VŠB – Technická univerzita Ostrava

Katedra aplikované matematiky

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Analýza spolehlivosti s iteračními řešiči

Ing. Pavel Praks

Obor: Informatika a aplikovaná matematika

Školitel: Prof. RNDr. Zdeněk Dostál, DSc.

Ostrava, prosinec 2005

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému školiteli Prof. RNDr. Z. Dostálovi, DSc. za velkou péči, kterou mi věnoval v průběhu mého doktorandského studia. Za hodnotné rady děkuji Doc. Ing. R. Brišovi, CSc., Doc. Ing. P. Janasovi, CSc., Prof. Ing. P. Markovi, DrSc., Ing. L. Václavkovi, CSc., a Mgr. V. Vondrákovi, Ph.D.
Můj nemalý dík také náleží Prof. A. Haldarovi (Univ. of Arizona, USA) a Prof. P. E. Labeau (Univ. Libre de Bruxelles, Belgie), kteří mi věnovali čas na konzultace pravděpodobnostního posudku spolehlivosti a simulačních technik. Mé poděkování také patří vedoucímu Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TU Ostrava Doc. RNDr. P. Burdovi, CSc.

Na závěr bych rád poděkoval odpovědným pracovníkům VŠB-TU Ostrava, AV ČR, MŠMT, MPO, grantové agentury ČR, EU a NATO/ASI Brusel za finanční podporu mého výzkumu během mého doktorandského studia.

Anotace

Zadání této disertační práce vyšlo z potřeb stavebních inženýrů, kteří ve své práci požadovali rozšířit paletu metod analýzy inženýrské spolehlivosti konstrukcí tak, aby byla pokud možno snadno osvojitelná a rychle použitelná v průmyslové praxi. I přes velký rozvoj vědy i výpočetní techniky se v současnosti v projekční praxi používají téměř výhradně konzervativní metody, jako např. metoda dílčích součinitelů, která je z hlediska návrháře v podstatě deterministická [22]. Je zřejmé, že deterministické metody mohou jen stěží přesvědčivě popisovat strukturální chování reálné konstrukce, která obsahuje neurčitost mj. ve své geometrii, materiálních vlastnostech a ve vícekomponentním zatížení.

Naproti tomu, tzv. plně pravděpodobnostní přístup, který je reprezentován např. metodou SBRA (Simulation based reliability assessment method [21]) nabízí mj. nesporně výstižnější vyjádření charakteristik zatížení a dokonalejší vyšetření účinků vícekomponentního zatížení, než deterministické metody posudku spolehlivosti.

Tato disertační práce staví na velkém množství příkladů uvedených v knize [22] popisujících zvláště pravděpodobnostní posudek součástí, u nichž existuje analytický model strukturálního chování. Snahou je rozšířit pravděpodobnostní posudek spolehlivosti i na systémy splněním následujících tří hlavních cílů:

1. Počítačová implementace simulačních technik pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti včetně metod redukce rozptylu (Importance Sampling) s důrazem na algoritmy pro efektivní posudek spolehlivosti úloh, u kterých není známa apriorní informace o poruše.

2. Hledání postupů pravděpodobnostního posudku spolehlivosti pro efektivní modelování velmi řídkých, nicméně závažných jevů, např. účinky zemětřesení.

3. Počítačová implementace rychlých iteračních řešičů pro efektivní řešení rozsáhlých soustav lineárních rovnic s více pravými stranami, včetně zajištění numerické stabilizace algoritmů.

Práce se zabývá aplikací algoritmů pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti ve stavební mechanice metodou SBRA a obsahuje několik komparačních studií.

V práci jsou popsány algoritmy v kódu postaveném na prostředí Matlab včetně důležitých implementačních detailů zajišťujících numerickou stabilizaci iteračních řešičů. V práci jsou taktéž uvedeny výsledky rozsáhlých numerických experimentů.

Autorovi této práce není známa literatura, ve které by byly obě navrhované koncepce (tj. rychlé iterační řešiče a metody redukce rozptylu) současně použity pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti.

Abstract

The submission of this dissertation is motivated by needs of civil engineers which required an extension of variety of methods for engineering reliability assessment in civil enginners´ work. Although there is visible development of sciences and computer technology, designers still use almost conservative methods, such as the allowable stress design and the partial factors method, which are point of view in principle deterministic for designers [22]. Of course, deterministic methods can hardly describe the behaviour of a real structure with uncertainties in its geometry, materials properties and multicomponent loads.

On the other hand, so called fully probabilistic approach, which is represented for instance by the SBRA method (Simulation based reliability assessment method [21]) offers more pregnant expression of loads characteristics and superior checkup effects of multicomponent loads than deterministic methods of the reliability assessment.

This dissertation is built on large amount of examples from the book [22], which describes in particular the probabilistic reliability assessment of components with known analytic model of structural behaviour. The aspiration is to extend the probabilistic reliability assessment to systems by the satisfying of the three following main aims:

1. The computer implementation of simulation techniques for probabilistic reliability assessment included variance reduction techniques (Importance Sampling) with accent to algorithms for effective solving of tasks without known prior information about failure.

2. Searching of approaches of probabilistic reliability assessment for effective modeling of rare but important events, such as earthquake effects.

3. The computer implementation of fast iterative solvers for effective solving of large systems of equations with multiple right hand sides, including the numerical stabilization of algorithms;

This work deals with application algorithms for probabilistic reliability assessment in civil engineering by the SBRA method and involves several comparative

studies. Algorithms with implementation details for safeguarding of numerical stabilization of iterative solvers and results of large numerical experiments are presented and discussed as well.

The author of this dissertation has no information concerning reference, that would contains the coupling of the both proposed conceptions (i.e. fast iterative solvers and variance reduction techniques) for probabilistic reliability assessment.

Obsah

Anotace **3**

Abstract **5**

Obsah **7**

Předmluva **10**

1 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti **12**

1.1 Stanovení popisu náhodných veličin 12

1.2 Definování termínu "porucha" stavební konstrukce 12

1.3 Stanovení referenčních kritérií 13

2 Simulační metody **13**

2.1 Přímá metoda Monte Carlo 13

2.2 Rysy přímé metody Monte Carlo pro určení spolehlivosti konstrukcí . 14

2.3 Metoda Stratified Sampling 16

2.3.1 Numerické aspekty metody Stratified Sampling 16

2.3.2 Numerické experimenty 17

2.4 Metoda redukce rozptylu založená na Importance Sampling 21

2.5 Přesnost výpočtu pravděpodobnostního posudku spolehlivosti simulačním přístupem 23

2.5.1 Podstata a přínos pravděpodobnostního pojetí inženýrského posudku spolehlivosti 23

2.5.2 Další rozvoj této problematiky a cíle 23

2.5.3 Výpočet pravděpodobnosti poruchy simulačním přístupem . . 24

2.5.4 Čebyševova nerovnost 24

2.5.5 Stanovení chyby odhadu a počtu nutných simulací Čebyševovou nerovností 25

2.5.6 Centrální limitní teorém 25

2.5.7 Závěr 27

3 Komparační studie analytických modelů **28**

3.1 Motivační příklad: součet dvou náhodných veličin 28

3.2 Kombinace účinků zatížení metodou SBRA užitím přímé metody Monte Carlo a metody Importance Sampling 32

3.2.1 Úvod 32

3.2.2 Modelový příklad 32

3.2.3 Výsledky numerických experimentů 37

3.2.4 Závěr 38

3.3 Posudek spolehlivosti kloubové prutové konstrukce metodou SBRA v prostředí AFEM 39

3.3.1 Úvod 39

3.3.2 Zadání příkladu 39

3.3.3 Numerické experimenty 41

3.3.4 Závěr 43

3.4 Systém Switch-Earth pro efektivní modelování zemětřesení v prostředí SBRA-Importance Sampling 45

3.4.1 Úvod 45

3.4.2 Modelování zemětřesení pomocí histogramu Earth.dis 45

3.4.3 Modelování zemětřesení pomocí přepínače Switch-Earth . . . 47

3.4.4 Pravděpodobnostní posudek rámu 48

3.4.5 Modelování pomocí přímé metody Monte Carlo 50

3.4.6 Modelování pomocí Importance Sampling 51

3.4.7 Závěr 53

4 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti v prostředí CALFEM **54**

4.1 Úvod 54

4.2 Řešení soustavy lineárních rovnic s více pravými stranami 55

4.3 Metoda sdružených gradientů 56

4.3.1 Předpodmíněná metoda sdružených gradientů 58

4.4 Metody sdružených gradientů pro řešení soustav s více pravými stranami 60

4.4.1 Metoda blokových sdružených gradientů (Block CG) 60

4.4.2 Metoda postupných sdružených gradientů (Successive CG) . . 63
4.4.3 Kombinovaná metoda (Successive Block CG) 65
4.4.4 Kombinovaný algoritmus SBCG jako generalizace přístupů SCG a BCG 67
4.5 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukce 67
4.6 Model betonového rámu v prostředí Matlab/Calfem 68
4.6.1 Preprocessing 69
4.6.2 Processing 70
4.6.3 Postprocessing 70
4.7 Závěr 85

Reference **85**

5 Přehled aktivit a výsledků **91**
5.1 Spolupráce na grantových projektech 91
5.2 Seznam publikací 91
5.3 Organizační aktivity 100
5.4 Konzultační činnost – transformace a statistická analýza dat 100
5.5 Ostatní aktivity 101
5.6 Seznam citací 102

Závěr **104**

Conclusion **106**

Předmluva

Velký rozvoj numerických metod a statistiky, informačních technologií, stavební mechaniky a v neposlední řadě také rostoucí konkurenční boj vedou k hledání nových koncepcí pro stanovení posudku bezpečnosti, použitelnosti a trvanlivosti stavebních konstrukcí na plně pravděpodobnostních přístupech.

Nově vyvíjené metody jsou založeny mj. na aplikaci simulačních metod, jmenovitě metody Monte-Carlo. Metodou Monte Carlo rozumíme numerické řešení úloh pomocí mnohokrát opakovaných náhodných pokusů, které jsou vyhodnocovány statistickými metodami. Aplikace simulačních technik na rozsáhlé úlohy přináší potřebu řešení problémů, které jsou na rozhraní informatiky, stavební mechaniky, statistiky a numerické matematiky.

V současné době jsou normy pro navrhování a posuzování spolehlivosti stavebních konstrukcí založeny na polo-pravděpodobnostní metodě dílčích součinitelů. Metodu dílčích součinitelů lze v současnosti nalézt jak v Eurokódech, tak i v americké normě LRFD. Metoda dílčích součinitelů definuje pravidla pro určení účinků zatížení na základě kombinačních vzorců. Je zřejmé, že omezené možnosti kombinačních vzorců nemohou dostatečně přesně popsat strukturální chování reálné stavební konstrukce, která obsahuje neurčitost ve své geometrii, materiálových vlastnostech i v zatížení.

Mezi metody využívající simulační metodu Monte-Carlo lze zařadit metodu SBRA (Simulation-based Reliability Assessment Method). Filozofie metody SBRA spočívá v provádění simulačních výpočtů projektantem v rámci projekční práce. V roce 2001 vyšla kniha [22], která na velkém množství příkladů ukazuje použití tohoto plně-pravděpodobnostního přístupu k určení spolehlivosti na problémech, jejichž strukturální chování lze popsat analyticky.

Tato práce se zabývá přístupy, které rozšířily použití metody SBRA i na úlohy, jejichž strukturální chování lze vypočítat pouze numerickými metodami, např. metodou konečných prvků. Simulace v tomto případě zahrnuje sestavení a následné řešení rozsáhlé soustavy lineárních rovnic, což představuje i v současné době výpočetně náročnou operaci. Cílem výzkumu v oblasti modelování systémů s náhodnými parametry bylo vytvořit programový systém, který rozšíří použití metody SBRA i na složité systémy, jejichž strukturální chování lze vypočítat pouze numerickými metodami, např. metodou konečných prvků [4], [10]. Simulace v tomto případě zahrnuje sestavení a následné řešení rozsáhlé soustavy lineárních rovnic, což může představovat zvláště u velkých úloh časově i paměťově náročný problém.

Cílem této disertace je zvýšení efektivity pravděpodobnostního posudku spolehlivosti v následujících dvou oblastech:

1. Vývoj a implementace simulačních metod s důrazem na metody redukce rozptylu (Variance Reduction Techniques), jejichž cílem je redukce počtu simulačních kroků.

2. Vývoj a implementace iteračních řešičů pro efektivní řešení strukturálně si blízkých úloh. Cílem je využít výhodných vlastností iteračních řešičů při opakovaném řešení stavových problémů a redukovat tak cenu deterministické analýzy. Tomuto tématu se věnují články [7], [26], [10], [6], [19].

Výše uvedenému členění odpovídá i struktura této disertační práce: Sekce 1 se zabývá pravděpodobnostním posudkem spolehlivosti. Sekce 2 popisuje tři simulační metody pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti: přímou metodu Monte-Carlo, metodu redukce rozptylu Stratified Sampling a metodu redukce rozptylu Importance Sampling. Třetí sekce obsahuje komparační studie analytických modelů. Sekce 4 se zabývá pravděpodobnostním posudkem spolehlivosti metodou konečných prvků simulačním přístupem. V sekci jsou dále popsány rychlé iterační řešiče pro efektivní pravděpodobnostní posudek spolehlivosti. Diskutovány jsou také detaily numerické stabilizace algoritmů. Pátá sekce obsahuje přehled aktivit a výsledků, kterých bylo dosaženo v průběhu doktorandského studia. Závěr obsahuje přehled hlavních výsledků dosažených v této práci.

1 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti

Aspekty simulačních metod ve stavebním inženýrství spočívají především ve výzkumu strukturálních vlastností systémů a v definování pevnostních kritérií. Hlavní důraz je kladen na

- stanovení popisu náhodných veličin
- definování termínu "porucha" stavební konstrukce
- stanovení kritérií pro rozhodnutí, zda stavební konstrukce je spolehlivá

1.1 Stanovení popisu náhodných veličin

Koncept SBRA popisuje neurčitost pomocí diskrétní náhodné veličiny (useknutých histogramů). Tento fakt je výhodný, neboť reálné náhodné veličiny (např. Youngův modul pružnosti) mohou nabývat hodnot pouze z omezeného intervalu [21], [22].

1.2 Definování termínu "porucha" stavební konstrukce

Předpokládejme, že spolehlivost stavební konstrukce můžeme popsat pomocí deterministické funkce "safety function" SF, která reprezentuje vzájemné působení odolnosti stavební konstrukce R (resistance) a účinků zatížení Q:

$$SF = R - Q. \tag{1}$$

Situace $SF \leq 0$ indikují poruchu ve stavební konstrukci. Na druhé straně situace $SF > 0$ jsou bezpečné. Termín "porucha" závisí na definici funkce SF.

V praxi termín "porucha" může plynout z překročení mezního stavu únosnosti nebo mezního stavu použitelnosti. Překročení mezního stavu únosnosti často znamená kolaps stavební konstrukce, zatímco překročení mezního stavu použitelnosti znamená podstatné zhoršení funkce konstrukce, např. vznik trvalých deformací [22], [12].

Typ konstrukce	**Návrhová pravděpodobnost** p_d
Méně významná konstrukce	0,000 5
Běžná konstrukce	0,000 07
Velmi důležitá konstrukce	0,000 008

Tabulka 1: Návrhové úrovně a jim příslušné návrhové pravděpodobnosti v závislosti na typu konstrukce podle normy ČSN 73 1401-1998.

1.3 Stanovení referenčních kritérií

Řekneme, že stavební konstrukce je spolehlivá (na dané návrhové úrovni), pokud pravděpodobnost poruchy p_f je nižší než cílová (návrhová) pravděpodobnost p_d (target design probability), tj. pokud je splněna podmínka

$$p_f < p_d. \tag{2}$$

Je přirozené požadovat, aby stavební konstrukce měla co největší vnitřní rezervu, tzn. aby pravděpodobnost poruchy bylo číslo blízké nule. Velikost návrhových pravděpodobností určují normy (např. ČSN 73 1401-1998), viz např. Tab. 1 a [22].

2 Simulační metody

Efektivita simulačního procesu může být zvýšena použitím vhodné simulační techniky. V této části budou popsány přímá metoda Monte Carlo a metoda redukce rozptylu Importance sampling.

2.1 Přímá metoda Monte Carlo

Nechť $\mathbf{X}$ je náhodná veličina, která je určena hustotou pravděpodobnosti f a nechť A je (neznámá) "aktivní" oblast z domény $\mathbf{X}$, která definuje hledanou událost (poruchu). Naším cílem je odhadnout pravděpodobnost poruchy

$$p_f = P(\mathbf{X} \in A). \tag{3}$$

Tuto pravděpodobnost odhadneme pomocí N náhodných výběrů $X_1; \ldots ; X_N$ z $\mathbf{X}$. Vyčíslením funkce SF získáme hodnoty

$$Y_i = SF(X_i), \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4}$$

Nechť $g(Y)$ je indikátor poruchy, tedy funkce, která vrací hodnotu 1 v případě, že nastala událost (porucha), tj. v případě, že $Y \leq 0$; v opačném případě nechť funkce $g(Y)$ vrací hodnotu 0. Pak pravděpodobnost poruchy můžeme odhadnout výběrovým průměrem [23], [30]

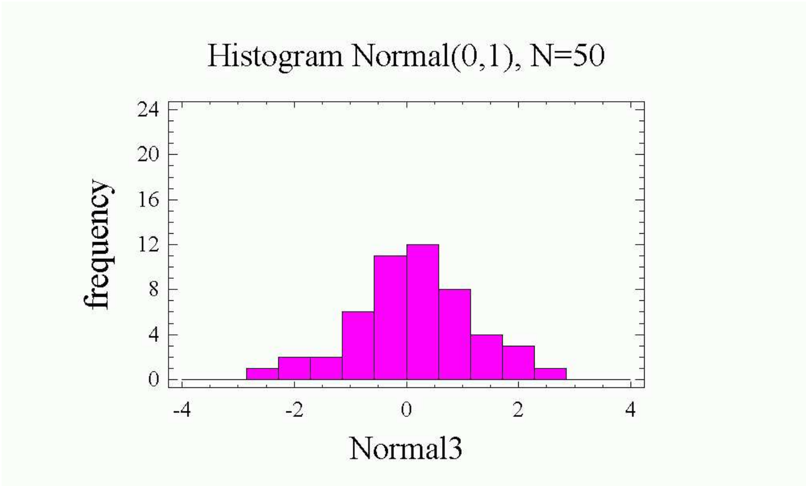
$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(Y_i). \tag{5}$$

Odhad pravděpodobnosti poruchy vyžaduje velký počet simulací v případě, pokud je pravděpodobnost poruchy velmi malé číslo [30], [3]. Neprovedeme-li "dostatečně velký" počet kroků metody Monte Carlo, může se stát, že nenastane žádná událost indikující poruchu. Tento fakt představuje velký problém, pokud je cena simulace vysoká, např. při analýze složitých úloh metodou konečných prvků [20].

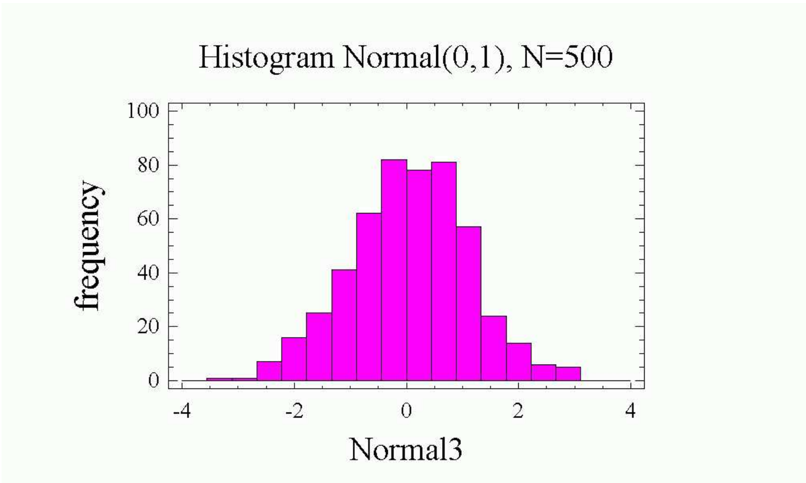
2.2 Rysy přímé metody Monte Carlo pro určení spolehlivosti konstrukcí

Shrňme si nevýhody přímé metody Monte-Carlo pro simulování událostí, které se vyskytují s velmi malou pravděpodobností:

- Pro určení spolehlivosti velmi spolehlivých systémů (stavebních konstrukcí) musíme volit velký počet kroků metody Monte Carlo.
- Pouze nepatrná část kroků metody Monte Carlo vrátí designérovi informaci o poruše a její příčině.
- Pokud neprovedeme "dostatečně velký" počet kroků metody Monte-Carlo, může se stát, že nenastane žádná událost indikující poruchu (viz např. Obr. 1 a Obr. 2) .
- Efektivitu celého procesu lze jen obtížně zvětšit zahrnutím apriorních informací o problému.



Obrázek 1: Náhodný výběr z histogramu Normal3 pro N=50 simulací. Není detekována žádná simulace, která by splňovala podmínku $Normal3 > 3$, resp. podmínku $Normal3 < -3$ ("chvosty" normálního rozdělení).



Obrázek 2: Náhodný výběr z histogramu Normal3 pro N=500 simulací. I při větším počtu simulací zůstává "chvost" rozdělení nedostatečně pokryt simulacemi.

2.3 Metoda Stratified Sampling

Nechť D je doména náhodné veličiny $\mathbf{X}$, která je rozdělena do I disjunktních podmnožin D_i (viz např. Obr. 3) o velikosti w_i =P($\mathbf{X}\in D_i$) a nechť platí

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = 1.$$

Nechť X_{ij} , $j = 1$,..., N_i je náhodný výběr z podmnožiny D_i. Nechť příslušné hodnoty Y jsou označeny symbolem $Y_{ij} = SF(X_{ij})$. Pak pravděpodobnost poruchy můžeme odhadnout výrazem [23]

$$p_f \approx \sum_{i=1}^{I} w_i(\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} g(Y_{ij})).$$

Poznámka: Na přímou metodu Monte-Carlo lze nahlížet jako na speciální případ metody Stratified Sampling, ve které je voleno $I = 1$, tj. $D_1 = D$a w_1= 1.

