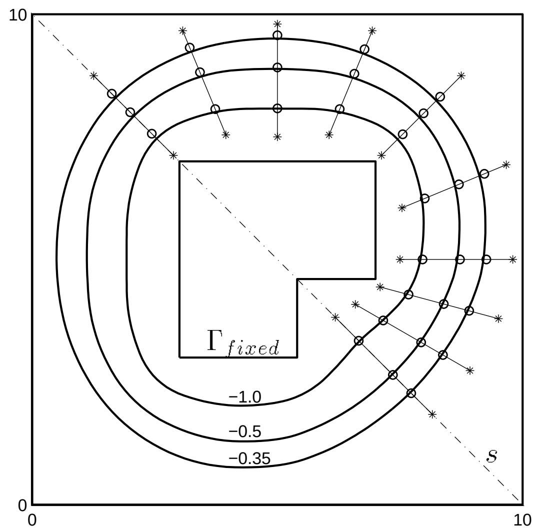


Obrázek 5.7. Var. (c).

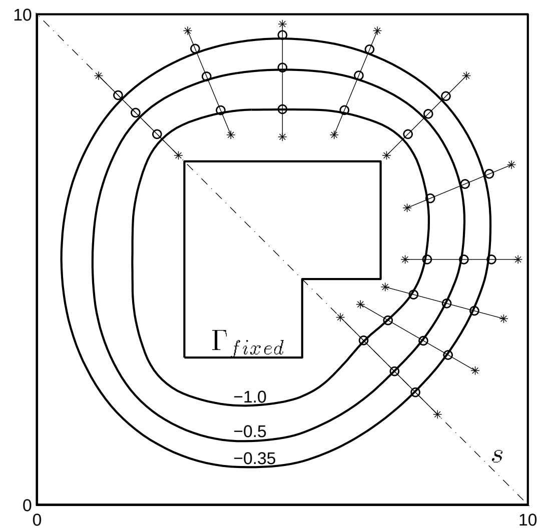
Numerická realizace a výsledky příkladu 5.2

Diskretizace $\mathcal{O}_\kappa$ bude obsahovat opět dvojnásobně souvislé oblasti $\omega_\kappa \subset \Omega$ ve 2D s pevnou částí hranice Γ_{fixed} znázorněnou tentokráte na obr. 5.8 a proměnnou částí $\Gamma_{free}(\partial\omega_\kappa)$ realizovanou po částech Bezierovou křivkou nejvýše druhého řádu. I v tomto případě využijeme symetrie úlohy vzledem k ose s (viz obr. 5.8) a za návrhové proměnné vezmeme pouze řídící body z jedné poloviny oblasti Ω rozdělené osou s. Jejich počet je n_c=10. Krok diskretizace stavové úlohy h, poměr H/h i parametr v ukončovací podmínce metody sdružených gradientů ε jsou stejné jako v předchozím příkladě.

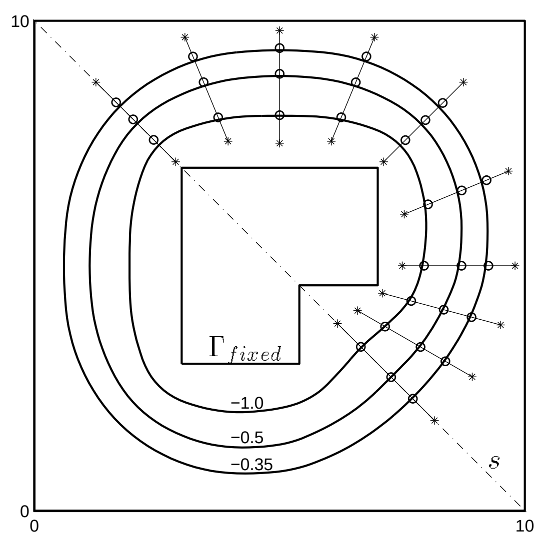
Na obrázcích 5.8-10 jsou znázorněny nalezené tvary volné hranice pro zadané hodnoty parametru Q a pro různé varianty cenové funkce $J_{h,H}$. V tomto případě jsou výsledky ve všech variantách téměř stejné. Chování volné hranice vzhledem k volbě Q opět odpovídá teoreticky známým výsledkům (viz [11]).