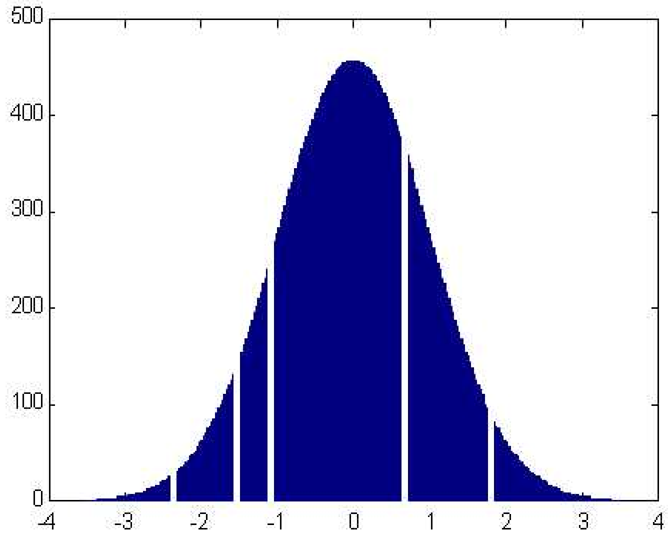
2.3.1 Numerické aspekty metody Stratified Sampling

Metoda Stratified Sampling spočívá v dekompozici domény náhodné veličiny D do několika disjunktních podmnožin D_i, jejichž velikost w_i lze snadno vypočítat. Lze ukázat, že rozptyl v podmnožině D_i nebude nikdy větší než rozptyl v doméně D. Dekompozice domény je dále velmi výhodná, neboť

- vhodným rozdělením domény D (užitím apriorní informace o problému) lze provádět simulace na kritických hodnotách náhodné veličiny, jichž náhodná veličina $\mathbf{X}$ nabývá s velmi malou pravděpodobností ("chvost" rozdělení). Stojí za připomenutí, že přímá metoda Monte-Carlo není příliš vhodná pro modelování těchto řídkých jevů.

- V podmnožině D_i se funkce *SF(*$\mathbf{X}$) vyčísluje pouze pro $\mathbf{X}\in D_i$. Rozdělení domény D do několika podmnožin proto omezuje možné rozpětí vstupních parametrů. Tento fakt může hrát důležitou roli v případě, kdy je vyhodnocení funkce *SF* spojeno s iteračními řešiči. Pokud nebudou perturbace vstupních parametrů příliš velké (což lze vhodným rozdělením domény D vždy zajistit), můžeme pro řešení vzniklých perturbovaných soustav lineárních rovnic v doméně D_i s výhodou použít modifikovanou verzi metody sdružených gradientů, která dokáže automaticky znovu použít dříve získanou informaci o řešení. Výše uvedený postup může být mnohem efektivnější než opakované řešení nezávislých soustav.

- Efektivitu metody Stratified Sampling lze dále zlepšit využitím přirozené paralelizace.



Obrázek 3: Příklad rozdělení domény histogramu NORMAL3.HIS na 6 podmnožin.

2.3.2 Numerické experimenty

Cílem této studie je porovnání metody Stratified Sampling s přímou metodou Monte Carlo. Zadání příkladu bylo původně definováno v knize [22], str. 70. Na stejném místě lze najít řešení přímou metodou Monte Carlo. Pro ověření funkčnosti metody byl volen příklad, jehož řešení lze vypočítat analyticky: Určení distribuční funkce součtu dvou binomických náhodných veličin

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y},$$

kde $\mathbf{X} \sim \mathrm{Bi}(0.6, 4)$, $\mathbf{Y} \sim \mathrm{Bi}(0.7, 4)$, viz Tab. 2.

x	$f_x(x)$	y	$f_y(y)$
0	0.0256	0	0.0081
1	0.1536	1	0.0756
2	0.3456	2	0.2646
3	0.3456	3	0.4116
4	0.1296	4	0.2401

Tabulka 2: Rozdělení binomické náhodné veličiny $\mathbf{X}\sim$ Bi(0.6;4) a $\mathbf{Y}\sim$ Bi(0.7;4).

Je zřejmé, že doména náhodné veličiny $\mathbf{Z} = \{0, 1, \ldots, 8\}$. Stojí za připomenutí, že odhad rozdělení náhodné veličiny **Z** se dotýká i "chvostu" rozdělení, neboť

$$P(Z = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = 0.00020736.$$

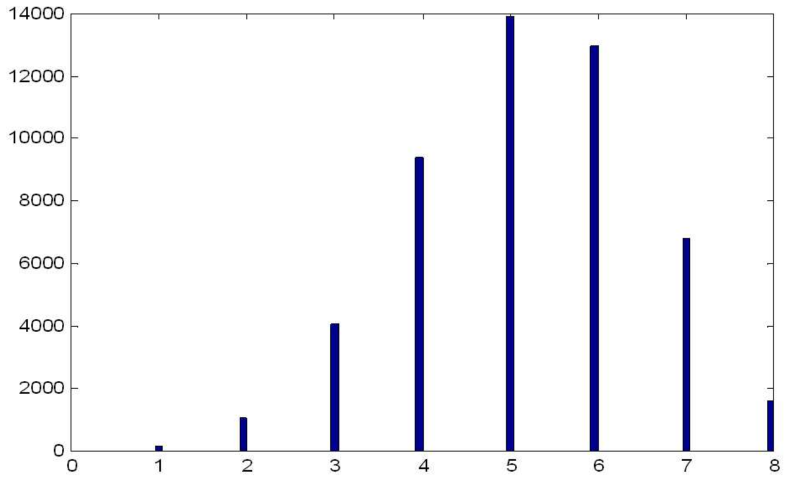
Pro simulaci náhodné veličiny **X** a **Y** jsme použili histogramy BI4-06.HIS a BI4-07.HIS. Histogram četností náhodné veličiny **Z** pro N = 50 000 simulací je znázorněn na Obrázku 4, empirickou distribuční funkce lze nalézt v levé části Tab. 3. Z tabulky je vidět, že pravděpodobnost jevu $\mathbf{Z} = 0$ byla odhadnuta relativní četností 10 / 50 000 = 0.0002.

Stejný příklad byl také vyřešen metodou Stratified Sampling. Rozdělení domény histogramů bylo pro jednoduchost voleno pro obě náhodné veličiny shodně: Oba histogramy byly rozděleny na následujících 6 podmnožin:

$$< 1, \quad 100 >, \quad < 101, \quad 256 >, \quad < 257, \quad 1 \quad 792 >,$$

$$< 1 \quad 793, \quad 5 \quad 248 >, \quad < 5 \quad 249, \quad 8 \quad 704 >, \quad < 8 \quad 705, \quad 10 \quad 000 > .$$

(Uveďme, že každý histogram obsahuje shodně celkem 10 000 frekvencí.) Protože úloha obsahuje dvě náhodné veličiny, problém byl řešen na $6^2 = 36$ oblastech. Úloha byla řešena opakovaně vždy pro jinou hodnotu parametru N_i (počet simulací v oblasti). Výsledky lze nalézt v pravé části Tab. 3. Například, pokud budeme v každé oblasti provádět N_i= 5 simulací, celkový počet simulací bude $5 \times 36 = 180$. Z Tab. 3 je vidět, že již při tomto počtu simulací byla pravděpodobnost jevu $\mathbf{Z} = 0$ odhadnuta se stejnou přesností, jako u přímé metody Monte-Carlo při N = 50 000 simulací.



Obrázek 4: Histogram četností náhodné veličiny $Z = X + Y$ při $N = 50\,000$ Monte-Carlo simulací.

Tento fakt ukazuje výhodnost použití metody Stratified Sampling zvláště v případě vhodného rozdělení domén histogramů v okolí málo pravděpodobných kritických hodnot ("chvost" rozdělení).

Na druhé straně lze metodu Stratified Sampling použít jen s velkými obtížemi pro řešení obecných úloh s velkým počtem náhodných parametrů (řádově desítky). Není totiž zřejmé na kolik oblastí a podle jakého klíče rozdělovat domény histogramů. Z těchto důvodů byl další výzkum využití metody Stratified Sampling pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukcí zastaven. Ukázalo se totiž, že pro řešení obecných úloh, u kterých není k dispozici apriorní informace o poruše, je výhodné použít jinou metodu redukce rozptylu - metodu Importance Sampling.

Z	Přímá metoda Monte-Carlo, 50 000 simulací celkem	Stratified Sampling, N_i=5 simulací v každé oblasti, 180 simulací celkem	Stratified Sampling, $N_i = 10$ simulací v každé oblasti, 360 simulací celkem	Stratified Sampling, $N_i = 20$ simulací v každé oblasti, 720 simulací celkem
0	0.0002 (tj. 10 / 50 000)	0.0002	0.0002	0.0002
1	0.0033	0.0041	0.0028	0.0038
2	0.0244	0.0272	0.0320	0.0237
3	0.1061	0.1106	0.1281	0.1042
4	0.2941	0.2446	0.2748	0.3014
5	0.5727	0.4975	0.6229	0.5642
6	0.8323	0.8578	0.8458	0.8324
7	0.9682	0.9832	0.9742	0.9563
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabulka 3: Odhad distribuční funkce náhodné veličiny **Z** přímou metodou Monte Carlo a metodou Stratified Sampling

2.4 Metoda redukce rozptylu založená na Importance Sampling

Porucha stavební konstrukce může nastat, pokud jsou hodnoty vstupních parametrů funkce SF extrémní [31]. Náhodná veličina $\mathbf{X}$ nabývá těchto extrémních hodnot obvykle s velmi malou pravděpodobností [3], neboť simulujeme chování velmi spolehlivých systémů.

Metoda Importance sampling používá k simulaci jinou funkci hustoty pravděpodobnosti (importance sampling density function), funkci f^*. Cílem tohoto přístupu je zvětšit počet simulací detekujících poruchu při zachování malého počtu simulací.

Pravděpodobnost poruchy odhadneme pomocí N náhodných výběrů $X_1^*; \ldots; X_N^*$ z $\mathbf{X^*}$, což je náhodná veličina s rozdělením f^*, která nabývá stejný rozsah hodnot jako původní náhodná veličina $\mathbf{X}$. Vyčíslením funkce SF získáme hodnoty

$$Y_i^* = SF(X_i^*), \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Pravděpodobnost poruchy pak odhadneme výrazem [3]

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(Y_i^*) m_i(X_i^*), \tag{7}$$

kde

$$m_i(X_i^*) = \frac{f(X_i^*)}{f^*(X_i^*)} \tag{8}$$

je poměr mezi původním rozdělením f a novým rozdělením f^*. Stojí za poznamenání, že přímá metoda Monte Carlo je speciálním případem metody Importance sampling, pokud $f^* = f$.

Určení optimálního tvaru rozdělení f^* vyžaduje apriorní informace o strukturálním chování systému. Pokud tyto apriorní informace nejsou k dispozici, za funkci f^* můžeme volit např. hustotu pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení [3], která zajistí rovnoměrné prohledávání domény náhodné veličiny. Další možnost je použít Taguchi Design [3]. Integrace metody konečných prvků a Taguchi Designu je diskutována v [35], [36].

Výhodou metody Importance sampling je fakt, že výpočet odezvy funkce spolehlivosti SF je prováděn nezávisle na parametrech rozdělení náhodné veličiny $\mathbf{X}$.

Z tohoto důvodu může být snadno vypočítána pravděpodobnost poruchy pro různá rozdělení f. Pokud např. výsledky simulací ukážou, že pravděpodobnost poruchy je pro dané rozdělení f příliš vysoká, můžeme změnit tvar rozdělení funkce f (použít jiný histogram), přepočítat příslušné váhové koeficienty $m_i(X_i^*)$ a vypočítat pravděpodobnost poruchy pro toto nové rozdělení **bez nutnosti dalších simulací**. Přepočítání váhových koeficientů $m_i(X_i^*)$ je v porovnání s cenou simulace velmi levná operace.

2.5 Přesnost výpočtu pravděpodobnostního posudku spolehlivosti simulačním přístupem

Text této sekce vychází z [39].

2.5.1 Podstata a přínos pravděpodobnostního pojetí inženýrského posudku spolehlivosti

Simulační techniky představují robustní nástroj pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti obecných systémů. Simulačním technikám je věnována celá řada publikací, viz např. [29], [32], [21], [22], [30], [5].

Simulační techniky patří mezi stochastické metody umožňující získat tzv. intervalový odhad hledaného (neznámého) parametru. Výsledkem simulačního procesu bývá interval, na kterém se s danou pravděpodobností α nachází hodnota hledaného parametru (např. pravděpodobnost poruchy konstrukce p) odhadnutého s maximálně přípustnou chybou $\varepsilon > 0$.

Důležitým rysem simulačních technik je skutečnost, že chyba odhadu vůbec nezávisí na počtu vstupních náhodných proměnných [29]. Z tohoto důvodu jsou simulační techniky velmi vhodné pro analýzu spolehlivosti úloh obsahujících velké množství náhodně-proměnných vstupních parametrů. Zvýšení přesnosti odhadu lze zajistit nárustem počtu simulací. Nicméně se ukazuje, že k dosažení vysoké přesnosti odhadu je třeba velkého počtu simulací [29].

2.5.2 Další rozvoj této problematiky a cíle

V současnosti se proto věnuje pozornost technikám snižujícím rozptyl (chybu) simulačních technik (např. Importance Sampling, Stratified Sampling [29]). Snížení výpočetní doby simulačního procesu lze také dosáhnout implementací simulačních algoritmů na paralelních počítačích. Tato implementace je vzhledem k nezávislosti simulací velmi efektivně paralelizovatelná. V poslední době je velká pozornost věnována spolehlivosti dynamických systémů (Dynamic Reliability). Modelování dynamických systémů umožňuje řešit úlohy, jejichž vnitřní struktura se mění s časem, např. evoluce a/nebo stárnutí systému [5].

2.5.3 Výpočet pravděpodobnosti poruchy simulačním přístupem

Efektivní výpočet pravděpodobnosti poruchy hraje klíčovou roli v pravděpodobnostním posudku konstrukcí. Výpočet pravděpodobnosti poruchy simulačními technikami je zvláštním případem určování střední hodnoty náhodné veličiny [30]. Bude ukázáno, jak předem stanovit horní mez chyby (rozptylu) a také jak určit počet nutných simulací. Podrobnosti viz [29], [32], [30].

Pravděpodobnost určité události (např. poruchy) p lze odhadnout pomocí n nezávislých simulací následovně: Definujme $\chi_F(i)$=1 pro případ, že v i-té simulaci nastala událost (porucha), v opačném případě nechť $\chi_F(i)$=0.

Na výsledky simulací $\chi_F(i)$ se lze dívat jako na realizace Bernoulliovy náhodné veličiny χ_F s (neznámým) parametrem p [34]. Pro střední hodnotu náhodné veličiny χ_F platí: $\mathrm{E}(\chi_F(\mathrm{i})) = p$, $\mathrm{i} \in \mathbf{N}$.

Označíme-li $\chi = \sum_{i=1}^{n} \chi_F(i)$, pak hodnota χ označuje četnost, tj. počet událostí (poruch) v n pokusech (simulacích). Jak známo, χ je náhodná veličina, která má binomické rozdělení charakterizující pravděpodobnost, že se v n pokusech (simulacích) vyskytne sledovaná událost (porucha) právě k-krát. Platí tedy

$$P(\chi = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde $0 \leq p \leq 1$ je konstanta a $k = 0, 1, \ldots, n$ proměnná veličina. Lze odvodit, že pro střední hodnotu a rozptyl binomické náhodné veličiny χ platí

$$E(\chi)=np, D(\chi)=np(1\text{-}p).$$

Využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu lze ukázat, že

$$E(\frac{\chi}{n}) = \frac{1}{n} E(\chi) = p, \quad D(\frac{\chi}{n}) = \frac{1}{n^2} D(\chi) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

2.5.4 Čebyševova nerovnost

Nechť ξ je náhodná veličina s libovolným, obecně neznámým rozdělením. Předpokládejme, že existuje konečná střední hodnota $E(\xi)$ a konečný rozptyl $D(\xi)$. Pak

$$P(|\xi - E(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2} \tag{9}$$

pro každé libovolně malé $\varepsilon > 0$, viz [34].

2.5.5 Stanovení chyby odhadu a počtu nutných simulací Čebyševovou nerovností

Položíme-li v Čebyševově nerovnosti (9) $\xi = \frac{\chi}{n}$ a jelikož $E(\xi) = p$, získáme tzv. Bernoulliho nerovnost [34] ve tvaru

$$P(|\frac{\chi}{n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \tag{10}$$

Protože $p(1-p) \leq 1/4$, snadno dostaneme

$$P(|\frac{\chi}{n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \tag{11}$$

Odtud plyne Bernoulliho závěr

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\chi}{n} - p| < \varepsilon) = 1,$$

který udává vztah mezi relativní četností a pravděpodobností jevu [30], [34]. Pro praktické výpočty je velmi užitečná Bernoulliho nerovnost ve tvaru (10) udávající matematický vztah mezi počtem simulací n, maximálně přípustnou chybou $\varepsilon > 0$ a spolehlivostí odhadu $0 < \alpha < 1$. Označíme-li totiž

$$\alpha = \alpha(n, \varepsilon) = 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \tag{12}$$

dostaneme pro zjišťovanou pravděpodobnost poruchy p pomocí relativní četnosti $\frac{k}{n}$ intervalový odhad $p \in \left(\frac{k}{n} - \varepsilon; \frac{k}{n} + \varepsilon\right)$ na „hladině spolehlivosti“ α, tedy

$$P\left[p \in \left(\frac{k}{n} - \varepsilon; \frac{k}{n} + \varepsilon\right)\right] \geq \alpha \tag{13}$$

Pro reálné výpočty se volí např. $\alpha = 0.95$.

Ze vztahu (12) lze dále vyjádřit počet simulací n nutných pro odhad pravděpodobnosti poruchy pro danou přípustnou chybu ε a danou spolehlivost odhadu α:

$n \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\alpha)}$, resp. $n \leq \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\alpha)}$.

2.5.6 Centrální limitní teorém

Nechť ξ je náhodná veličina, která má normální rozdělení se střední hodnotou $E(\xi)$ a s nenulovým konečným rozptylem $D(\xi)$. Pak

$$\chi = \frac{\xi - E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}$$

má normované normální rozdělení, tedy $E(\xi)$=0 a $D(\xi)$=1.

Nechť χ opět označuje četnost, tj. počet událostí (poruch) v n pokusech (simulacích). Z úvodu této sekce víme, že χ je náhodná veličina, která má binomické rozdělení charakterizující pravděpodobnost, že se v n pokusech (simulacích) vyskytne sledovaná událost (porucha) právě k-krát [34]. Připomeňme, že pro střední hodnotu a rozptyl binomické náhodné veličiny χ platí $E(\chi)=np$, $D(\chi)=np(1\text{-}p)$. Označme $\eta = \frac{\chi - E(\chi)}{\sqrt{D(\chi)}} = \frac{\chi - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pro náhodnou veličinu η Moivre a Laplace dokázali tuto speciální formu centrálního limitního teorému [34]:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\chi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \phi(x). \tag{14}$$

Zde symbol $\phi(x)$ označuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení, tedy

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Hodnoty tohoto integrálu jsou tabelovány.

Ze vztahu (14) plyne

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\chi - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \phi(b) - \phi(a),$$

kde a, b jsou konstanty [32]. Položme $b = t_\alpha$, $a = -t_\alpha$, kde $t_\alpha > 0$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-\, t_\alpha < \frac{\chi - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t_\alpha\right) = \phi(t_\alpha) - \phi(-t_\alpha) =$$

$$= \phi(t_\alpha) - [1 - \phi(t_\alpha)] = 2\phi(t_\alpha) - 1 = \alpha \tag{15}$$

Při úpravě výrazu jsme využili vlastnosti distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, plynoucí ze symetrie Gaussovy křivky.

Jednoduchou úpravou vztahu (15) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-\, t_\alpha < \frac{\chi - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t_\alpha\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\chi - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < t_\alpha\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\chi}{n} - p\right| < t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right). \tag{16}$$

Položíme-li $\varepsilon = t_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, pak snadno vyjádříme počet simulací n nutných pro odhad pravděpodobnosti p při dané maximální přípustné chybě ε a spolehlivosti $0 < \alpha < 1$:

$n \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2$, resp. $n \leq \frac{1}{4\varepsilon^2} t_\alpha^2$.

Pro reálné výpočty volíme např. $\alpha = 0.95$. V tomto případě $t_\alpha = 1.960$.

2.5.7 Závěr

Čebyševova nerovnost představuje obecný prostředek pro odhad přesnosti výpočtu pravděpodobnosti poruchy simulačními technikami. Odhady založené na centrálním limitním teorému dávají mnohem optimističtější výsledky [30], [34]. Chceme-li snížit (při pevně dané spolehlivosti odhadu α) maximálně přípustnou chybu (přesnost odhadu) ε o jeden řád, je třeba v obou případech provést stonásobně více simulací, viz vzorce (6, 10), [30], [32]. Na druhé straně velkou výhodou simulačních technik je jejich velká robustnost a skutečnost, že chyba odhadu simulačních technik vůbec nezávisí na počtu vstupních náhodných proměnných [29].

3 Komparační studie analytických modelů

3.1 Motivační příklad: součet dvou náhodných veličin

Cílem numerických experimentů v této sekci je verifikace implementace metody Importance sampling do SBRA konceptu a porovnání s přímou metodou Monte Carlo. Obě simulační techniky byly použity pro řešení modelového problému, jehož přesné řešení lze určit analyticky: Jednalo se o součet dvou nezávislých náhodných veličin, které jsou určeny normálním rozdělením o parametrech $N(\mu, \sigma)$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}, \tag{17}$$

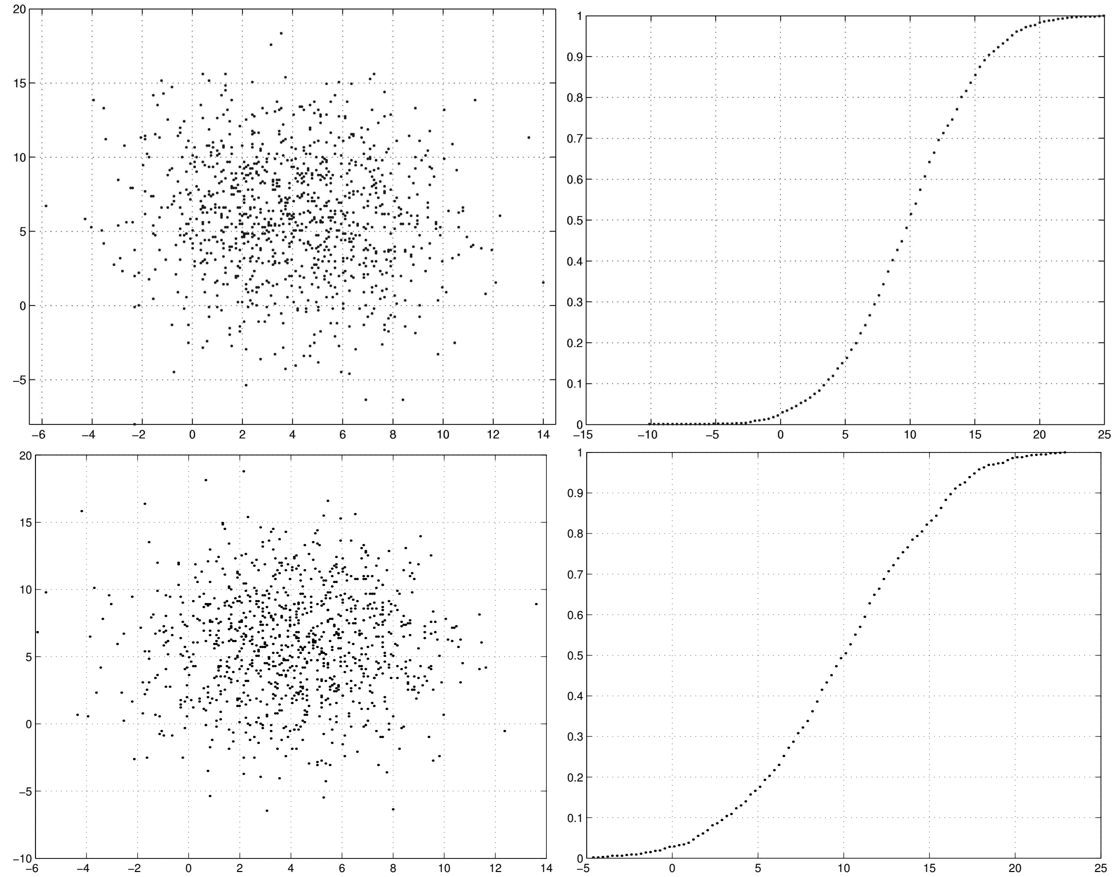
kde $\mathbf{X} \sim N(4, 3)$ a $\mathbf{Y} \sim N(6, 4)$. Z vlastností normálního rozdělení plyne, že náhodná veličina $\mathbf{Z}$ bude mít také normální rozdělení s parametry

$$\mathbf{Z} \sim N(4 + 6, \sqrt{3^2 + 4^2}) = N(10, 5). \tag{18}$$

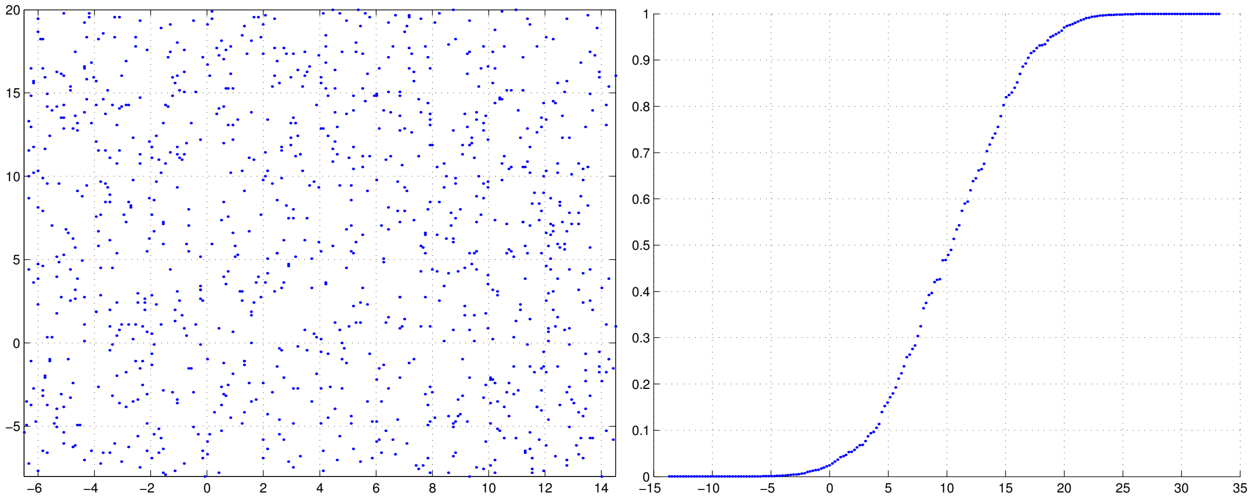
Náhodné veličiny $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ byly modelovány histogramem normovaného normálního rozdělení NORMAL3.HIS, viz [22]. Rozsah hodnot tohoto histogramu je od -3.5 do 3.5. Modelování obdobného problému pouze přímou metodou Monte-Carlo lze nalézt v [22], str. 70.

Empirická kumulativní distribuční funkce (c.d.f.) náhodné veličiny $\mathbf{Z}$ v závislosti na použité simulační technice je vyobrazena na Obr. 5, 6 a 7. Jako funkce f^* byla pro metodu Importance Sampling ve všech experimentech použita hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení. Z výsledků plyne, že přesnost a numerická stabilita přímé metody MC je v případě malého počtu simulací ($N = 1000$) nedostatečná, viz Obr. 5. Naproti tomu, metoda Importance Sampling je schopna detekovat kritické události, které nastávají s malou pravděpodobností i v případě, pokud je počet simulací nízký ($N = 1000$), viz Obr. 6.

Z numerických experimentů plyne, že metoda Importance sampling dává uspokojivou informaci o tvaru empirické distribuční funkce náhodné veličiny $\mathbf{Z}$ v případech, ve kterých počet simulačních kroků zůstává nízký, řádově stovky: I při tomto relativně malém počtu simulací lze získat informace o tvaru empirické distribuční funkce $\mathbf{Z}$ v oblastech, na kterých $\mathbf{Z}$ nabývá hodnoty s velmi nízkými pravděpodobnostmi (oblasti kolem $\mathbf{Z}$=-10, respektive $\mathbf{Z}$=+20), viz Obr. 7. Efektivita simulací na těchto

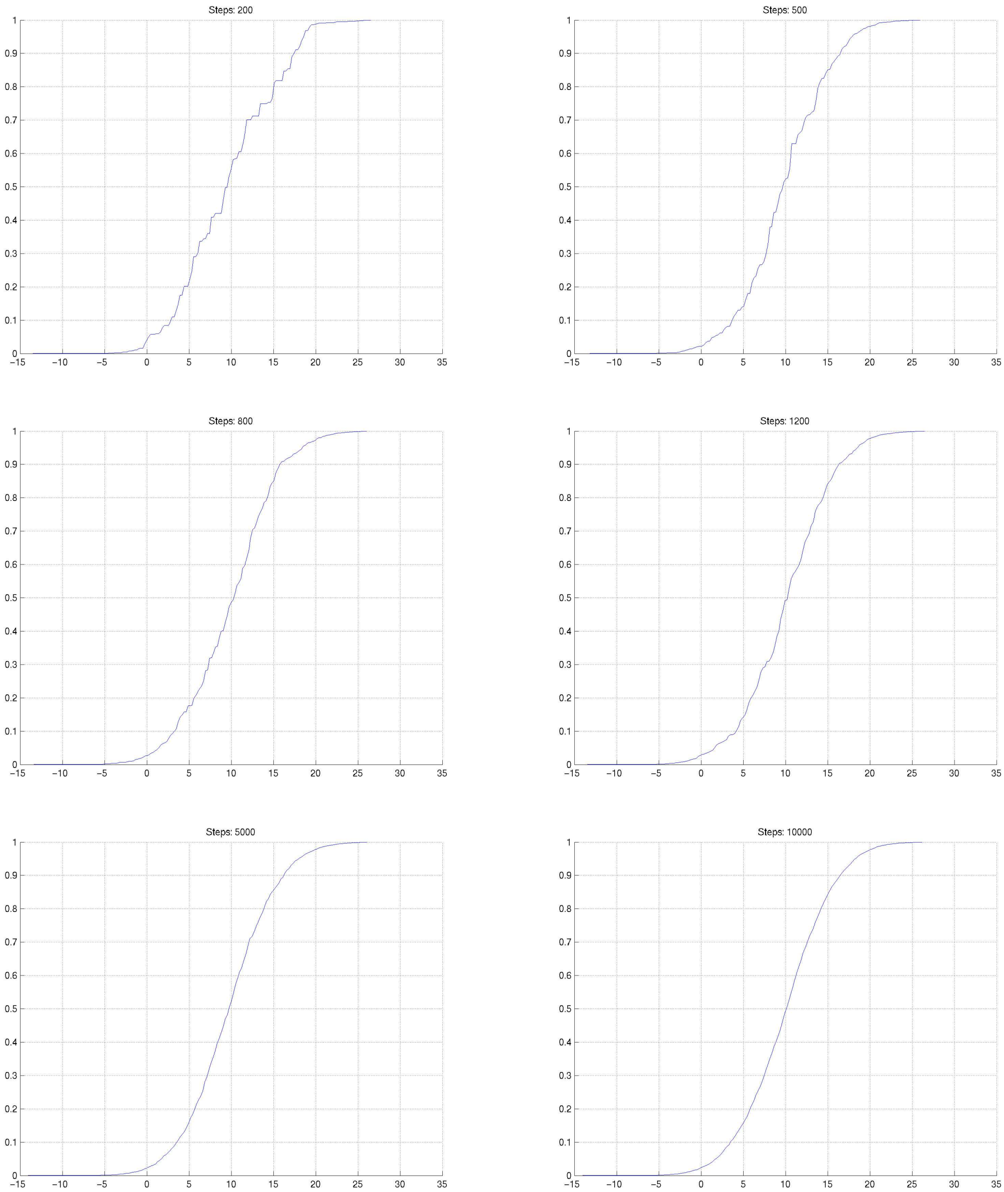


Obrázek 5: Numerická nestabilita přímé metody MC pro náhodný výběr N=1 000 simulací (nalevo) a empirická c.d.f. (napravo). Opakování výpočtů pro stejný počet simulací vede ke zcela jiným výsledkům (dole). V obou případech metoda MC nedetekuje události, které nastávají s nízkou pravděpodobností.



Obrázek 6: Metoda Importance Sampling: Náhodný výběr pro N=1 000 simulací (nalevo) a empirická c.d.f (napravo). Události, které nastávají s malou pravděpodobností, jsou detekovány. Useknutý charakter empirické c.d.f. je dán useknutými vstupními histogramy metody SBRA. Opakování výpočtů pro stejný počet simulací vedlo k obdobným výsledkům.

kritických "chvostech" rozdělení a z toho plynoucí efektivní odhad velmi malých pravděpodobností přitom hraje klíčovou roli v úlohách analýzy spolehlivosti.



Obrázek 7: Graf empirické distribuční funkce náhodné veličiny **Z** pro N=200, N=500, N=800, N=1 200, N= 5 000 a N=10 000 simulačních kroků (steps) metody Importance sampling.

3.2 Kombinace účinků zatížení metodou SBRA užitím přímé metody Monte Carlo a metody Importance Sampling

Cílem této studie je porovnat dvě simulační metody, které jsou si z matematického pohledu ekvivalentní: přímou metodu Monte Carlo (MC) a metodu Monte Carlo s redukcí rozptylu Importance Sampling (IS). Zde prezentované numerické experimenty ukazují snížení rozptylu při modelování řídkých událostí metodou Importance Sampling. Ve všech případech simulační proces proběhl bez využití apriorních informací o problému. Text této sekce vychází z [43]. Tématem se také částečně zabývá příspěvek [41].

3.2.1 Úvod

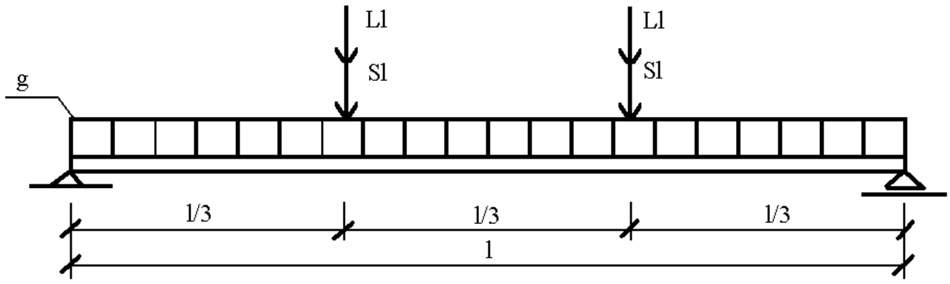
Cílem této sekce je porovnat přesnost a rychlost konvergence simulační metody Monte Carlo a metody Importance Sampling. Porovnání je provedeno na příkladu 4.1, publikace [22], str. 138-140. Cílem je odhadnout pravděpodobnost nepřekročení kritických hodnot kombinace účinků zatížení S. Hodnoty S jsou zvoleny v oblasti extrémní kombinace účinků zatížení na "chvostu" rozdělení. Efektivní modelování těchto extrémně řídkých kombinací účinků zatížení hraje důležitou roli pro výpočet pravděpodobnosti porušení P_f.

Pro získání představy o chybě (tj. rozptylu) odhadů pravděpodobnosti porušení byly výpočty pro zvolený počet simulací vždy alespoň třikrát opakovány. Následně je vypočítán aritmetický průměr s pravděpodobností nepřekročení (v MS-EXCELU volání =PRŮMĚR) a příslušná směrodatná odchylka (v MS-EXCELU volání =ODMOCNINA(VAR.VÝBĚR)).

Aritmetické průměry pravděpodobností jsou dále porovnány s výsledky simulace přímou metodou Monte Carlo (MC) pro 10 000 000 simulací. Rozdíl mezi výsledky, které odpovídají zvolené metodě a zvolenému počtu simulací vzhledem k referenčnímu výsledku, je označen symbolem Δ.

3.2.2 Modelový příklad

Porovnání je provedeno na výpočtu kombinace účinků zatížení S [kN] uprostřed prostě podepřeného nosníku (viz Obr. 8), zatíženého stálým, dlouhodobým a krát-



Obrázek 8: Schéma nosníku.

kodobým zatížením. Veličiny vstupující do výpočtu jsou uvedeny v Tab. 4.

	Symbol	*Jednotky*	*Nominální hodnota*	*Histogram*
Stálé zatížení	g	[kN]	16,2	Dead1
Dlouhodobé zatížení	Ll	[kN]	52,5	Long1
Krátkodobé zatížení	Sl	[kN]	26,25	Short1
Rozpětí nosníku	l	[m]	6,0	-

Tabulka 4: Vstupní veličiny

Kombinace účinků zatížení S je vypočtena dle následujícího vztahu:

$S = g \times Dlvar \times L^2/8 + (Ql \times LLvar + Qs \times SLvar) \times L/3$

Pro porovnání přesnosti a rychlosti obou metod jsou zvoleny následující hodnoty kombinace účinků zatížení: $S_1 = 222$ kN, $S_2 = 216$ kN a $S_3 = 201$ kN, viz [22].

Pro získání představy o chybě (tj. rozptylu) odhadu pravděpodobnosti nepřekročení kritické hodnoty jsou výpočty opakovany nejméně třikrát. Z těchto tří čísel byl vypočítán aritmetický průměr a směrodatná odchylka.

Simulace přímou metodou Monte Carlo

Numerická simulace je provedena programem Anthill for Windows^{TM}pro 10 000, 50 000, 100 000, 500 000, 1 000 000 a 10 000 000 simulací. Výsledky uvádí Obr. 9 a Tab. 5 - Tab. 10.

Simulace metodou Importance Sampling

Kombinace účinků zatížení je odhadována simulační metodou Monte Carlo s me-

Obrázek 9: Graf empirické distribuční funkce náhodné veličiny S určené metodou Monte Carlo pro 10 000 000 simulací (AntHill).

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	1,000E+0	000,000E+0	13,693E-6
S_2=216	999,958E-3	73,381E-6	67,527E-6
S_3=201	998,867E-3	115,470E-6	-129,877E-6

Tabulka 5: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Monte Carlo), N=10 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,993E-3	11,547E-6	7,027E-6
S_2=216	999,867E-3	30,550E-6	-23,440E-6
S_3=201	998,947E-3	230,518E-6	-49,317E-6

Tabulka 6: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Monte Carlo), N=50 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,987E-3	11,547E-6	0,360E-6
S_2=216	999,864E-3	96,496E-6	-25,873E-6
S_3=201	999,041E-3	44,671E-6	44,803E-6

Tabulka 7: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Monte Carlo), N=100 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,985E-3	2,217E-6	-1,783E-6
S_2=216	999,901E-3	21,731E-6	10,733E-6
S_3=201	999,014E-3	74,099E-6	17,600E-6

Tabulka 8: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Monte Carlo), N=500 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,991E-3	3,240E-6	5,037E-6
S_2=216	999,895E-3	12,121E-6	5,330E-6
S_3=201	998,979E-3	16,947E-6	-17,567E-6

Tabulka 9: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Monte Carlo), N=1 000 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,986E-3	597,720E-9	000,000E+0
S_2=216	999,890E-3	2,225E-6	000,000E+0
S_3=201	998,997E-3	11,230E-6	000,000E+0

Tabulka 10: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Monte Carlo), N=10 000 000

todou redukce rozptylu založenou na Importance Sampling (IS) [27]. Náhodné proměnné jsou charakterizovány stejnými histogramy použitými i v přímé metodě MC. Náhodný výběr je však proveden podle jiné, předem zvolené funkce (ISDF - Importance Sampling Density Function). Na této funkci závisí rychlost konvergence simulačního procesu. Optimální volba funkce vyžaduje apriorní informaci o strukturálním chování problému. Protože tato informace není k dispozici, je pro náhodný výběr použito rovnoměrné rozdělení [27]. Úloha je počítána v Matlabu pro N =1 000, N = 5 000, N = 10 000 a N = 50 000 simulací.

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,951E-3	67,921E-6	-35,620E-6
S_2=216	999,794E-3	159,234E-6	-96,360E-6
S_3=201	998,113E-3	1,526E-3	-884,032E-6

Tabulka 11: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Importance Sampling), N=1 000

S	průměr	směr.odch.	Δ
S_1=222	999,981E-3	13,536E-6	-5,290E-6
S_2=216	999,837E-3	62,605E-6	-53,114E-6
S_3=201	998,491E-3	459,835E-6	-505,755E-6

Tabulka 12: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Importance Sampling), N=5 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,983E-3	9,658E-6	-3,380E-6
S_2=216	999,844E-3	33,913E-6	-45,778E-6
S_3=201	998,616E-3	145,618E-6	-380,992E-6

Tabulka 13: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Importance Sampling), N=10 000

S	*průměr*	*směr.odch.*	Δ
S_1=222	999,986E-3	3,774E-6	-0,231E-6
S_2=216	999,870E-3	18,984E-6	-20,083E-6
S_3=201	998,820E-3	123,567E-6	-176,426E-6

Tabulka 14: Pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení S [kNm] (metoda Importance Sampling), N=50 000

3.2.3 Výsledky numerických experimentů

Výsledky numerických experimentů pro přímou metodu Monte Carlo jsou uvedeny v Tab. 5 až Tab. 10. Výsledky numerických experimentů pro metodu Importance Sampling jsou uvedeny v Tab. 11 až Tab. 14.

Pokud odhadujeme pravděpodobnost nepřekročení kritické hodnoty S_1 = 222 kN (zdůrazněme, že pravděpodobnost překročení této hodnoty je velmi nízká, řádově 1.10^{-5}) pro N = 10 000 simulací, přímá metoda MC neprodukuje pro tento počet simulací žádnou statistickou informaci o překročení S_1 ani při trojnásobném opakování simulačních výpočtů. Z tabulky 11 lze naproti tomu vyčíst, že metoda IS je schopna poskytnout statistickou informaci o této kritické události, která nastává s velmi nízkou pravděpodobností, již v případě pouhých N = 1 000 simulací.

Odhady přímou metodou MC vykazují jisté kolísání: Se zvyšováním počtu simulací se zvýšil i rozptyl v odhadu zkoumaných pravděpodobností. Rozdíl Δ je $0.36.10^{-6}$ pro N = 100 000, zatímco pro N =1 000 000 je $\Delta = 5.10^{-6}$.

Výsledné pravděpodobnosti nepřekročení kombinace účinků zatížení $S_2 = 216$ kN (pravděpodobnost překročení je řádově 1.10^{-4}) jsou si pro obě metody a 50 000 simulačních kroků podobné. Rozdíl vůči referenční hodnotě Δ je cca 20.10^{-6}.

Pro nižší pravděpodobnosti překročení (řádově 1.10^{-3}), kterým odpovídá $S_3 =$ 201 kN, poskytuje přesnější výsledky odhad přímou metodou MC. Hodnota Δ je pro N =10 000 simulací rovna $-129{,}9.10^{-6}$, zatímco metodou IS nebylo takové přesnosti dosaženo ani 50 000 simulacemi (Δ = -176.10^{-6}).

3.2.4 Závěr

Numerické experimenty potvrdily efektivitu metody redukce rozptylu Importance Sampling pro odhad velmi nízkých pravděpodobností překročení (řádově 1.10^{-5}) i v případě velmi malého počtu simulací (řádově tisíce). Z uvedených výsledků plyne, že přímá metoda MC neposkytuje pro odhad těchto velmi nízkých pravděpodobností překročení obdobnou přesnost, a to ani při vysokém počtu simulací (N = 1 000 000), jako metoda Importance Sampling při N = 10 000.

Naopak, pro odhad událostí, které nastávají s větší pravděpodobností překročení (řádově 1.10^{-3}), se jeví výhodnější použít přímou metodu MC.

Charakter konvergence metody IS je dán volbou funkce ISDF, která určuje vlastnosti náhodného výběru. Zde prezentované numerické experimenty potvrdily, že funkce ISDF zvolená ve tvaru rovnoměrného rozdělení urychluje konvergenci simulačního procesu zvláště při odhadu velmi nízkých pravděpodobností překročení. Přitom kvalita odhadu nízkých pravděpodobností překročení hraje důležitou roli v efektivitě pravděpodobnostního posudku spolehlivosti.