Obrázek 5.8. Var. (a).



Obrázek 5.9. Var. (b).



Obrázek 5.10. Var. (c).

Závěr

Tato práce sestává ze dvou částí. V první jsme ukázali efektivnost užití metody fiktivních oblastí pro řešení eliptických okrajových úloh druhého řádu ve 2D i 3D. Její výhody spočívají v jednoduchosti implementace a v možnosti řešení výsledných soustav lineárních algebraických rovnic, které vznikají z konečně prvkové diskretizace, pomocí vysoce efektivních řešičů. V kapitole 1 jsme shrnuli základní výsledky z abstraktní teorie smíšených variačních úloh. Tyto jsme následně užili k řešení Dirichletovy okrajové úlohy ve 2D a 3D (kapitola 2) pomocí BLM a DLM-metody. Ve třetí kapitole jsme pak popsali a analyzovali nový způsob řešení smíšené Dirichletovy-Neumannovy a čistě Neumannovy okrajové úlohy založený na její duální formulaci (v gradientech) a užití hraničních Lagrangeových multiplikátorů k realizaci předepsaných omezení. U takto zformulované úlohy jsme dokázali a na příkladech ověřili řád konvergence přibližných řešení (viz větu 3.7). V závěru kapitol 2-3 jsme navíc efektivnost tohoto přístupu ilustrovali na několika modelových příkladech.

V části II. jsme ukázali, že MFO je taktéž účinným nástrojem pro numerickou realizaci úloh tvarové optimalizace. Podstatně zvyšuje efektivnost vnitřní úrovně optimalizačního procesu, neboť nemusíme vždy znovu konstruovat dělení nové oblasti a tudíž ani znovu sestavovat matici tuhosti. Za tyto výhody platíme tím, že výsledná úloha matematického programování je obecně nehladká. Vzniklé obtíže jsme vyřešily užitím jednoho algoritmu globální optimalizace, který je jednoduše implementovatelný a k nalezení minima potřebuje pouze hodnoty cenové funkce a nikoli její derivace. Počty potřebných vyhodnocení a tedy i celkový čas jsou ovšem podstatně větší v porovnání s gradientními metodami. Toto ale platí, řešíme-li úlohu na jednom procesoru. Poslední trend při řešení rozsáhlých, časově náročných úloh je jejich paralelizace. Zde je nutno poznamenat, že většina algoritmů globální optimalizace je velmi dobře *škálovatelná*, což znamená, že zhruba kolik máme procesorů, tolikrát bude řešení rychlejší. Navíc jedno vyhodnocení cenové funkce pomocí MFO-řešičů dostaneme mnohem rychleji než standardními způsoby. Soustava o miliónu rovnic je vyřešena řádově v desítkách sekund na jednom procesoru. Všechny tyto výhody i nevýhody byli popsány v kapitole 4 a ilustrovány na řadě příkladů ve 2D i 3D. V kapitole 5 jsme pak postupy z předchozí části práce aplikovali na řešení Bernoulliho úloh s volnou hranicí. Pomocí tohoto přístupu lze realizovat i podstaně obecnější problémy s volnou hranicí než jsou Bernoulliho.

Většina dosažených výsledků byla publikována v pracích [21], [23], [24], [29] a v několika příspěvcích do sborníků z různých domácích i zahraničních konferencí, na nichž byly tyto výsledky prezentovány.