3.3 Posudek spolehlivosti kloubové prutové konstrukce metodou SBRA v prostředí AFEM

3.3.1 Úvod

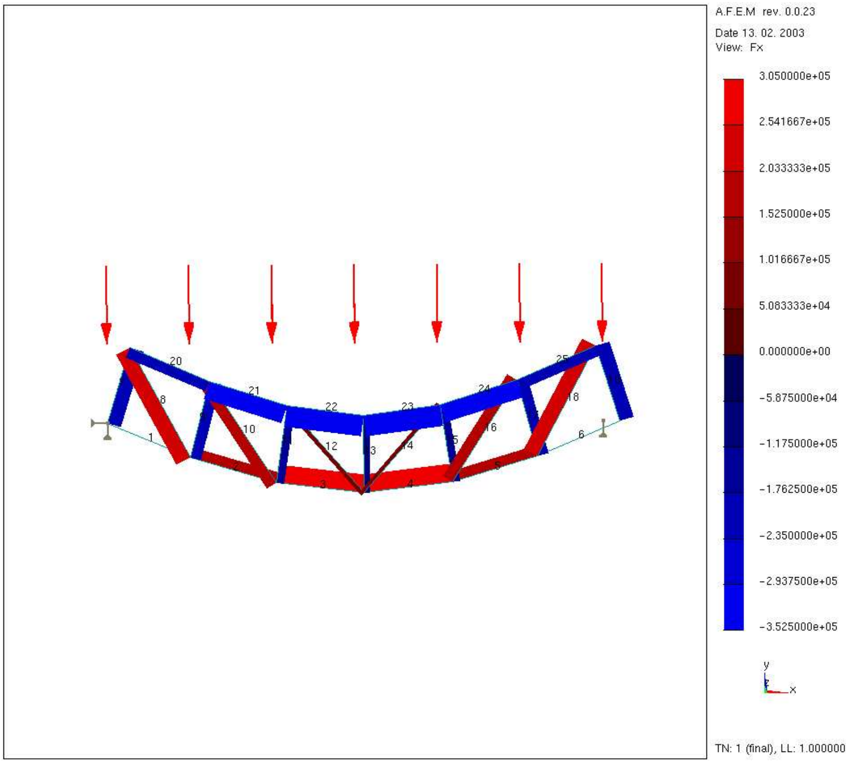
Plně pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukce vždy obsahuje odhad pravděpodobnosti poruchy, která je pro reálné konstrukce blízká nule [21]. Efektivita posudku konstrukce proto přímo závisí na schopnosti použité simulační techniky odhadovat pravděpodobnost (kritických) událostí, které obvykle nastávají s velmi malou pravděpodobností [4]. Cílem příspěvku je porovnat přesnost metody Monte Carlo a metody redukce rozptylu Importance Sampling v závislosti na počtu simulací [27]. Efektivita těchto simulačních technik bude demonstrována posudkem spolehlivosti příhradového nosníku, který je zatěžován třemi skupinami náhodně proměnných sil.

Posudek spolehlivosti je proveden bez využití apriorních informací o strukturálním chování nosníku a předpokládá vzájemnou statistickou nezávislost náhodných veličin. Použitý model nosníku vychází z předpokladů lineární statiky a teorie pružnosti: deformace konstrukce jsou považovány za malé a materiál konstrukce je lineárně pružný. Chování nosníku je modelováno metodou konečných prvků (programem AFEM) a analyticky.

Cílem této sekce je posudek spolehlivosti příhradového nosníku užitím simulační techniky Importance Sampling, která je matematicky ekvivalentní s přímou metodou Monte Carlo. Předchozí numerické experimenty však ukazují vyšší rychlost konvergence metody Importance Sampling v případě odhadů událostí, které nastávají s velmi nízkou pravděpodobností (obvykle poruchy) [27]. Text této sekce vychází z [42].

3.3.2 Zadání příkladu

Uvažujme příhradový nosník (Obrázek 10). Jedná se o staticky určitou konstrukci, tedy při poruše kteréhokoliv z prutů dochází ke kolapsu celé konstrukce. Na nosník působí tři skupiny náhodně proměnných sil (Tabulka 1), které jsou statisticky nezávislé.



Obrázek 10: Osové síly v MKP modelu nosníku (AFEM) pro maximální kombinaci zatížení.

Model předpokládá platnost všech obvyklých předpokladů lineární statiky a teorie pružnosti (deformace jsou považovány za malé, materiál konstrukce za lineárně pružný). Jde o rovinnou prutovou kloubovou konstrukci, ve styčnících prutů se tedy nepřenáší moment. Jednotlivé pruty při zatížení pouze ve styčnících (tak jako je tomu ve studovaném příkladě) přenášejí pouze osovou sílu, která je po celé délce jednotlivého prutu konstantní.

Tento fakt umožňuje provést posouzení únosnosti konstrukce jen na základě hodnot osových sil v jednotlivých prutech.

V této práci se bude analyzovat síla na prutu č. 22 (dále jen prut). Posudek spolehlivosti tohoto nosníku byl řešen přímou metodou Monte Carlo v [22], kde autoři použili jiného číslování uzlů a prut byl označen číslem 57. Sílu S na tomto prutu lze díky výše uvedeným předpokladům vyjádřit analyticky [21] vztahem

$$S = 4.5 \times 50 \times DLvar + 1.5 \times 45 \times Slvar + 2 \times 30 \times Llvar$$

Správnost analytického vyjádření síly na prutu byla navíc ověřena MKP modelem v programovém balíku AFEM [1], [2]. MKP model měl 14 uzlů o dvou stupních volnosti (svislé a vodorovné posunutí). Z posunutí se vypočetla síla na jednotlivých prutech.

	Symbol	*Jednotky*	*Nominální hodnota*	*Histogram*
Stálé zatížení	Dlvar	[kN]	50	Dead2
Krátkodobé zatížení	Slvar	[kN]	45	Short2
Dlouhodobé zatížení	Llvar	[kN]	30	Long1
Rozpětí nosníku		[m]	18,0	-

Tabulka 15: Vstupní veličiny

3.3.3 Numerické experimenty

Cílem numerických experimentů bylo odhadnout pravděpodobnost nepřekročení kritické hodnoty síly S na prutu. Za kritickou byla považována hodnota síly 252.1, 290 a 300 [kN], viz [22]. Úloha byla řešena přímou metodu Monte Carlo pro N= 50 000 a N= 100 000 simulací a metodou Importance Sampling pro N= 250, N= 500, N= 1 000, N= 2 000, N= 5 000 a N= 50 000 simulací. Všechny simulace byly prováděny bez užití apriorní informace o problému. Náhodný výběr metody Importance Sampling byl prováděn podle distribuční funkce rovnoměrného rozdělení, která zajišťuje rovnoměrné prohledávání celé domény náhodných parametrů [27].

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.939625	0.619906	0.695830982	0.751787	167.043E-3
290	0.981162	0.945714	0.968831407	0.965236	17.995E-3
300	0.998092	0.986441	0.988408892	0.990981	6.237E-3

Tabulka 16: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (metoda Importance Sampling, N=250)

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.923337	0.573767	0.829478149	0.775527	180.922E-3
290	0.990333	0.899191	0.98447187	0.957999	51.013E-3
300	0.992735	0.983819	0.994149203	0.990234	5.601E-3

Tabulka 17: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (metoda Importance Sampling, N=500)

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.953108	0.824038	0.695805289	0.824317	128.651E-3
290	0.99381	0.97335	0.979306044	0.982155	10.524E-3
300	0.998497	0.991008	0.987908434	0.992471	5.444E-3

Tabulka 18: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (metoda Importance Sampling, N=1 000)

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.653307	0.847093	0.869224199	0.789875	118.788E-3
290	0.973385	0.982053	0.984207262	0.979882	5.728E-3
300	0.989096	0.991323	0.99497152	0.991797	2.966E-3

Tabulka 19: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (metoda Importance Sampling, N=2 000)

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.952665	0.879865	0.881953047	0.904828	41.441E-3
290	0.994196	0.984049	0.984173654	0.987473	5.823E-3
300	0.99755	0.992938	0.993935339	0.994808	2.427E-3

Tabulka 20: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (metoda Importance Sampling, N=5 000)

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.905597	0.885069	0.88065024	0.890439	13.312E-3
290	0.989118	0.989511	0.988406504	0.989012	559.938E-6
300	0.995567	0.995379	0.995110602	0.995352	229.376E-6

Tabulka 21: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (metoda Importance Sampling, N=50 000)

Simulační výpočty byly pro stejný počet simulací vždy třikrát opakovány. Výsledné tři hodnoty určující odhad pravděpodobnosti nepřekročení kritické hodnoty pro daný počet simulací jsou průměrovány. Pro získání představy o chybě (rozptylu) odhadu je dále vypočtena směrodatná odchylka.

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.8953	0.89702	0.89778	0.8967	1.271E-3
290	0.98876	0.98974	0.98856	0.98902	631.506E-6
300	0.99466	0.99582	0.99526	0.995247	580.115E-6

Tabulka 22: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (přímá metoda Monte Carlo, N=50 000)

Síla [kN]	Pokus1	Pokus2	Pokus3	Průměr	Směr.odch.
252.1	0.89626	0.89579	0.89844	0.89683	1.414E-3
290	0.98917	0.98846	0.98869	0.988773	362.261E-6
300	0.99542	0.99495	0.99521	0.995193	235.443E-6

Tabulka 23: Pravděpodobnosti nepřekročení síly na prutu (přímá metoda Monte Carlo, N=100 000)

3.3.4 Závěr

Z Tab. 16 plyne efektivita metody Importance Sampling pro odhad pravděpodobnosti překročení hodnoty $S=$ 300 N na prutu. Jedná se o událost, která nastává s nízkou pravděpodobností. Metodou Importance Sampling dostáváme průměrný odhad 0.990981 s přesností na dvě desetinná místa již pro N= 250 simulací (verifikováno přímou metodou MC pro N=100 000 simulací, kde průměrný odhad činí 0.995193), viz Tab. 23.

3.4 Systém Switch-Earth pro efektivní modelování zemětřesení v prostředí SBRA-Importance Sampling

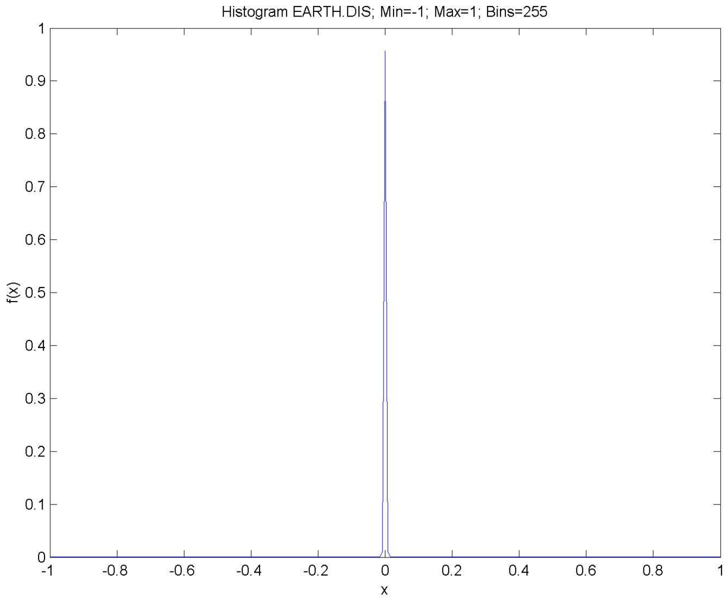
3.4.1 Úvod

Náhodný charakter účinků zemětřesení je v metodě SBRA vyjádřen mj. histogramem Earth.Dis. Modelování účinků zemětřesení tímto histogramem nemusí být efektivní v případě posudku spolehlivosti simulační technikou Importance Sampling. Cílem této studie je ukázat, že histogram Earth.dis lze vyjádřit pomocí jiných histogramů, které jsou již efektivní i v případě použití simulací Importance Sampling. Výsledky jsou ověřeny na pravděpodobnostním posudku spolehlivosti nevyztuženého ocelového rámu s opřenými sloupy. Do výpočtového modelu vstupuje 26 náhodných parametrů, včetně zemětřesení. Text této sekce vychází z [40].

Připomeňme si, že v metodě SBRA jsou náhodné proměnné matematického modelu vyjádřeny neparametrickými histogramy [21]. Metoda Importance Sampling provádí na rozdíl od přímé metody Monte Carlo (MC) náhodný výběr podle tzv. Importance Sampling Density Function (ISDF) - označení f^*, viz [3], [33]. Rychlost konvergence metody IS samozřejmě závisí na volbě f^*. V dosavadním výzkumu se vychází z předpokladu, že není k dispozici žádná apriorní informace o poruše, která by šla použít pro sestavení vylepšené f^* s cílem urychlit konvergenci metody IS. Na metodu IS tedy lze pohlížet jako na ,,černou skříňku", která *automaticky* vrátí návrhářům pravděpodobnost poruchy a případně i další informace o modelu (např. intervalové odhady výstupních parametrů modelu a/nebo histogram funkce spolehlivosti). Z tohoto důvodu byla jako funkce ISDF zvolena funkce rovnoměrného rozdělení na stejné doméně, jakou má původní histogram. Výpočet metodu IS tedy probíhal ve všech případech automaticky bez využití apriorních informací o poruše.

3.4.2 Modelování zemětřesení pomocí histogramu Earth.dis

V případě modelování zemětřesení se využívá mj. histogramu Earth.dis. Vlastností tohoto histogramu je, že obsahuje velmi úzkou špičku (modus) v bodě 0, viz Obr. 11. Tomuto faktu odpovídá skutečnost, že účinek zemětřesení je s vysokou pravděpodobností roven číslu nula. Jinými slovy, v modelu Earth.dis předpokládáme, že zemětřesení je jev, který se vyskytuje velmi zřídka.



Obrázek 11: Histogram Earth.dis.

Histogram Earth.Dis lze (přibližně) vyjádřit takto:

- $Earth = 0$ s pravděpodobností 96%,
- $Earth = -u$ s pravděpodobností 2%,
- $Earth = +u$ s pravděpodobností 2%,

kde symbol u označuje uniformní (tj. rovnoměrné) rozdělení na $<0,1>$.

Slovy, pravděpodobnost, že není zemětřesení, je rovna 96 %. V případě vzniku zemětřesení model Earth.dis předpokládá působení jak kladných, tak i záporných účinků zemětřesení. Tyto účinky zemětřesení jsou rozloženy v podstatě rovnoměrně na $<0,1>$.

Pokud se náhodný výběr metody IS provádí podle rovnoměrného rozložení, může se snadno stát, že se simulace netrefí do velmi úzkého modusu (špičky) histogramu Earth.Dis. Jinými slovy, v případě použití metody IS získáme na jedné straně (velmi podrobné) informace o účincích zemětřesení na konstrukci, na straně druhé však nezískáme dostatek informací o chování konstrukce v případech, kdy jsou účinky zemětřesení nulové (a těchto případů je většina). Je zřejmé, že v případě modelování účinků zemětřesení histogramem Earth.Dis v prostředí SBRA - Importance Sampling mohou být výsledky zatíženy velkým rozptylem (chybou).

Cílem této sekce je ukázat, jak v prostředí SBRA - Importance Sampling modelovat účinky zemětřesení efektivněji.

3.4.3 Modelování zemětřesení pomocí přepínače Switch-Earth

Modelování pomocí přepínače Switch-Earth spočívá v rozložení účinků zemětřesení na tyto dva faktory:

1. Náhodná proměnná vystihující pravděpodobnost vzniku zemětřesení (Switch_Earth: 4 %) a jeho „směru" („kladný směr" s pravděpodobností 2 % a „záporný směr" s pravděpodobností 2 %).

2. Náhodná proměnná reprezentující rozložení účinků zemětřesení za podmínky, že vypuklo zemětřesení. Účinky zemětřesení jsou modelovány standardním histogramem rovnoměrného rozdělení Uniform.dis.

Je zřejmé, že vhodným složením těchto dvou faktorů (histogramů) lze získat původní rozdělení histogramu Earth.dis.

Model zemětřesení pomocí přepínače Switch_Earth (symbol $EQsw$) předpokládá:

- $EQsw$ = -1 s pravděpodobností 2%,
- $EQsw$ = 0 s pravděpodobností 96%,
- $EQsw$ = +1 s pravděpodobností 2%.

Zápis přepínače zemětřesení Switch-Earth lze metodou SBRA vyjádřit velmi jednoduše a přehledně (soubor sw_earth.dis):

```
[Description]
Identification=Earthquake switch: -1 for 2 %, 0 for 96 %, 1 for 2 %
(derived from Earth.dis)
Type=Discrete
Form=Frequency
```

```
[Parameters]
Min=-1.0
Max=1.0

[Bins]
2
96
2
```

Celkové účinky zemětřesení *EQvarsw* jsou modelovány pomocí histogramů sw_earth-.dis a uniform.dis následovně:

*EQvarsw = EQsw*EQrandfunc,*

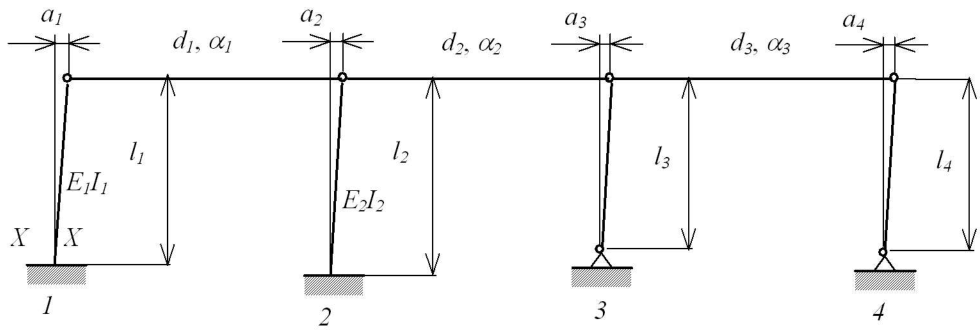
kde

- *EQsw* představuje sw_earth.dis (Faktor 1),
- *EQrandfunc* představuje uniform.dis (Faktor 2).

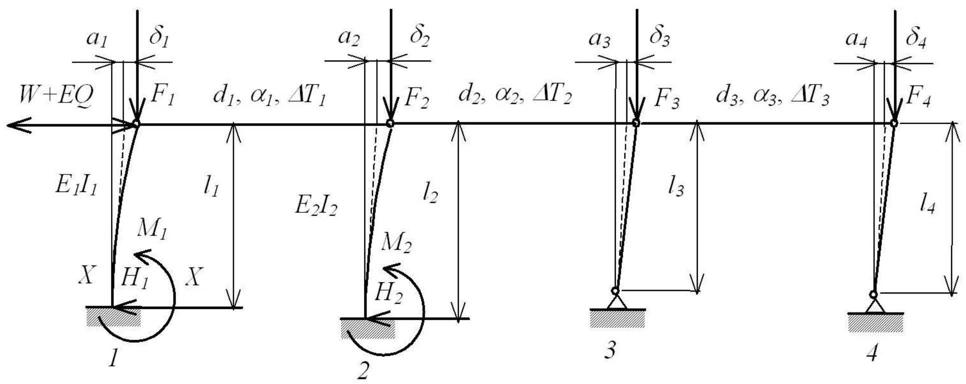
Pozn. Změnit rozložení účinků zemětřesení znamená pouze změnit histogram *EQrandfunc.*

3.4.4 Pravděpodobnostní posudek rámu

Autorem analytického výpočtového modelu rámu na Obr. 12 a Obr. 13, který je v této práci použit, je Ing. Leo Václavek, CSc. z Fakulty strojní VŠB-TU Ostrava. Tímto modelem je popsána napěťová (napětí od axiální síly a ohybového momentu ve vetknutích sloupů $1, 2$) a deformační (přemístění δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 horních konců sloupů) odezva konstrukce na vnější zatížení. Za variabilní, náhodně proměnné vstupní veličiny, které považujeme za vzájemně statisticky nezávislé, uvažujeme svislé zatěžující síly F_1, F_2, F_3, F_4, účinek větru W, geometrické imperfekce a_1, a_2, a_3, a_4, průřezové charakteristiky vetknutých sloupů, moduly pružnosti v tahu a mez kluzu materiálů vetknutých sloupů a teplotní rozdíl ΔT vzhledem k montážní teplotě. Účinek zemětřesení *EQ* je taktéž považován za variabilní veličinu. Velikost účinku zemětřesení je odvozena od okamžité velikosti svislých sil. Každá svislá síla je součtem tří vzájemně nezávislých sil - stálého, dlouhodobého nahodilého a krátkodobého nahodilého zatížení. Model rámu je podrobněji popsán v [37], [22]. Jediný rozdíl oproti řešení použitému v [22] je, že v této implementaci byly náhodně proměnné svislé síly F_1, F_2, F_3, F_4 vyjádřeny pomocí stejnojmenných histogramů získaných z 50 000 simulací MC.



Obrázek 12: Tvar nezatíženého rámu



Obrázek 13: Tvar zatíženého rámu

Všem náhodně proměnným vstupním veličinám jsou přiřazeny neparametrické histogramy, které lze nalézt např. v [21], [22]. Jako konstantní vstupní veličiny jsou v modelu považovány délky sloupů l_1, l_2, l_3, l_4, a příčníků d_1, d_2, d_3, a součinitel teplotní roztažnosti α. Celkový počet náhodných vstupních veličin modelu je 26.

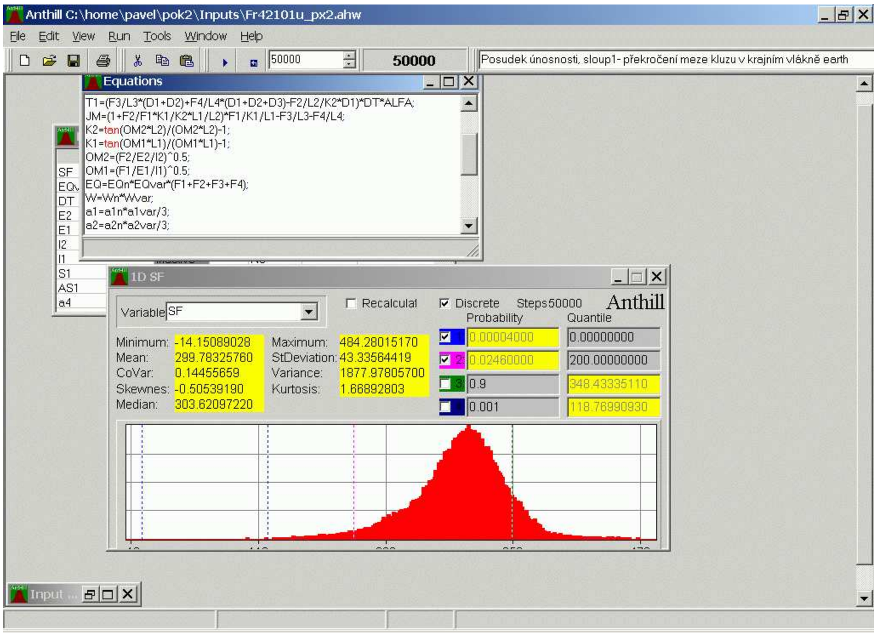
Funkce spolehlivosti (Safety Function) SF je vyjádřena ve tvaru $SF = R$ - S, kde symbol R označuje odolnost konstrukce, která je vyjádřena histogramem meze kluzu a symbol S představuje účinek zatížení. Je-li SF<0, nastává porucha konstrukce.

Porucha konstrukce je vztažena k překročení meze kluzu v krajním vlákně vetknutého průřezu sloupu 1. Pro výpočet pravděpodobnosti poruchy P(SF<0) jsou použity simulační techniky MC a IS.

3.4.5 Modelování pomocí přímé metody Monte Carlo

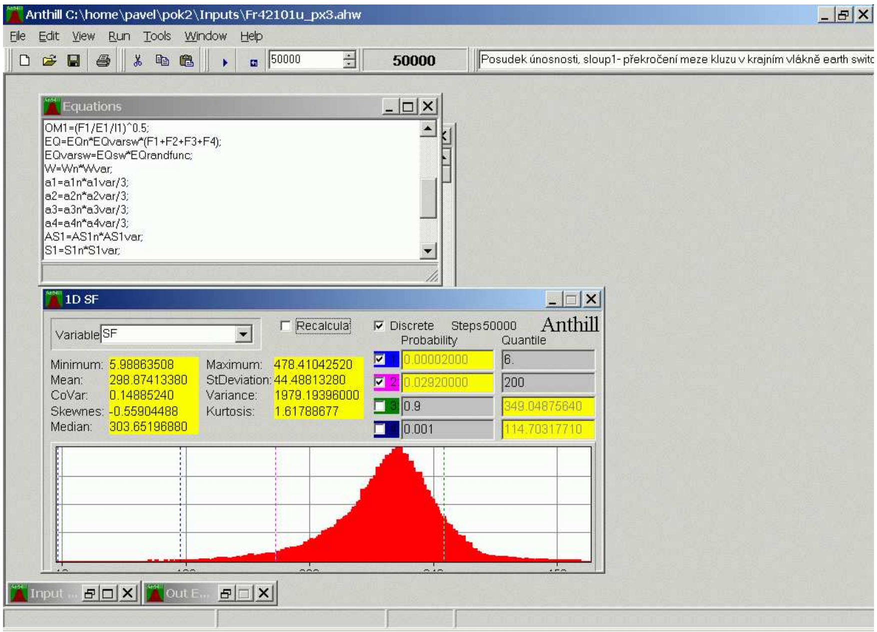
Úloha pravděpodobnostního posudku rámu je podrobně formulována a řešena v kapitole 24 knihy [22]. Připomeňme, že pravděpodobnost poruchy byla odhadnuta programem M-Star pro 10 miliónů simulací hodnotou P(SF<0) $= 4.10^{-6}$. Podrobnější výsledky viz kapitola 24 knihy [22].

Cílem této studie je porovnat výsledky pravděpodobnostního posudku rámu v závislosti na způsobu vyjádření zemětřesení (histogram Earth.dis a vyjádření Switch-Earth). Pravděpodobnostní posudek rámu byl nejdříve analyzován přímou metodou Monte Carlo v programu Anthill, viz Obr. 14 a Obr. 15. Výsledky jsou si velmi podobné. Přínos systému Earth-Switch v podobě mnohem menšího rozptylu (chyby) bude zřejmý v případě modelování pomocí Importance Sampling.



Obrázek 14: Modelování zemětřesení histogramem Earth.dis (úloha Fr42101u_px2)

Pravděpodobnost poruchy byla u úlohy Fr42101u_px2 (Earth.dis) odhadnuta $P(SF < 0) = 1.333.10^{-6}$ pro $N = 750\ 000$ simulací. Pravděpodobnost poruchy u úlohy Fr42101u_px3 (Switch-Earth) byla pro $N = 750\ 000$ simulací odhadnuta



Obrázek 15: Modelování zemětřesení přepínačem Switch-Earth (úloha Fr42101u_px3).

$P(SF < 0) = 6.6666.10^{-6}$. Tyto výsledky se shodují s výsledky, které jsou v kapitole 24 knihy [22].

3.4.6 Modelování pomocí Importance Sampling

Obě úlohy byly také řešeny metodou IS pro $N = 10000$ simulací ve vlastním simulačním programu v prostředí Matlab, viz [38], [27]. Jako funkce ISDF byla opět zvolena funkce rovnoměrného rozdělení na stejné doméně, jakou má původní histogram. Tato volba nevyžaduje žádné další, apriorní informace o poruše. S cílem získat informace o rozptylu bylo řešení každé úlohy čtyřikrát opakováno. Pro každou úlohu byly tímto způsobem získány čtyři hodnoty pravděpodobnosti vzniku poruchy. Tyto pravděpodobnosti poruchy byly následně statisticky zpracovány programem Statgraphics 5.0. Takto byla vypočtena mj. průměrná pravděpodobnost poruchy (Average), rozptyl (Variance), směrodatná odchylka (Standard deviation) a intervalové odhady (Confidence intervals) střední hodnoty pravděpodobnosti poruchy na hladině významnosti 5 % a 1 %, viz Tab. 24.

V levé části Tab. 24 jsou uvedeny výsledky pro úlohu Fr42101u_px2 (Earth.dis), v pravé části tabulky jsou pak uvedeny výsledky pro úlohu Fr42101u_px3 (Switch-

Earth). Porovnáním výsledků v levé a v pravé části tabulky lze vyčíst, že použití původního histogramu Earth.dis v metodě IS vede k nepřesnému, řádově odlišnému odhadu pravděpodobnosti poruchy. Důvody vzniku této chyby v odhadu byly diskutovány v úvodu této studie. Navíc, použití systému Switch-Earth přineslo snížení hodnoty směrodatné odchylky z hodnoty $5.55.10^{-5}$ na hodnotu $2.85.10^{-6}$. V případě použití systému Swith-Earth tedy došlo ke snížení hodnoty směrodatné odchylky více než 19 krát. Intervalový odhad střední hodnoty pravděpodobnosti poruchy na hladině významnosti 5 % dále ukazuje, že skutečná hodnota pravděpodobnosti poruchy je s 95% pravděpodobností menší nebo rovna hodnotě $8.47.10^{-6}$. Přestože byl tento odhad pravděpodobnosti poruchy získán pouhými $4 \times 10\ 000 = 40\ 000$ vyhodnoceními funkce spolehlivosti, informace je v souladu s verifikací přímou metodou Monte Carlo pro N=750 000, resp. s výsledkem posudku uvedeným v [22].

Summary Statistics for Fr42101u_px2, N=10 K	Summary Statistics for Fr42101u_px3, N=10 K
Count = 4	Count = 4
Average = 0.000049105	Average = 0.00000393495
Variance = 3.08551E-9	Variance = 8.11094E-12
Standard deviation = 0.0000555474	Standard deviation = 0.00000284797
Minimum = 0.000012617	Minimum = 4.1711E-7
Maximum = 0.0001308	Maximum = 0.0000071655
95.0% confidence interval for mean:	95.0% confidence interval for mean:
0.000049105 +/- 0.0000883884	0.00000393495 +/- 0.00000453176
[0; 0.000137493]	[0; 0.00000846671]
99.0% confidence interval for mean:	99.0% confidence interval for mean:
0.000049105 +/- 0.000162224	0.00000393495 +/- 0.00000831737
[0; 0.000211329]	[0; 0.0000122523]

Tabulka 24: Statistické zpracování výsledků pro N=10 000 simulací metodou Importance Sampling užitím Statgraphics 5.0 (C) Statistical Graphics Corp. 1994-2000.

3.4.7 Závěr

Byl proveden pravděpodobnostní posudek spolehlivosti nevyztuženého ocelového rámu s opřenými sloupy. Do výpočtového modelu vstupuje 26 náhodných parametrů. Pokud použijeme pro vyjádření zemětřesení systém Earth-Swith, postačují pro odhady velmi nízkých pravděpodobností poruchy rámu (řádově 10^{-6}) desetitisíce simulací metody Importance Sampling. Tyto výsledky byly verifikovány přímou metodou Monte Carlo pro 750 000 simulací a pro 10 milionů simulací. Stojí za poznamenání, že modelování zde uvedeného příkladu přímou metodou MC pro N=10 000 simulací nebyla zachycena vůbec žádná událost typu ,,porucha" ani v případě, že tyto simulace byly taktéž čtyřikrát opakovány.

4 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti v prostředí CALFEM

V následující sekci budou představeny dva základní přístupy, které rozšíří klasickou metodu sdružených gradientů (Conjugate Gradient method - CG) pro efektivní řešení úloh s více pravými stranami: metodu blokových sdružených gradientů (Block CG) a metodu postupných sdružených gradientů (Successive CG). Dále bude uvedena kombinovaná metoda, která využívá výhod výše uvedených dvou základních přístupů: Block-Successive CG. V sekci bude diskutována numerická stabilizace BCG užitím QR rozkladu. Efektivita algoritmů bude testována na soustavách lineárních rovnic vzešlých z pravděpodobnostního posudku spolehlivosti stavební konstrukce metodou konečných prvků v prostředí SBRA. Text této sekce vychází z [10].

4.1 Úvod

Řešení soustav lineárních rovnic hraje důležitou roli v matematickém modelování užitím numerických metod, jako je např. metoda konečných prvků. Často používané jsou tzv. přímé řešiče, které jsou založeny na dobře známé Gaussově eliminaci. Přímé řešiče jsou efektivní pro malé úlohy, případně pro úlohy se speciální strukturou [11]. Pro řešení velkých úloh bohužel přestávají být přímé řešiče efektivní zvláště kvůli paměťové a časové náročnosti eliminačního procesu. Na druhé straně iterační metody, jako např. metody založené na sdružených gradientech (Conjugate Gradient methods - CG), neobsahují náročný eliminační proces a algoritmy proto mohou být přirozeně dobře paralelizovatelné a díky tomu velmi efektivní na výkonných paralelních superpočítačích [7].

Tato sekce má následující strukturu: V sekci 4.2 bude představena soustava lineárních rovnic s více pravými stranami. V sekci 4.3 bude uvedena dobře známá metoda sdružených gradientů. V sekci 4.4 bude provedeno rozšíření metody sdružených gradientů pro efektivní řešení soustav s více pravými stranami pomocí blokových sdružených gradientů (Block CG) a postupných sdružených gradientů (Successive CG) [26]. Navíc bude představena metoda, která kombinuje výhody výše zmíněných přístupů: Successive Block CG method. Na závěr budou výše zmíněné přístupy použity pro efektivní řešení úlohy pravděpodobnostního posudku spolehlivosti betonového rámu metodou konečných prvků v prostředí SBRA, viz sekce 4.5.

4.2 Řešení soustavy lineárních rovnic s více pravými stranami

Uvažujme následující soustavu lineárních rovnic s q pravými stranami:

$$KX = F \tag{19}$$

Zde symbol K označuje symetrickou pozitivně definitní matici řádu n a $F = [f^1, \ldots, f^q]$ je $n \times q$ matice pravých stran.

Pro řešení soustavy lineárních rovnic s více pravými stranami existují dva základní přístupy: přímé a iterační metody. *Přímé metody* jsou populární v komerčních programech díky jejich robustnosti. Algoritmy tohoto typu zahrnují rozklad matice K, který je vypočten pouze jednou, neboť uvažované soustavy lineárních rovnic mají pro všechny pravé strany stejné koeficienty matice K. Příslušná řešení soustavy (19) lze pak snadno získat dopřednou (forward) a zpětnou (backward) substitucí soustavy lineárních rovnic s trojúhelníkovou maticí:

maticový rozklad $K = LU$
{L a U označují dolní a horní trojúhelníkovou matici}
for $i = 1, \ldots, q$ **do**
begin {pro každý vektor pravé strany}
    řešení $Ly = f^i$; {dopředná substituce}
    řešení $Ux^i = y$; {zpětná substituce}
end.

Maticový rozklad $K = LU$ je bohužel paměťově i časově náročná operace, neboť trojúhelníkové matice L a U mají hustší strukturu než je tomu u původní řídké matice K. Z tohoto důvodu je použití přímých řešičů nepraktické zvláště u velkých třídimenzionálních úloh, ve kterých je matice K velmi rozsáhlá. Maticový rozklad rozsáhlé řídké matice není navíc dobře paralelizovatelný a proto případná paralelní implementace není přímočará.

Naproti tomu *iterační metody* vytváří posloupnost přibližných řešení $\{X_k\}$. Tyto metody zahrnují matici K pouze v kontextu násobení matice vektorem. Vzhledem k této skutečnosti stačí do paměti počítače ukládat pouze nenulové elementy matice K a k přístupu k elementům matice K využít sofistikovaný systém pro řídké matice, který šetří paměťové nároky (např. [18]). Užití iteračních metod je výhodné v superpočítačovém prostředí, viz např. [19] a [7]. V současné době je nejpopulárnější iterační metodou dobře známá metoda sdružených gradientů.

V této sekci bude představeno několik technik založených na metodě sdružených gradientů pro efektivní řešení (19). Bude uvažován případ, ve kterém jsou všechny pravé strany známé najednou (což je i případ pravděpodobnostního posudku spolehlivosti betonového rámu simulačním přístupem).

4.3 Metoda sdružených gradientů

Připomeňme si originální metodu sdružených gradientů pro řešení soustavy lineárních rovnic [15]

$$Kx = f \tag{20}$$

se symetrickou positivně definitní maticí K a s vektorem pravé strany $f \in \mathbb{R}^n$. Využívá se velmi známý fakt, že vektor řešení $x \in \mathbb{R}^n$ je jediné minimum kvadratické funkce

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T K x - x^T f. \tag{21}$$

Metoda sdružených gradientů začíná s počáteční aproximací x_0 a s počátečním směrem $p_0 = -\nabla\phi(x_0)$. k-tý krok CG metody obsahuje

- výpočet nového směru p_k
- aktualizace nové aproximace řešení x_k.

Nová aproximace řešení x_k je získána z x_{k-1} aproximace pomocí směru p_k s délkou kroku α_k iteračním cyklem

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k. \tag{22}$$

Délka kroku α_k je určena formulí

$$\frac{\partial\phi(x_{k-1}+\alpha_k p_k)}{\partial\alpha_k}=0, \tag{23}$$

nebo ekvivalentně

$$p_k^T r_k = p_k^T(r_{k-1}-\alpha_k K p_k)=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_k = p_k^T r_{k-1}/p_k^T K p_k, \tag{24}$$

kde $r_k = f - Kx_k$ je tzv. residuum k-té aproximace řešení x_k, viz [15]. Nový směr p_k je konstruován ve tvaru

$$p_k = r_{k-1}+\beta_k p_{k-1} \tag{25}$$

tak, aby byl K-ortogonální s předchozími směry. Jinými slovy, p_k splňuje relaci

$$p_k^T K p_j = 0, \quad pro\ j<k \tag{26}$$

a parametr β_k je určen

$$p_k^T K p_{k-1}=0 \;\Leftrightarrow\; \beta_k = -p_{k-1}^T K r_{k-1}/p_{k-1}^T K p_{k-1}. \tag{27}$$

Pozorování

Platí následující vlastnosti:

1. $p_k^T K p_j = 0, \quad \text{pro } k\neq j,$
2. $r_k^T r_j = 0, \quad \text{pro } k\neq j,$
3. $p_k^T r_k = 0.$

Pokud bychom uvažovali zcela přesnou aritmetiku, pak přesného řešení rovnice (20) by bylo dosaženo při libovolně zvolené počáteční aproximaci x_0 nanejvýše v n-té iteraci CG metody. Obvykle však postačuje nalézt pouze přibližné řešení. V tomto případě je iterační cyklus ukončen, pokud je norma residua dostatečně malá. Efektivní podmínka ukončení může být například

$$\|r_k\|/\|r_0\| < \varepsilon,$$

kde ε je malé reálné číslo, typicky 1.10^{-4}.

Zjednodušme vyjádření koeficientů α_k a β_k. S cílem nalézt efektivnější formuli pro výpočet α_k, využijeme (25) a třetí pozorování. Pak

$$\alpha_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / p_k^T K p_k. \tag{28}$$

Modifikujme nyní výpočet koeficientu β_k. Využitím (24) je zřejmé, že

$$r_{k-1} = r_{k-2} - \alpha_{k-1} K p_{k-1}. \tag{29}$$

Pokud použijeme druhé pozorování a vynásobíme-li (29) vektory r_{k-1} a r_{k-2}, dostaneme výrazy

$$r_{k-1}^T r_{k-1} = -\alpha_{k-1} r_{k-1}^T K p_{k-1} \tag{30}$$

a

$$r_{k-2}^T r_{k-2} = \alpha_{k-1} r_{k-2}^T K p_{k-1}. \tag{31}$$

Aplikováním (25) dostáváme

$$p_{k-1} = r_{k-2} + \beta_{k-1} p_{k-2}. \tag{32}$$

Užitím (32) a prvního pozorování můžeme (31) přepsat jako

$$r_{k-2}^T r_{k-2} = \alpha_{k-1}(p_{k-1} - \beta_{k-1} p_{k-2}) K p_{k-1} = \alpha_{k-1} p_{k-1} K p_{k-1}. \tag{33}$$

Konečně dosazením (30) a (33) do formule pro β_k dostáváme

$$\beta_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / r_{k-2}^T r_{k-2}. \tag{34}$$

4.3.1 Předpodmíněná metoda sdružených gradientů

Metoda sdružených gradientů konverguje rychle, pokud je matice K blízká jednotkové matici Id (detaily lze nalézt např. v [14], str. 529-530). Idea předpodmíněné metody sdružených gradientů (Preconditioned Conjugate gradient method-PCG) spočívá v aplikaci metody CG na transformovanou soustavu lineárních rovnic

$$\widehat{K}\widehat{x} = \widehat{f}, \tag{35}$$

kde $\widehat{K} = M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}$, $\widehat{x} = M^{\frac{1}{2}} x$, $\widehat{f} = M^{-\frac{1}{2}} f$, M je symetrická matice, $\widehat{K} \approx Id$ a soustava lineárních rovnic (35) je snadno řešitelná. Pokud je použito nějaké předpodmínění, hlavní část CG algoritmu zůstává stejná. Výpočet koeficientu délky kroku α_k a směru p_k se změní na

$$\alpha_k = r_{k-1}^T z_{k-1} / p_k^T K p_k \tag{36}$$

$$p_k = z_{k-1} + \beta_k p_{k-1} \tag{37}$$

kde $z_k = M^{-1} r_k$ a $\beta_k = r_{k-1}^T z_{k-1} / r_{k-2}^T z_{k-2}$.

Zbytek algoritmu zůstává stejný. Na základě [17] a [13] lze metodu předpodmíněných sdružených gradientů zapsat následovně:

Algoritmus PCG [Preconditioned Conjugate Gradient Method]

Initialize: $k = 0; r_0 = f - Kx_0;$
while $\|r_k\|/\|r_0\| > \varepsilon$ **and** $(k < k_{max})$ **do**
begin
  solve $Mz_k = r_k;$
  $k = k + 1;$
  if $k = 1$ **then**
    $p_1 = z_0;$
  else
    $\beta_k = r_{k-1}^T z_{k-1} / r_{k-2}^T z_{k-2};$
    $p_k = z_{k-1} + \beta_k p_{k-1};$
  endif.
  $u_k = Kp_k;$
  $\alpha_k = r_{k-1}^T z_{k-1} / p_k^T u_k;$
  $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k;$
  $r_k = r_{k-1} - \alpha_k u_k;$
end.

Tento algoritmus vyžaduje v jedné iteraci následující tři typy operací:

1. řešení soustavy lineárních rovnic s předpodmiňovačem M: $Mz_k = r_k$,
2. násobení řídké matice K vektorem p: $u_k = Kp_k$

3. skalární součiny vektorů.

Analyzováním algoritmu PCG je zřejmé, že matice M je zahrnuta pouze v kontextu řešení soustavy lineárních rovnic

$$Mz_k = r_k. \tag{38}$$

Stojí proto za zdůraznění, že soustava lineárních rovnic (38) musí být lehce řešitelná. Existuje celá řada možností jak zvolit matici předpodmiňovače M. V dalších experimentech bude použito metody přibližného Choleského rozkladu pro řídké matice (Sparse incomplete Cholesky factorization), ve kterém je matice M sestavena jako

$$K \approx M^T M. \tag{39}$$

Při počítačové implementaci byl pro předpodmínění použit příkaz Matlabu (tm) $M = cholinc(K,'0')$, při kterém je provedena neúplná Choleského faktorizace symetrické pozitivně definitní matice K s úrovní zaplnění 0 (0 level of fill-in). V tomto případě algortimus neprodukuje žádné zaplnění a předpodmiňovač M má stejné zaplnění jako původní (řídká) matice K, viz dokumentace produktu Matlab (tm).

4.4 Metody sdružených gradientů pro řešení soustav s více pravými stranami

V této sekci jsou ukázány přístupy, které rozšiřují klasickou metodu sdružených gradientů pro efektivní řešení soustav lineárních rovnic s více pravými stranami.

4.4.1 Metoda blokových sdružených gradientů (Block CG)

Metoda blokových sdružených gradientů (Block CG, zkráceně BCG) generalizuje metodu sdružených gradientů: Podobně jako tomu bylo v případě CG metody, nechť

$$\Phi(X) = [\phi_1(x_1), \ldots, \phi_q(x_q)], \tag{40}$$

kde

$$\phi_i(x_i) = \frac{1}{2} x_i^T K x_i - x_i^T f_i. \tag{41}$$

Je snadné ukázat, že minimum kvadratické funkce $\Phi(X)$ je zároveň řešením soustavy (19). Nechť $X_k = [x_k^1, \ldots, x_k^q]$ označuje k-tou aproximaci řešení soustavy (19). Pak příslušné residuum $R_k = [r_k^1, \ldots, r_k^q]$ je definováno vztahem

$$R_k = F - KX_k = [f^1 - Kx_k^1, \ldots, f^q - Kx_k^q] \tag{42}$$

a nová aproximace řešení X_k je získána vztahem

$$X_k = X_{k-1} + P_k\alpha_k, \tag{43}$$

kde $P_k = [p_k^1, \ldots, p_k^q]$ je $n \times q$ matice směrů a α je $q \times q$ matice délky kroku, která je určena

$$\min_{\alpha_k \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \Phi(X_k) = 0, \tag{44}$$

tedy

$$\frac{\partial \Phi(X_{k-1} + P_k\alpha_k)}{\partial \alpha_k} = 0. \tag{45}$$

Vyjádřením posledního výrazu dostáváme

$$P_k^T R_k = P_k^T (R_{k-1} - KP_k\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = (P_k^T K P_k)^{-1} P_k^T R_{k-1}. \tag{46}$$

Matice směrů P_k je sestavena jako

$$P_k = R_{k-1} + P_{k-1}\beta_k, \tag{47}$$

kde $q \times q$ matice β_k je determinována tak, aby matice směrů P_k byla K-ortogonální k matici směrů P_{k-1}, tedy

$$P_k^T K P_{k-1} = 0 \Leftrightarrow \beta_k = -(P_{k-1}^T K P_{k-1})^{-1} P_{k-1}^T K R_{k-1}. \tag{48}$$

Pozorování

Podobně jako tomu bylo u metody sdružených gradientů, platí následující vlastnosti:

1. $P_k^T K P_j = 0, \quad$ for $k \neq j$,
2. $R_k^T R_j = 0, \quad$ for $k \neq j$ a
3. $P_k^T R_k = 0$.