Conclusion

This thesis consists of two parts. In the first one the efficiency of FDM's for solving elliptic boundary value problems of the second order in 2D and 3D was verified. FDM's are easy to implement. Moreover, one can use uniform partitions of $\overline{\Omega}$ into finite elements making possible to utilize fast solvers and efficient preconditioners. In Chapter 1 we mentioned an abstract setting of mixed variational formulations and main existence, uniqueness and convergence results. These results were used to formulate BLM and DLM techniques forcing Dirichlet boundary conditions on $\partial\omega$ in 2D and 3D to be satisfied (see Chapter 2). In Chapter 3 we introduced and analyzed the new fictitious domain approach for the numerical realization of the mixed Dirichlet-Neumann and pure Neumann boundary value problems with the second order elliptic operators without the absolute term. The original problem was firstly transformed into its dual form (in gradients). This form was extended to a fictitious domain and the respective flux condition on $\partial\omega$ was released by means of boundary Lagrange multipliers. The divergence free vector fields were realized by means of stream functions. We analyzed the rate of convergence of approximate solutions to this problem.

In the second part we proved that FDM-solvers represent a powerful tool for the numerical realization of the inner optimization level of optimal shape design problems. This approach avoids remeshing of domains into finite elements and assembling the stiffness matrix at each optimization step. On the other hand the use of fictitious domain solvers may reduce smoothness of J. The cost functional may become only directionally but not continuously differentiable. For this reason for its minimization we used a stochastic type global optimization method called MCRS. All advantages and disadvantages of this approach were described in Chapter 4 and illustrated on some model examples in 2D and 3D. In Chapter 5 the shape optimization technique combined with FDM-solvers for realizing Bernoulli's free-boundary problems was utilized. This approach can be used also for the numerical realization of more general free-boundary value problems.

Reference

[1] A. Acker: *An extremal problem involving distributed resistance*, SIAM J. Math. Anal. 12 (1981), 169–172.

[2] G.P. Astrakhantsev: *Iterative methods for solving variational difference schemes for two dimensional second-order elliptic equations*, PhD Thesis, LOMI Akad. Nauk SSSR, Leningrad, 1972 (in Russian).

[3] G.P. Astrakhantsev: *Methods of fictitious domains for a second order elliptic equations with natural boundary conditions*, USSR Computational Math. and Math. Phys. 18 (1978), pp. 114–121.

[4] C. Atamian, G.V. Dinh, R. Glowinski, Jiwen He and J. Periaux: *On some embedding methods applied to fluid dynamics and electro-magnetics*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 91 (1991), pp. 1271–1299.

[5] T. Bäck: *Evolutionary algorithms in theory and practice*, Oxford University Press, New York, 1992.

[6] D. Begis and R. Glowinski: *Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimale. Méthodes de résolution des problèmes approchés*, Applied Mathematics & Optimization 2 (1975), pp. 130–169.

[7] F. Brezzi and M. Fortin: *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] Z. Dostál, A. Friedlander and S.A. Santos: *Augmented Lagrangian with Adaptive Precision Control for Quadratic Programming with Equality Constraints*, Computational optimization and applications 14 (1999), pp. 37–53.

[9] I. Ekeland and R. Temam: *Convex analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[10] A. Fasano: *Some free boundary problems with industrial applications*, Delfour M.C., Sabidussi G. (eds.): Shape optimization and free boundaries (1992), 113–142.

[11] M. Flucher and M. Rumpf: *Bernoulli's free-boundary problem, qualitative theory and numerical approximation*, J. Reine Angew. 486 (1997), 165–204.

[12] A. Friedman: *Free-boundary problem in fluid dynamics*, Astérisque, Soc. Math. France 118 (1984), 55–67.

[13] V. Girault and R. Glowinski: *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*, Japan J. Indust. Appl. Math. 12, 1995.

[14] V. Girault and P.A. Raviart: *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics 749, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[15] R. Glowinski, A.J. Kearsley, T.W. Pan and J. Periaux: *Numerical simulation and optimal shape for viscous flow by a fictitious domain method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20, No8 (1995), pp. 695-711.

[16] R. Glowinski and Y.A. Kuznetsov: *On the solution of the Dirichlet problem for linear elliptic operators by a distributed Lagrange multiplier technique*, CRAS, t. 327, Serie I (1998), pp. 693–698.

[17] R. Glowinski, Y.A. Kuznetsov, T. Rossi and J. Toivanen: *A fictitious domain method with distributed Lagrange multipliers*, World Scientific, 2000.