Pokud je aplikována matice předpodmiňovače M, pak je výpočet α_k a β_k prováděn formulemi

$$\alpha_k = (P_k^T K P_k)^{-1} R_{k-1}^T Z_{k-1} \tag{49}$$

$$\beta_k = (R_{k-2}^T Z_{k-2})^{-1} R_{k-1}^T Z_{k-1}. \tag{50}$$

Na základě [17] a [13] lze metodu předpodmíněných blokových sdružených gradientů shrnout následovně:

Algoritmus BCG [Preconditioned Block Conjugate Gradients Method]

Initialize: $k = 0; R_0 = F - KX_0;$

while $(\max(\|r_k^i\|/\|r_0^i\|) > \varepsilon, i = 1, \ldots, q)$ **and** $(k < k_{max})$ **do**

begin

solve $MZ_k = R_k;$

$k = k + 1;$

if $k = 1$ **then**

$P_1 = Z_0;$

else

$\beta_k = (R_{k-2}^T Z_{k-2})^{-1} R_{k-1}^T Z_{k-1};$

$P_k = Z_{k-1} + P_{k-1}\beta_k;$

endif.

$U_k = KP_k;$

$\alpha_k = (P_k^T U_k)^{-1} R_{k-1}^T Z_{k-1};$

$X_k = X_{k-1} + P_k \alpha_k;$

$R_k = R_{k-1} - U_k \alpha_k;$

end.

Algoritmus BCG obsahuje výpočet inverzí matic $P_k^T K P_k$ a $R_k^T M^{-1} R_k$. Obecně, matice směrů P_k a matice residuí R_k nemusí mít plnou sloupcovou hodnost, např. pokud jsou vektory pravých stran lineárně závislé. K zabezpečení numerické stability BCG algoritmu je tedy nezbytně nutné vyjmout lineárně závislé pravé strany. Bohužel, normy residuí těchto lineárně závislých pravých stran nemusí být dostatečně malé. Po představení metody postupných sdružených gradientů přichází řada na přístup, který chytře řeší problém numerické stability BCG algoritmu a zároveň nalezne efektivně řešení lineárně závislých pravých stran.

4.4.2 Metoda postupných sdružených gradientů (Successive CG)

Metoda sdružených gradientů v k-tém kroku vytvoří nový vektor směru p_k a následně se vypočte nová aproximace řešení x_k. Nicméně konstrukce nového vektoru směru zahrnuje dvě náročné operace:

- řešení soustavy lineárních rovnic s předpodmiňovačem M: $Mz_k = r_k$,
- násobení řídké matice K vektorem p: $u_k = Kp_k$

Metoda postupných sdružených gradientů (Successive CG - SCG) provádí výpočet nového vektoru směru p_k^m pouze pro *jednu vybranou soustavu*, která se označuje jako "master". Řešení této soustavy, x_k^m, je získáno užitím metody sdružených gradientů. Počáteční aproximace řešení zbylých nevyřešených soustav x_k^s (říká se jim "slaves") jsou získány využitím vektoru směru p_k^m. (Přitom tento vektor již byl vypočítán "master" soustavou). Nechť symbol α_k^s označuje koeficient délky kroku "slave" soustav. Koeficient je určen tak, aby

$$(r_k^s)^T p_k^m = 0 \;\Leftrightarrow\; (r_{k-1}^s - \alpha_k^s K p_k^m)^T p_k^m = 0, \tag{51}$$

což dává

$$\alpha_k^s = (r_{k-1}^s)^T p_k^m / (p_k^m)^T K p_k^m. \tag{52}$$

Na základě [17] lze předpodmíněnou metodu postupných sdružených gradientů shrnout do následujícího algoritmu:

Algoritmus SCG [Preconditioned Successive CG Method]

Initialize: $k = 0; r_0^i = f^i - Kx_0^i, i = 1, \ldots, q;$
for $m = 1$ **until** q **do**
begin {pro každý vektor pravé strany}
    new_master = TRUE;
    while $(\|r_k^m\|/\|r_0^m\|) > \varepsilon$ **and** $(k < k_{max})$ **do**
    begin

solve $Mz_k = r_k^m$;

$k = k + 1$;

if *new_master* **then**

$new\_master =$ FALSE;

$p_k = z_{k-1}$;

else

$\beta_k = (r_{k-1}^m)^T z_{k-1} / (r_{k-2}^m)^T z_{k-2}$;

$p_k = z_{k-1} + \beta_k p_{k-1}$;

endif.

$u_k = Kp_k$;

$\sigma = p_k^T u_k$;

for $j = m$ **until** q **do**

begin {"slave" iterace jsou označeny jako $(m + 1, \ldots, q)$}

$\alpha_k = (r_{k-1}^j)^T z_{k-1} / \sigma$;

$x_k^j = x_{k-1}^j + \alpha_k p_k$;

$r_k^j = r_{k-1}^j - \alpha_k u_k$;

end.

end.

end.

SCG algoritmus je definován následujícími kroky: Nejdříve je první soustava označena jako "master" a zbývající pravé strany jsou označeny jako "slave". "Master" soustava je řešena metodou sdružených gradientů, zatímco řešení zbývajících "slave" soustav je vypočteno užitím vektoru směru z "master" soustavy. V "slave" soustavách je pouze počítán koeficient α_k^s a dále je prováděna aktualizace příslušných řešení "slave" soustav x_k^s a residuí r_k^s. Pokud je "master" soustava s dostatečnou přesností vyřešena, SCG algoritmus ji vyjme z úlohy a pak SCG vyjme jednu "slave" soustavu a označí ji jako "master". Tato strategie je opakována dokud nejsou všechny soustavy s dostatečnou přesností vyřešeny. Analýza konvergence "slave" soustav je studována v [17]. Především je zřejmé, že rychlost konvergence "slave" soustavy je stejná jako rychlost konvergence "master" soustavy, pokud jsou vektory residuí "slave" soustavy a "master" soustavy lineárně závislé. Stojí za připomenutí, že BCG algoritmus by v této situaci selhal.

4.4.3 Kombinovaná metoda (Successive Block CG)

Stabilní verze blokových sdružených gradientů musí monitorovat sloupcovou hodnost matic P_k nebo R_k. Zejména, pokud některá z těchto matic nemá plnou sloupcovou hodnost, BCG vyjme tyto lineárně závislé pravé strany z úlohy i v případě, že residua příslušná těmto lineárně závislým pravým stranám nejsou dostatečně malá. Na druhé straně kombinovaná metoda (Successive Block CG) vyjme tyto lineárně závislé pravé strany pouze z procesu výpočtu směrů. Příslušná řešení X_k^s jsou získány přístupem SCG. Na základě [17] můžeme Successive Block CG algoritmus shrnout do následujícího algoritmu:

Algoritmus SBCG [Preconditioned Successive Block CG Method]

Inicializace: $k = 0; R_0 = F - KX_0;$
Vyber množiny indexů m a s tak, aby $m \cup s = \{1, \ldots, q\}$ a současně $m \cap s = \{\}$;
while $(\max(\|r_k^m\|/\|r_0^m\|) > \varepsilon, i = 1, \ldots, q)$ **and** $(k < k_{max})$ **do**
begin

$k = k + 1;$
solve $MZ_k = R_k^m$;
kontrola hodnosti $(R_{k-1}^m)^T Z_{k-1}$; přesun závislých pravých stran do "slave";
if $k = 1$ **then**
$P_1 = Z_0;$
else
$\beta_k = ((R_{k-2}^m)^T Z_{k-2})^{-1} (R_{k-1}^m)^T Z_{k-1};$
$P_k = Z_{k-1} + P_{k-1}\beta_k;$
endif.
$U_k = KP_k;$
$[\alpha_k^m, \alpha_k^s] = (P_k^T U_k)^{-1}[(R_{k-1}^m)^T Z_{k-1}, (R_{k-1}^s)^T Z_{k-1}];$
$[X_k^m, X_k^s] = [X_{k-1}^m, X_{k-1}^s] + P_k[\alpha_k^m, \alpha_k^s];$
$[R_k^m, R_k^s] = [R_{k-1}^m, R_{k-1}^s] - U_k[\alpha_k^m, \alpha_k^s];$

end.

Algoritmus SBCG pracuje následovně: Nejdříve SBCG rozdělí indexy pravých stran do dvou disjunktních množin. Množina m obsahuje indexy "master" soustav a množina s obsahuje indexy "slave" soustav. Soustavy příslušející k množině m jsou řešeny užitím blokových sdružených gradientů. Označíme-li symbolem $|m|$ počet indexů v množině m, pak matice směrů P_k má velikost $n \times |m|$ matrix. S cílem předejít numerické nestabilitě se v každé iteraci kontroluje korektnost výpočtu směrů.
Nechť $0 \leq coef \leq 1$ je daná konstanta. V implementovaném programovém kódu byla sledována hodnost matice $(R^m_{k-1})^T Z_{k-1}$ užitím QR rozkladu. Detaily ozřejmí algoritmus Findep.

Algorithm Findep [Find and remove dependent indexes - nalezení a vyjmutí závislých indexů]

Orthogonal-triangular decomposition: $[q, v] = qr((R^m_{k-1})^T Z_{k-1});$
for $i = 1$ **until** $|m|$ **do**
begin {pro všechny indexy z množiny "master"}
    $relcoef_i = |v_{ii}|/max(|v_{ii}|);$
    if $relcoef_i < coef$ **then**
        přesuň $m(i)$-tý index do množiny "slave";
    endif.
end.

Nejnáročnější operací algoritmu Findep je bezesporu výpočet QR rozkladu matice $(R^m_{k-1})^T Z_{k-1}$. Nicméně stojí za zdůraznění, že velikost rozkládané matice závisí pouze na počtu indexů v množině m, což je, jak vyplyne z numerických experimentů, velmi malé číslo ($|m| \approx 5$). V následující sekci bude provedena diskuse hodnot koeficientu $coef$ algoritmu Findep.

4.4.4 Kombinovaný algoritmus SBCG jako generalizace přístupů SCG a BCG

V této sekci bude provedena diskuze hodnot koeficientu $coef$. Pokud bude $coef$ menší než nula, pak podmínka algoritmu Findep $relcoef_i < coef$ nebude nikdy splněna. To znamená, že množina "slave" soustav s zůstane prázdná. Jinými slovy, dostáváme původní (obecně nestabilní) BCG algoritmus. Zvětšováním hodnoty koeficientu $coef$ se stává splnění podmínky algoritmu Findep snazší a SBCG algoritmus bude mít silnější tendenci přesouvat indexy soustav z množiny "master" do množiny "slave". Pokud bude $coef$ větší nebo roven číslu 1, pak bude množina m vždy obsahovat přesně jeden index. Jinými slovy, SBCG přejde na SCG algoritmus.

Konvergence metody SBCG v závislosti na změně koeficientu lineární závislosti $coef$ je vidět na Obr. 16 a Obr. 17.

Na horizontální ose grafu je zobrazeno číslo iterace, na vertikální ose grafu je zobrazen počet soustav v "master" bloku. Řešená soustava vzešla z pravděpodobnostního posudku rámu simulačními technikami, podrobnosti budou detailněji diskutovány v následující sekci.

Z grafů je vidět, že zvětšování koeficientu $coef$ vede ke snižování počtu soustav v "master" bloku. Zatímco při volbě $coef = 1.10^{-8}$ a $coef = 1.10^{-6}$ (Obr. 16) je počet soustav v "master" bloku roven pěti, při volbě $coef = 0.1$ je počet soustav v "master" bloku roven dvěma (Obr. 17) a při volbě $coef = 1$ je počet soustav v "master" bloku identicky roven jedné (dostáváme tedy SCG algoritmus).

4.5 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukce

Nechť je odolnost konstrukce (resistance) vyjádřena proměnnou R a nechť jsou účinky zatížení (load effects) vyjádřeny vyjádřeny proměnnou S. Nechť je spolehlivost konstrukce vyjádřena funkcí spolehlivosti (safety function) Z předpisem

$$Z = R - S. \tag{53}$$

Situace, při kterých je $Z < 0$, reprezentují poruchu konstrukce, zatímco situace, při kterých je $Z \geq 0$, jsou bezpečné, viz např. [20], [21] a [22]. Proměnné R a S mají přirozeně náhodný charakter. Rovnice (53) může být přepsána do tvaru

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n). \tag{54}$$

Zde symboly $X_1, X_2, \dots, X_n$ označují náhodné proměnné, které popisují neurčitost v geometrických a materiálových charakteristikách, v zatížení a případně i vlivy dalších faktorů. Symbol g bývá označován jako "performance function" konstrukce. Detaily lze nalézt např. v [20], [21] a [22].

Pravděpodobnost poruchy konstrukce může být vyjádřena vztahem

$$P_f = P(Z < 0) = P(g(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0). \tag{55}$$

Cílem pravděpodobnostního posudku spolehlivosti je ověření platnosti

$$P_f < P_d, \tag{56}$$

kde symbol P_f označuje vypočtenou pravděpodobnost poruchy a symbol P_d označuje tzv. cílovou návrhovou pravděpodobnost (target design probability) danou např. v normách, viz [21], [22] a [20].
Rovnice 55 může být vypočtena přibližně užitím přibližných numerických metod typu FORM a/nebo SORM, viz např. [20] nebo vypočtena přímo simulačním přístupem, viz např. [21], [22] a [20].

4.6 Model betonového rámu v prostředí Matlab/Calfem

Tento příklad byl odvozen z internetové stránky projektu Calfem, viz [28], odkaz "CALFEM/Pre user interface tutorial", kde je možno nalézt model rámu a jeho řešení metodou konečných prvků v prostředí Matlab užitím nástavby Calfem. V této sekci bude rozšířen původní deterministický model rámu na případ, ve kterém je uvažován náhodný charakter působících sil. Dále bude proveden pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukce simulačním přístupem užitím přímé metody Monte Carlo a metodou redukce rozptylu Importance Sampling.

Uvažujme betonový rám, na který působí rovnoměrně rozložené síly F_1, F_2, ..., F_6, viz obrázek 18. Model má následující deterministické parametry: Youngův modul

$E = 10.5$ GPa, Poissonovův poměr $\nu = 0.15$ a tloušťka $t = 0.20$ m. V modelu je předpokládáno, že síly F_1, F_2, …, F_6 mají normální rozdělení. Parametry rozdělení jsou shrnuty v Tab. 25.

Tabulka 25: Parametry normálního rozdělení náhodných sil modelu.

Název proměnné	Střední hodnota	Směrodatná odchylka
F_1	15 kN	5 kN
F_2	15 kN	5 kN
F_3	15 kN	5 kN
F_4	4 kN	4 kN
F_5	4 kN	4 kN
F_6	0 kN	4 kN

V uvažovaném modelu má funkce spolehlivosti (53) následující vyjádření:

Symbol R označuje pevnost betonu v tahu (concrete tensile strength), které je určeno normálním rozdělením s parametry $R = 1 \pm 0.1$ MPa. Symbol S označuje maximální hodnotu hlavního tahového napětí elementu v konstrukci.

Hodnoty S byly vypočítány metodou konečných prvků užitím modifikovaného numerického modelu balíku Calfem, který byl získán z odkazu [28]. Výpočet pravděpodobnosti poruchy vzorcem (55) byl proveden metodou SBRA, viz např. [21], [22] a [24].

4.6.1 Preprocessing

S cílem detekovat události, které nastávají s velmi nízkou pravděpodobností, byla pro simulační výpočet použita metoda redukce rozptylu na bázi Importance Sampling. Náhodný výběr metody Importance Sampling byl prováděn podle rovnoměrného rozdělení na stejné doméně, jakou mají původní histogramy normálního rozdělení metody SBRA. Tento přístup je výhodný pro úlohy, u kterých není k dispozici žádná informace o poruše, viz [27] a [25].

Pro porovnání byl pravděpodobnostní posudek spolehlivosti proveden také přímou metodou Monte Carlo.

Díky tomu, že model předpokládá náhodný charakter v zatížení, náhodné příspěvky budou ovlivňovat pouze pravou stranu soustavy lineárních rovnic.

4.6.2 Processing

V numerickém experimentu bylo uvažováno 1 000 simulačních kroků. Z toho plyne, že příslušná soustava lineárních rovnic měla 1 000 pravých stran a celkový počet neznámých byl 16 188 $\times$ 1 000 = 16 188 000, viz Tab. 26.

Pro řešení soustav lineárních rovnic byl použit SBCG algoritmus, ve kterém byl parametrem koeficient lineární závislosti $coef$. Všechny výpočty byly provedeny na počítači NB Premio 5050N s procesorem Intel Pentium M 760 (1.8 GHz) s 1 GB RAM. Výsledky jsou v Tab. 27.

Analyzováním Tab. 27 můžeme vidět, že volba $coef = 10^{-6}$ je v tomto případě nejlepší. Například pro vyřešení 1 000 soustav lineárních rovnic vyžaduje metoda SCG 1 424.75 sekund, zatímco "vítězný" SBCG algoritmus s volbou $coef = 10^{-6}$ vyžadoval pouze 546.578 sekund. Relativní zrychlení SBCG bylo 1 424.75/546.578 $\approx$ 2.6. Na druhé straně celkový počet operací násobení matice vektorem byl menší v případě algoritmu SCG. Zatímco algoritmus SBCG vyžadoval pro vyřešení 1 000 soustav lineárních rovnic minimálně 595 operací násobení matice vektorem, SCG algoritmus vyžadoval pouze 446 operací násobení matice vektorem. Stojí za zmínku, že pro vyřešení *jedné soustavy* lineárních rovnic vyžaduje klasický algoritmus metody sdružených gradientů 205 operací násobení matice vektorem. Tyto výsledky ukazují velkou efektivitu iteračních metod pro soustavy lineárních rovnic s více pravými stranami při řešení úlohy pravděpodobnostního posudku spolehlivosti metodou konečných prvků.

4.6.3 Postprocessing

Cílem příkladu je nalézt rozložení hlavního tahového napětí na elementech konstrukce. Pro výpočet napětí na elementu $Es = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ z vektoru deformací bylo použito volání balíku Calgem 'planrs'. Pak byla pro každý element v doméně vypočítána maximální a minimální hodnota hlavního tahového napětí (proměnné jsou označeny symboly σ_1 a σ_2). Pro výpočet hlavního tahového napětí byl použit následující algoritmus:

Algorithm Myprincs [Výpočet hlavního tahového napětí (principal stresses)]

$s_p = 0.5(\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2});$
$s_m = 0.5(\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2});$
$\sigma_1 = max(s_p, s_m);$
$\sigma_2 = min(s_p, s_m);$

Algoritmus Myprincs byl spušten při každé simulaci. S cílem získat informace o rozložení maximálních hodnot pro hlavní tahové napětí v geometrii konstrukce byl posudek spolehlivosti vypočítán pro každou z pěti domén konstrukce zvlášť. Data ze simulací byla následně statisticky zpracována. Výsledky pro přímou metodu Monte Carlo lze nalézt v Tab. 28, výsledky pro metodu Importance Sampling lze nalézt v Tab. 29.

Tabulky obsahují výsledky pro proměnnou σ_1 získané algoritmem Myprincs. Například sloupec oznacený jako $D5max$ obsahuje pravděpodobnost překrocení hodnoty hlavního tahového napětí σ_1, která je v prvním sloupci tabulky, pro doménu konstrukce označenou číslem 5.

Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 a σ_2 v konstrukci je také znázorněno v grafech, viz Obr. 20 a Obr. 21.

Minimální pozorovaná hodnota σ_2 byla pro metodu Importance Sampling $-1.25.10^6$. Tato pozorovaná hodnota je velmi vzdálená od kritické hodnoty -20 MPa. Z tohoto důvodu nejsou dále zobrazována výsledná rozložení σ_2. Rozložení hlavního tahového napětí σ_1 v doméně 1, 2, 3, 4 a 5 konstrukce lze nalézt na Obr. 22, 23, 24, 25 a 26.

Při analýze výsledků z Tab. 28 je zřejmé, že v případě přímé metody Monte Carlo nejsou detekovány vůbec žádné extrémní události vedoucí k překročení σ_1 nad mez $1.4.10^6$. Na druhé straně, metoda Importance Sampling detekuje extrémní události, při kterých je $\sigma_1 > 2.10^6$.

Sloupec Tab. 28 a Tab. 29, který je označen jako 'GlobMax', obsahuje informace o rozložení maximální hodnoty hlavního tahového napětí σ_1 v geometrii konstrukce.

Sloupec Tab. 28 a Tab. 29, který je označen jako 'SF', obsahuje informace týkající se funkce spolehlivosti (53). Pravděpodobnost poruchy byla odhadnuta přímou metodou Monte Carlo jako $P_f = 1 - 0.911 = 0.0890$. Pokud byla použita metoda Importance Sampling, pak byla pravděpodobnost poruchy odhadnuta $P_f = 1 - 0.961 = 0.0390$. Výsledky se liší na druhém desetinném místě. Rozptyl ve výsledcích je způsoben poměrně malým počtem simulací (1 000) a vlastnostmi použitého náhodného výběru. Je nutné zdůraznit skutečnost, že metoda Importance Sampling detekovala na rozdíl od přímé metody Monte Carlo při stejném počtu simulací extrémní hodnoty σ_1. Analýza těchto kritických hodnot může být užitečná pro další spolehlivostní analýzy. Samozřejmě opakováním pravděpodobnostního posudku spolehlivosti je možné zvyšovat přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy.

Tabulka 26: Vlastnosti soustavy lineárních rovnic s více pravými stranami pro úlohu pravděpodobnostního posudku spolehlivosti (Název úlohy: FEMFrame2_Geometry5_IS).

# unknowns per rhs	16188
# rhs	1000
reps	0.0001

Tabulka 27: Porovnání výsledků metody SBCG pro úlohu pravděpodobnostního posudku spolehlivosti.

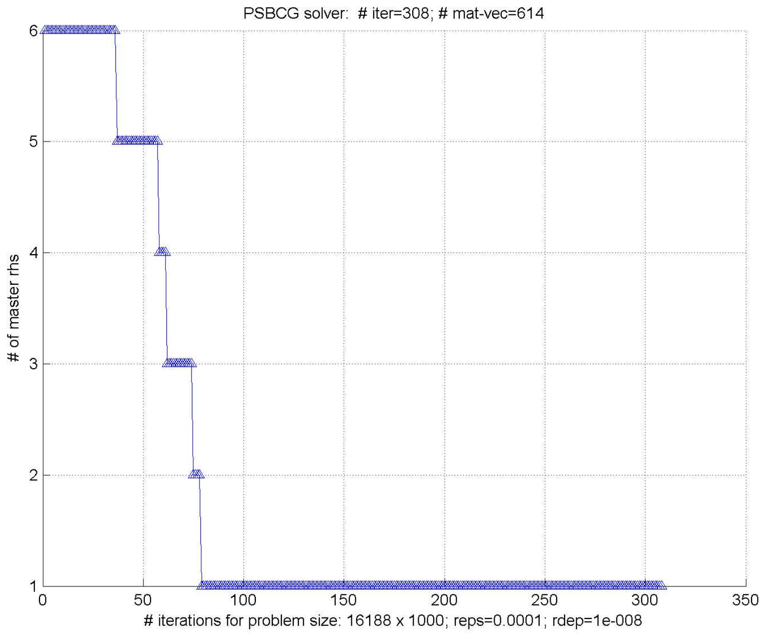
coef	1.00E-08	1.00E-06	0.0001	0.1	1 (=SCG)
# iterations	308	254	267	747	446
# mat-vec	614	595	681	757	446
Master max.size	6	6	6	2	1
Elapsed time (s)	934.219	546.578	812.375	2316.48	1424.75

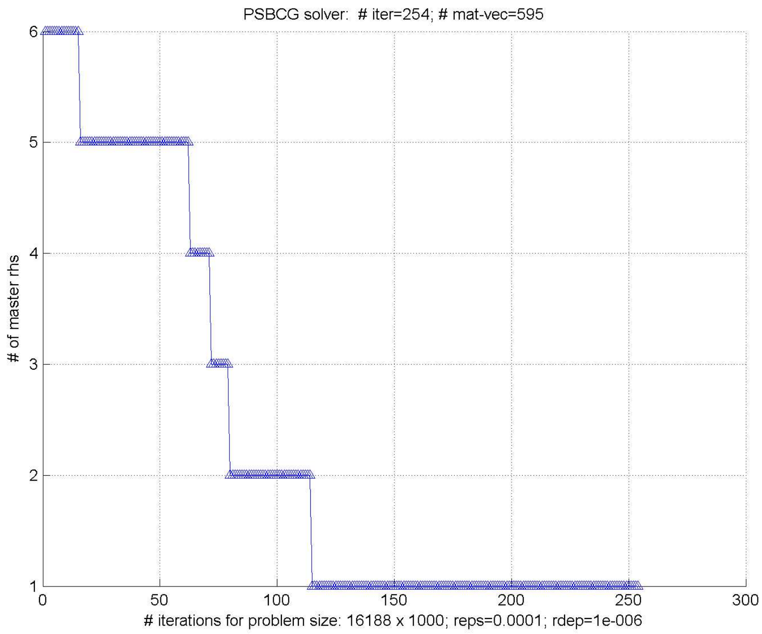
Tabulka 28: Výsledky pravděpodobnostního posudku spolehlivosti a pravděpodobnosti překročení hodnoty 'Value' hlavního tahového napětí pro každou z pěti domén konstrukce. Výsledky jsou pro přímou metodou Monte Carlo. (Geometry5, MC 1 000 steps).

Value	D1Max	D2Max	D3Max	D4Max	D5Max	GlobMax	SF
0	1	1	1	1	1	1	0.911
900000	0.001	0.152	0	0.002	0.045	0.152	0.005
1.E+6	0	0.073	0	0	0.013	0.073	0
1.1E+6	0	0.024	0	0	0.005	0.024	0
1.2E+6	0	0.008	0	0	0	0.008	0
1.3E+6	0	0.002	0	0	0	0.002	0
1.4E+6	0	0	0	0	0	0	0
1.5E+6	0	0	0	0	0	0	0
1.6E+6	0	0	0	0	0	0	0
1.7E+6	0	0	0	0	0	0	0
1.8E+6	0	0	0	0	0	0	0
1.9E+6	0	0	0	0	0	0	0
2.E+6	0	0	0	0	0	0	0

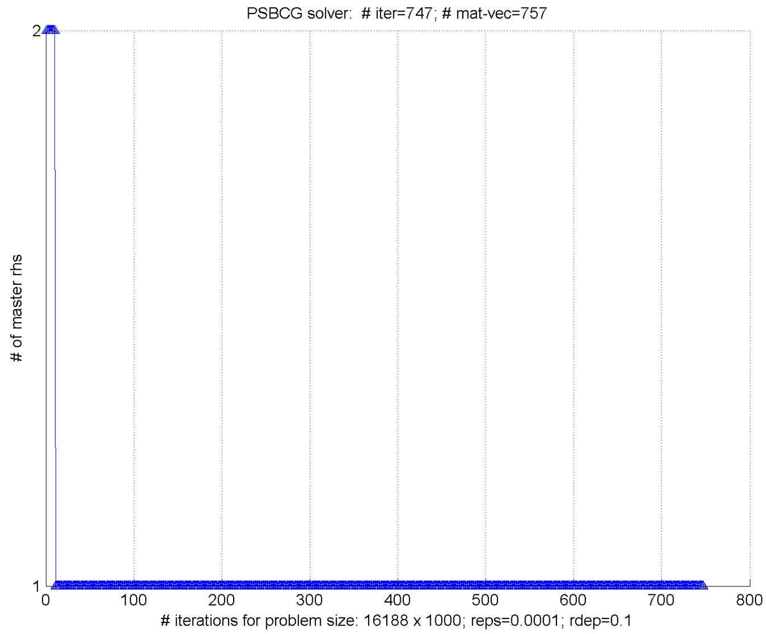
Tabulka 29: Výsledky pravděpodobnostního posudku spolehlivosti a pravděpodobnosti překročení hodnoty 'Value' hlavního tahového napětí pro každou z pěti domén konstrukce. Výsledky jsou pro metodou Importance Sampling (Geometry5, IS 1 000 steps).

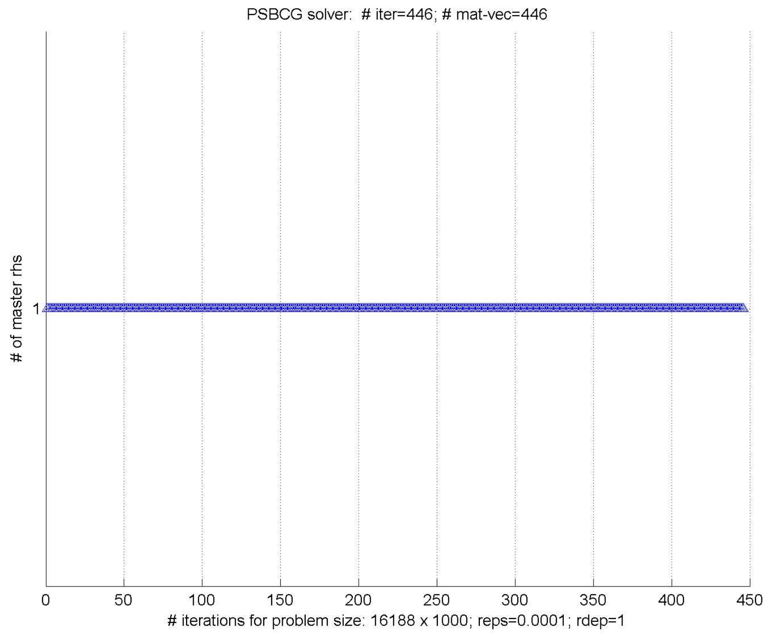
Value	D1Max	D2Max	D3Max	D4Max	D5Max	GlobMax	SF
0	1	1	1	1	1	1	0.961
9e+5	0.00221	0.224	2.39e-7	0.00408	0.0137	0.226	0.00764
1e+6	0.00203	0.134	3.5e-11	0.00128	0.00739	0.136	0.000208
1.1e+6	6.02e-5	0.0129	0	8.09e-6	0.0041	0.013	1.25e-5
1.2e+6	2.46e-6	0.00452	0	2.98e-7	0.00145	0.00452	5.26e-6
1.3e+6	2.39e-7	0.00401	0	4.27e-9	0.000331	0.00401	0
1.4e+6	1.59e-9	0.00131	0	4.27e-9	5.76e-6	0.00131	0
1.5e+6	3.5e-11	4.08e-5	0	0	3.14e-7	4.08e-5	0
1.6e+6	0	2.67e-6	0	0	4.27e-9	2.67e-6	0
1.7e+6	0	2.45e-6	0	0	4.27e-9	2.45e-6	0
1.8e+6	0	4.42e-9	0	0	0	4.42e-9	0
1.9e+6	0	4.27e-9	0	0	0	4.27e-9	0
2e+6	0	4.27e-9	0	0	0	4.27e-9	0



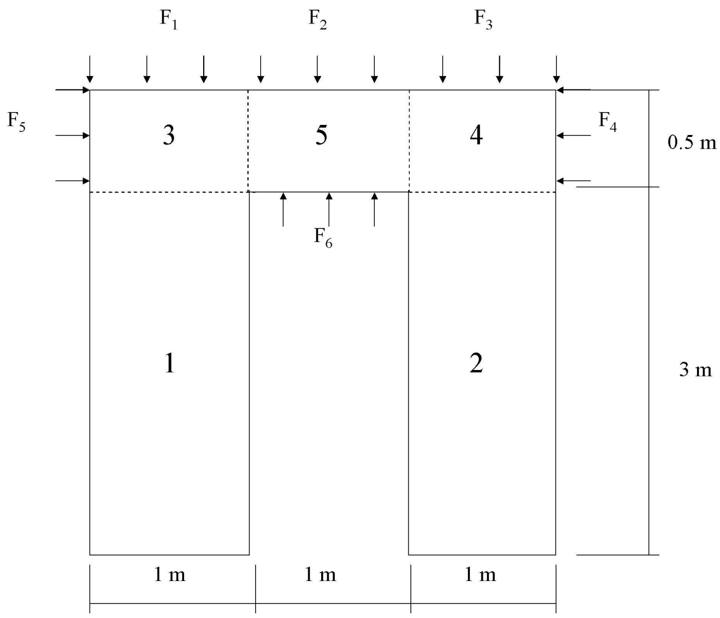


Obrázek 16: Konvergence metody SBCG v závislosti na změně koeficientu lineární závislosti $coef$. Graf je pro hodnoty $coef = 1.10^{-8}$ (nahoře) a $coef = 1.10^{-6}$ (dole).

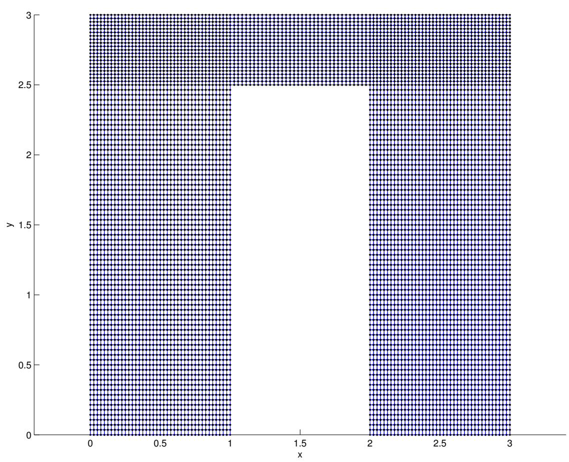




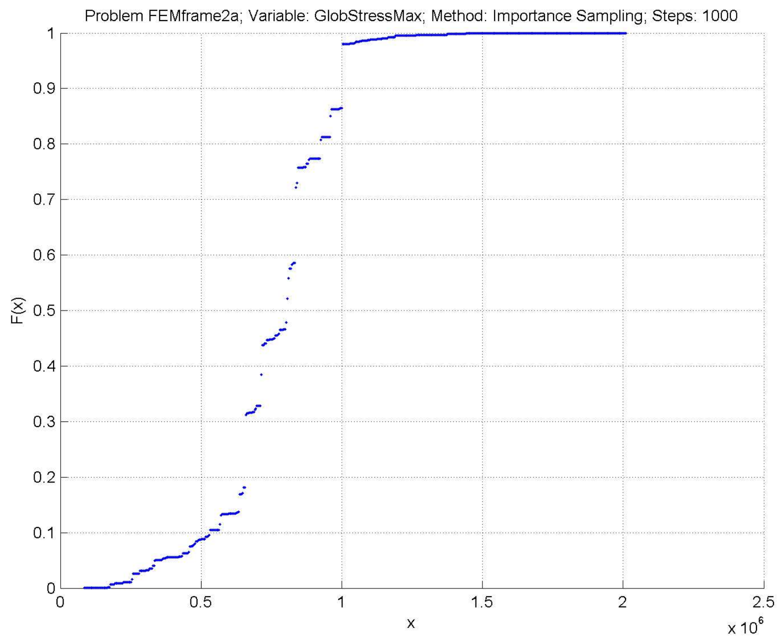
Obrázek 17: Konvergence metody SBCG v závislosti na změně koeficientu lineární závislosti $coef$. Graf je pro hodnoty $coef = 0.1$ (nahoře) a $coef = 1$ (dole).

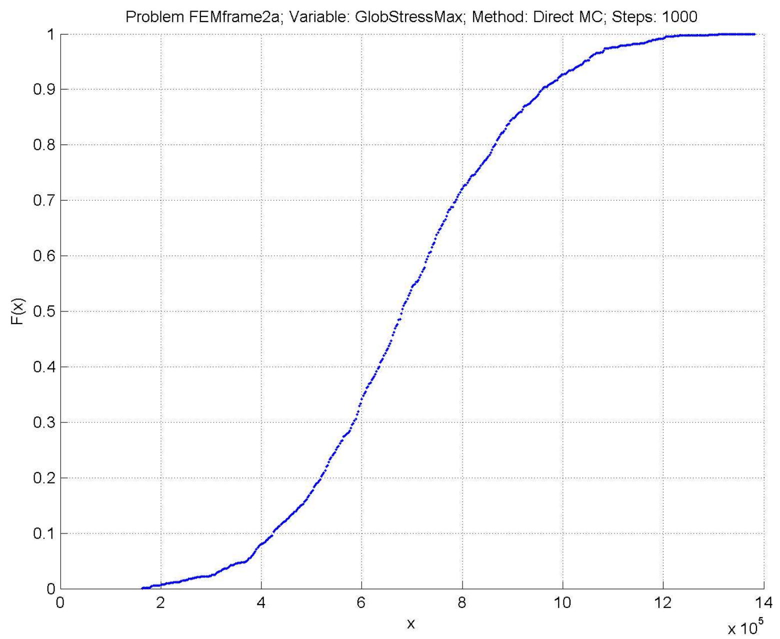


Obrázek 18: Geometrie konstrukce pro pravděpodobnostní posudek spolehlivosti metodou konečných prvků. Geometrie rámu obsahuje 5 subdomén, které jsou označeny čísly 1, 2, . . . , 5.

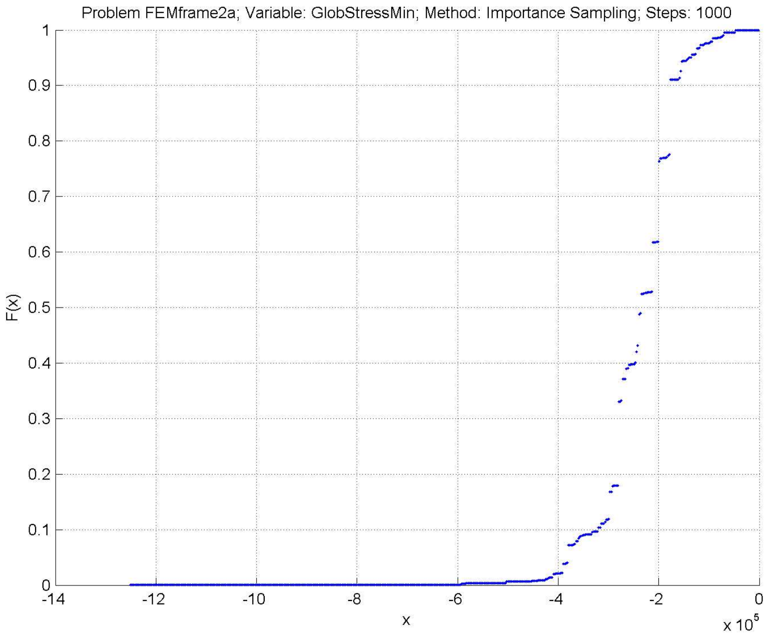


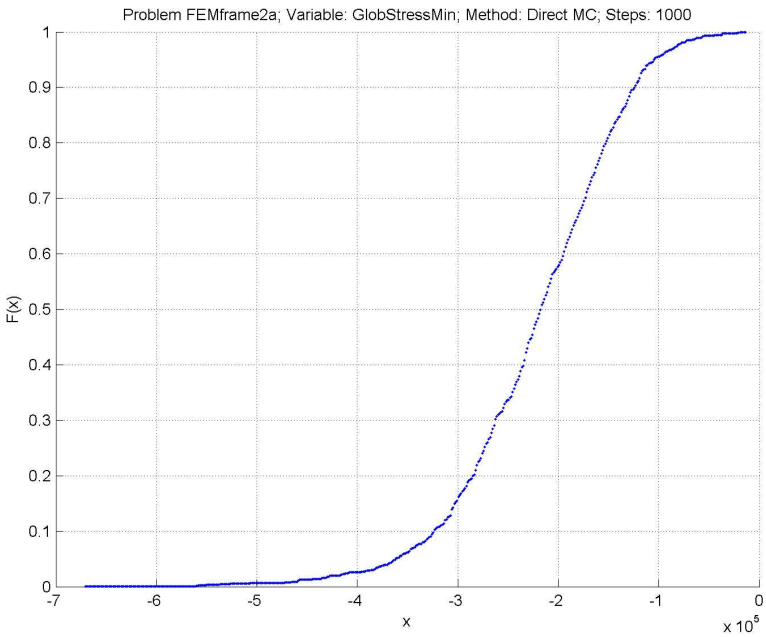
Obrázek 19: Síť metody konečných prvků užitím balíku CALFEM (Název úlohy: FEMFrame2_Geometry5).



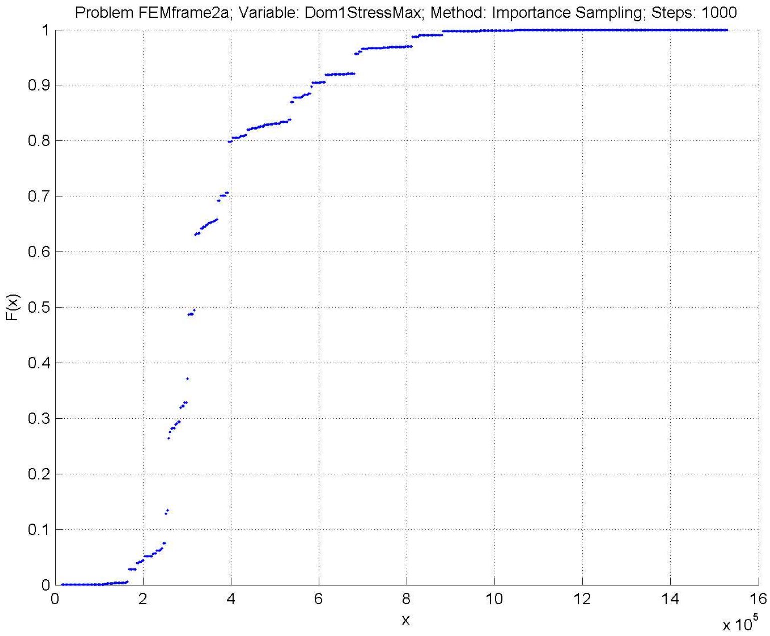


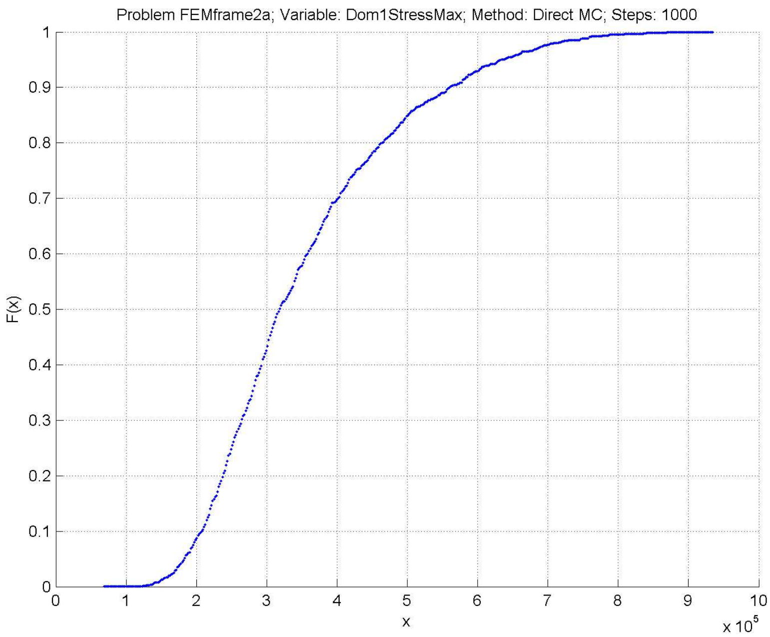
Obrázek 20: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 v konstrukci metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).