[18] R. Glowinski, T. Pan and J. Periaux: *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, North-Holland J. Appl. Mech. and Eng. 111 (1994), pp. 283–303.

[19] J. Haslinger and J. Hlaváček: *Approximation of the Signorini problem with friction by a mixed finite element method*, J. Math. Anal. Appl. 86 (1982), pp. 99–122.

[20] J. Haslinger, K.H. Hoffmann and R. Mäkinen: *Optimal control/dual approach for the numerical solution of a dam problem*, Advances in Math. Sciences and Appl., Vol. 2 (1993), pp. 189–213.

[21] J. Haslinger, D. Jedelský, T. Kozubek and J. Tvrdík: *Genetic and random search methods in optimal shape design problems*, JOGO **16** (2000), pp. 109–131.

[22] J. Haslinger and A. Klarbring: *Fictitious domain / mixed finite element approach for a class of optimal shape design problems*, RAIRO M^2AN 29, No4 (1995), pp. 435–450.

[23] J. Haslinger and T. Kozubek: *A fictitious domain approach for a class of Neumann boundary value problems with applications in shape optimization*, East-West Journal of Num. Math. **8** (2000), pp. 1–26.

[24] J. Haslinger and T. Kozubek: *Fictitious domain methods in shape optimization*, Transactions of the VŠB-TU Ostrava, 2001.

[25] J. Haslinger, F. Maître and L. Tomas: *Fictitious domains methods with distributed Lagrange multipliers, Part I: Application to the solution of elliptic state problems. Part II: Application to the solution of shape optimization problems*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **11** (2001), pp. 521–563.

[26] J. Haslinger and P. Neittaanmäki: *Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design*, Second Edition, J. Wiley & Sons, Chichester, 1996.

[27] R.W. Hockney: *A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier Analysis*, J. Assoc. Comput. Mach. 12 (1965), pp. 95–113.

[28] K. Ito, K. Kunisch and G. Peichl: *On the regularization and approximation of saddle point problems without inf-sup condition*, (submitted).

[29] T. Kozubek and J. Haslinger: *A fictitious domain method for the numerical realization of Bernoulli's free-boundary value problems*,(in preparing).

[30] I. Křivý and J. Tvrdík: *The controlled random search algorithm in optimizing regression models*, Comput. Statist. and Data Anal., No20 (1995), pp. 229–234.

[31] I. Křivý and J. Tvrdík: *Stochastic algorithms in estimating regression models*, A. Prat (Ed.), COMPSTAT 1996. Proceedings in Computational Statistics, Physica-Verlag, Heidelberg (1996), pp. 325–330.

[32] I. Křivý and J. Tvrdík: *Some evolutionary algorithms for optimization*, MENDEL'97. 3rd International Mendel Conference on Genetic Algorithms, Brno, PC-DIR (1997), pp. 65–70.

[33] J.L. Lions and E. Magenes: *Non-homogeneous boundary value problems and application*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1972.

[34] G.I. Marchuk, Y.A. Kuznetsov and M.A. Matsokin: *Fictitious domain and domain decomposition methods*, Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1 (1986), pp. 3–35.

[35] J.A. Nelder and R. Mead: *A simplex method for function minimization*, Computer J., No7 (1964), pp. 308–313.

[36] G. Peichl and K. Kunisch: *Shape optimization for mixed boundary value problems based on an embedding domain method*, publication No41, University of Graz, September 1995.

[37] O. Pironneau: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, Springer series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1984.

[38] W.L. Price: *A controlled random search procedure for global optimisation*, Computer J., No20 (1976), pp. 367–370.

[39] G. Strang and T. Nguyen: *Wavelets and filter banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

[40] R.A. Sweet: *A generalized cyclic reduction algorithm*, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974), pp. 206–220.

[41] R.A. Sweet: *A cyclic reduction algorithm for solving block tridiagonal systems of arbitrary dimension*, SIAM J. Numer. Anal. 14 (1977), pp. 706–720.

[42] L. Tomas: *Optimisation de forme et domaines fictifs: Analyse de nouvelles formulations et aspects algorithmiques*, thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1997.