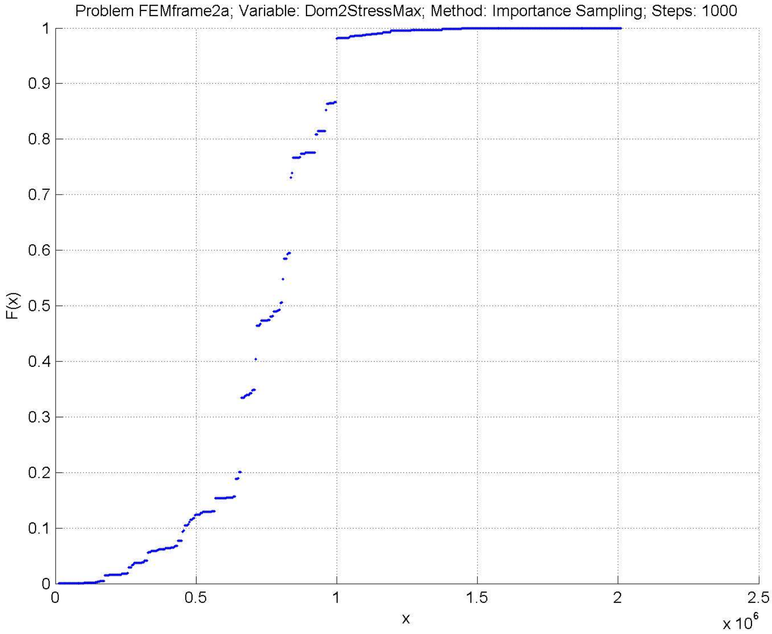


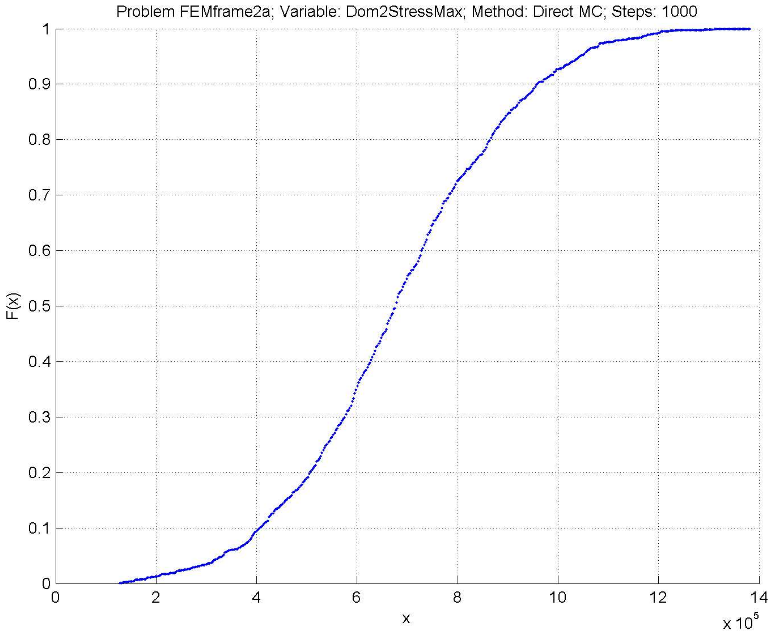
Obrázek 21: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_2 v konstrukci metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).



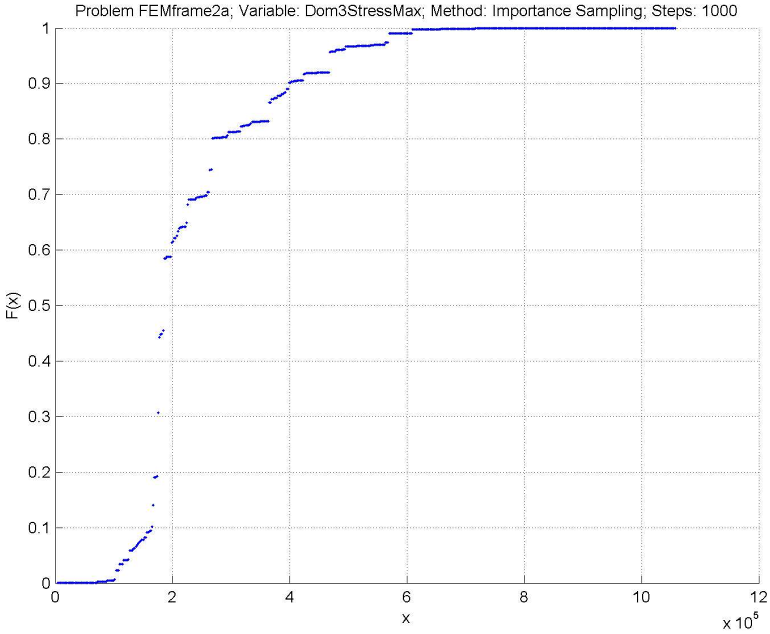


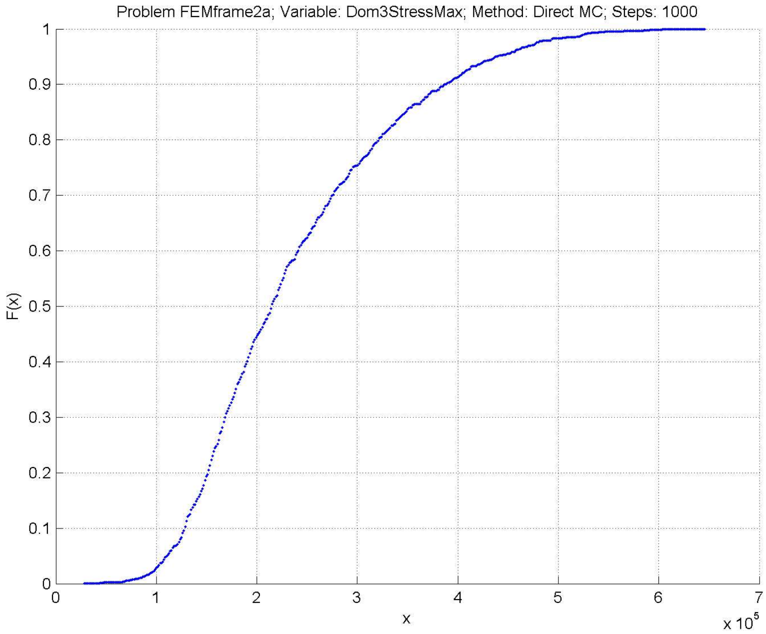
Obrázek 22: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 v doméně 1 metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).



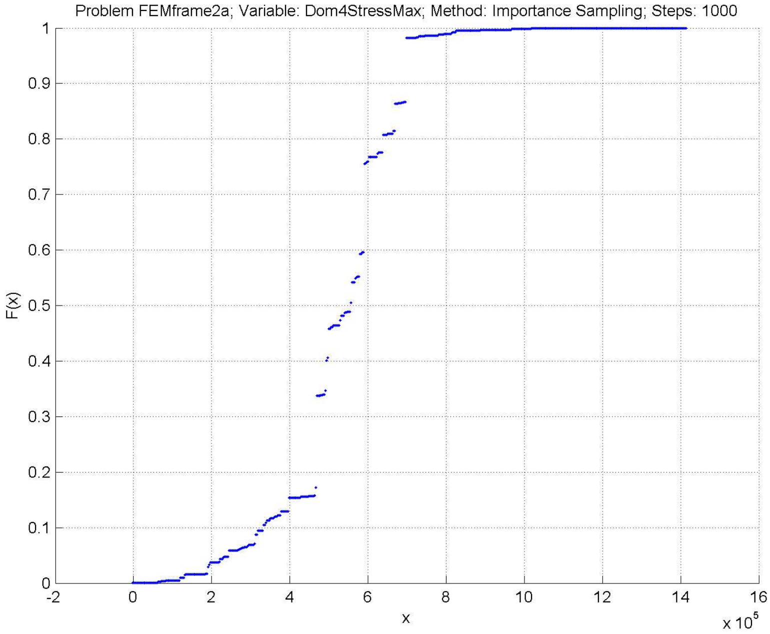


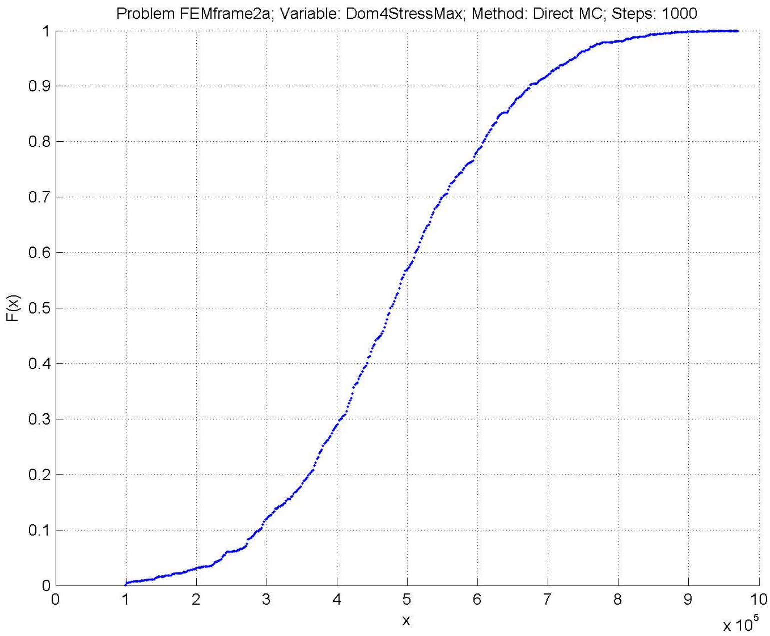
Obrázek 23: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 v doméně 2 metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).



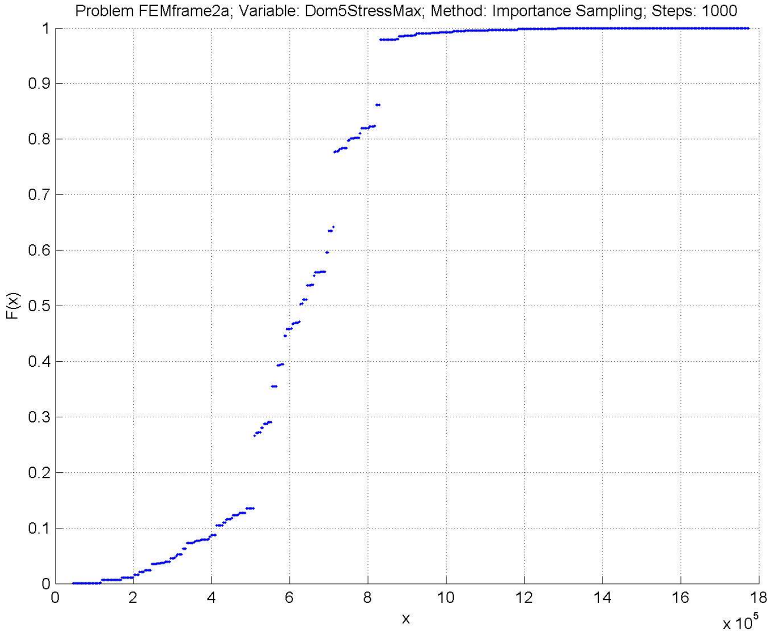


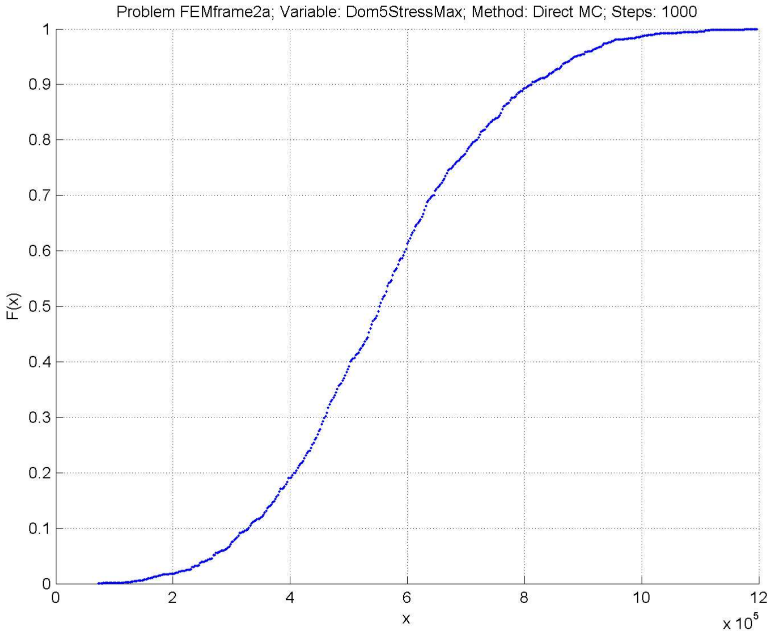
Obrázek 24: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 v doméně 3 metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).





Obrázek 25: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 v doméně 4 metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).





Obrázek 26: Rozdělení hlavního tahového napětí σ_1 v doméně 5 metodou Importance Sampling (nahoře) a přímou metodou Monte Carlo (dole).

4.7 Závěr

V této sekci byla provedena demonstrace použití iteračních řešičů pro řešení úlohy pravděpodobnostního posudku spolehlivosti simulačními technikami. Pro efektivní řešení lineárních rovnic s více pravými stranami byla s výhodou použita metoda SBCG. Metoda SBCG byla v minulosti taktéž úspěšně testována na úloze citlivostní analýzy pro tvarovou optimalizaci v geomechanice [26] a na úlohách lineární elasticity řešenou metodou rozložení oblasti FETI [9], [10].

Reference

[1] Brožovský J.: *Program AFEM pro analýzu konstrukcí metodou konečných prvků*, In Modelování v mechanice 2003, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2003, 26-34, ISBN 80-248-0253-8

[2] Brožovský J.: *Internetová stránka programu AFEM*, http://www.penguin.cz/∼jirka/afem/

[3] Beranger M., Laurent B.: *Quantification of rare accidental events on nuclear power plant, using Monte Carlo simulation.* Sborník ESREL 2001 European Safety & Reliability International Conference, Torino, Italy, 2001, 871-878

[4] Dostál, Z., Praks, P.: *Numerické aspekty aplikace SBRA na systémy.* Sborník spolehlivosti konstrukcí. Dům techniky Ostrava, 2001, 39-42, ISBN 80-02-01410-3

[5] Briš R., Praks P.: *Special Case of Dynamic Reliability Analysis Based on Time Dependent Acyclic Graph.* The International Symposium on Stochastic Models in Reliability, Safety, Security and Logistics, Feb 15-17, 2005, Beer Sheva, Israel, I. Frenkel (ed.) et al., pg. 69-70; ISBN 9984-668-79-7. Invited paper.

[6] Chan T. F., Wan W. L.: *Analysis of Projection Methods for Solving Linear Systems with Multiple Right-Hand Sides.* UCLA Computational and Applied

Mathematics Reports, 1994, ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/camreport/cam94-26.ps.gz

[7] Dostál Z., Vondrák V. and Rasmussen J.: *Implementation of iterative solvers in shape optimization.* 2nd World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Zakopane (1997), published in proceedings, IFTR Warzsaw, eds. W. Gutkowski and Z. Mroz, pp.443-448. ISBN 83-905454-7-0.

[8] Vondrák V., Dostál Z. and Rasmussen J.: *Duality based contact shape optimization.* ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. 81, Suppl. 3, 703-704 (2001). Online ISSN: 1521-4001 Print ISSN: 0044-2267. Reviewed in ZM No. 01655554. IF 0.238.

[9] Kučera R., Praks P.: *On the wavelet transformation and solving of linear systems.* Proc. of Modern Methods in Mathematics, Dolní Lomná 1998, in Czech. (Waveletová transformace a řešení soustav lineárních rovnic), In Sborník ze 7. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1998, vol. 6, 135-141, ISBN 80-7078-622-1

[10] Praks P., Kučera R., Brožovský J.: *Stable Block Conjugate Gradient Algorithm for FETI-based Domain Decomposition Method and Probabilistic Reliability Assessment of Structures.* International Sci. Conf. held on the occasion of the 55^{th} anniversary of founding the Faculty of Mechanical Engineering Ostrava. Section no. 9: Computational and Experimental Analysis of Strength. Ed. K. Frydrýšek Sep. 7-9, 2005; pg. 1-21 (CD-ROM); ISBN 80-248-0896-X

[11] Kučera, R.: *Complexity of an algorithm for solving saddle-point systems with singular blocks arising in wavelet-Galerkin discretizations.* Accepted in Appl. Math., 2005.

[12] Menčík J.: *Úloha referenčních hodnot při posuzování spolehlivosti.* Sborník spolehlivosti konstrukcí. Dům techniky Ostrava, 2002, 23-26, ISBN 80-0201489-8

[13] Feng Y.T., Owen D. R. J., Peric D.: *A block conjugate gradient method applied to linear system with multiple right hand sides.* Comput. Methods in Appl. Mech. Eng., 127 1995, pp. 203-215

[14] Golub G. H., Van Loan C. F.: *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press 1989

[15] Hestenes M. R., Stiefel E.: *Methods of conjugate gradients or solving linear Systems.* J. Res. Nat. Bur. Stand., 49 1952, pp. 409-436.

[16] Praks P.: *Iterative solution methods for solving linear systems with multiple right hand sides.* MSc. thesis, FEI VŠB - TU Ostrava, 1999.

[17] Suarjana M., Law K. H.: *Successive conjugate gradient methods for structural analysis with multiple load cases.* Int. J. Num. Methods Eng., 37 1990, pp. 4185-4203.

[18] Vondrák V.: *Description of the K3 sparse matrix storage system;* http://www.ime.auc.dk /afd3/odessy/manuals/ods_k3des.pdf

[19] Farhat C., Crivelli L., Roux F. X.: *Extending substructure based iterative solvers to multiple load and repeated analyses.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 117, pages 195-209, 1994

[20] Haldar A., Mahadevan S.: *Reliability Assessment using Stochastic Finite Element Analysis.* Willey, New-York, ISBN 0-471-36961-6, 2000

[21] Marek, P., Guštar, M., and Anagnos, T., *Simulation Based Reliability Assessment*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, 1995

[22] Marek P., Brozzetti J., Guštar M., Tikalsky P. (Eds.): *Probabilistic assessment of structures using Monte Carlo simulation: background, exercises and software.* Second extended edition. ITAM - Academy of Sciences of Czech Republic, ISBN 80-86246-19-1, 2003

[23] McKay M. D., Conover W. J., Beckman R. J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code.* Technometrics, Vol. 21, No. 2, 1979, 239-245

[24] *Simulation based reliability assessment method SBRA;* http://www.itam.cas.cz/sbra

[25] Praks P., Konečný P.: *Direct Monte Carlo Method vs. improved methods considering applications in designers every day work.* Chapter 23 in book: Marek P., Brozzetti J. and Guštar M. (editors): Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Basics, Exercises, Software (Second edition). ITAM - The Academy of Sciences of the Czech republic, 2003 (10 pages, CD-ROM), ISBN: 80-86246-19-1

[26] Praks, P.: *Conjugate gradient methods for linear systems with multiple right hand sides*, Transactions of the VSB - Technical University of Ostrava, Computer Science and Mathematics Series, pages 129-138, ISBN 80-7078-905-0, vol. 1, 2001

[27] Praks, P., *Numerical Aspects of Simulation Based Reliability Assessment of Systems*, COLLOQUIUM Euro-SiBRAM'2002, Prague, June 24 to 26, 2002; http://www.sbra-anthill.com/sibram02/, ISBN 80-86246-17-5 (CD-ROM)

[28] *The home page of CALFEM.* Division of Structural Mechanics and Division of Solid Mechanics Lund University, Sweden; http://www.byggmek.lth.se/Calfem/

[29] Fishman G. S.: *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*; Volume 1 of Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 1996

[30] Virius M.: *Aplikace matematické statistiky: metoda Monte Carlo.* ČVUT Praha, (1998)

[31] Stein M.: *Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling.* Technometrics, Vol. 29, No. 2, May 1987, 143-151

[32] Briš R., Litschmannová M.: *Simulation Approach in Reliability Analysis of Maintained Systems*; Proceedings of the European Conference on Safety and Reliability - ESREL2000, Edinburgh, Scotland UK,14-17 May 2000. Published by A.A.Balkema 2000, Vol.2, Rotterdam, ISBN 9058091406

[33] Praks P., Briš R.: *Analýza spolehlivosti paralelního systému metodou SBRA užitím Importance Sampling a přímé metody Monte Carlo.* Sborník Spolehlivost

konstrukcí: Metodika - aplikace - poruchy - havárie, Ostrava, 24. 3.2004. Dům techniky Ostrava, pg. 129-132, ISBN 80-248-0573-1

[34] Fabian F., Kluiber Z.: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění.* PROSPEKTRUM spol.s.r.o, Praha, 1998

[35] Nellian S.: *Integration of Taguchi design of experiments and finite element method for robust design.* http://www.ecs.umass.edu/mie/labs/mda/fea/sankar/layout.html

[36] *Taguchi's Approach to Quality Engineering.* http://www.cnde.iastate.edu/staff/bforoura/HTML/taguchi.html

[37] Václavek L., Marek P.: *Reliability Assessment of an Unbraced Frame with Leaning Columns.* In International Colloquium Euro-SiBRAM 2002. Praha : Institut of Theoretical and Applied Mechanics, 2002. pg. 10.

[38] *Praks P.: Computer Simulations of Functions with Random Parameters using Direct Monte Carlo and Importance Sampling.* Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Computer Science and Mathematics Series, No. 2/2003, Vol. II. pg. 91-98, ISBN 80-248-0455-7

[39] Praks, P., Briš, R.: *Přesnost výpočtu pravděpodobnostního posudku spolehlivosti metodou Monte Carlo.* In VI. Konference Spolehlivost konstrukcí. 6.4.2005, Dům techniky Ostrava. Ed. P. Marek, Ostrava: Dům techniky Ostrava, s.r.o., 2005, pg. 95-98, ISBN 80-02-01708-0

[40] Praks, P., Václavek L., Briš, R.: *Systém Switch-Earth pro efektivní modelování zemětřesení v prostředí SBRA-Importance Sampling.* In Mezinárodní konference Modelování v mechanice 2005, Ostrava:VŠB-TU Ostrava, 2005, pg. 203-210, ISBN 80-248-0776-9

[41] Mynarz M., Konečný P., Praks P.: *A comparison of methods for probabilistic reliability assessment of a beam by SBRA method.* (Porovnání metod pro pravděpodobnostní posudek nosníku metodou SBRA. In Czech). In Procee-

dings of ,,Modelování v mechanice 2004“. FAST VŠB – TU Ostrava, January 28, 2004. VŠB – TU Ostrava, pg. 140-147, ISBN 80-248-0546-4

[42] Praks P., Brožovský J.: *Reliability analysis of a simple frame by the SBRA method using direct Monte Carlo and Importance Sampling in the AFEM software.* (Posudek spolehlivosti kloubové prutové konstrukce metodou SBRA užitím přímé metody Monte Carlo a metody Importance sampling v MKP prostředí AFEM. In Czech); In Sborník IV. ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí: Téma: Posudek - poruchy – havárie, 23. - 24.4.2003. Dům techniky Ostrava, Ed. Pavel Marek, pg. 51-54, ISBN 80-02-01551-7

[43] Praks P., Konečný P.: *The load effect combination by the SBRA method using direct Monte Carlo and Importance Sampling.* (Kombinace účinků zatížení metodou SBRA s využitím přímé metody Monte Carlo a importance sampling. In Czech) In Sborník IV. ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí: Téma: Posudek - poruchy – havárie, 23. - 24.4.2003. Dům techniky Ostrava, Ed. Pavel Marek, pg. 35-38, ISBN 80-02-01551-7

5 Přehled aktivit a výsledků

5.1 Spolupráce na grantových projektech

- “Modelování a kvantifikace spolehlivosti dynamických systémů“, AV ČR T401940412 (program ,,Informační společnost“, dílčí program: ,,Počítačové modelování a návrh systémů a procesů“, 2004-2007).
- “Nový jaderný zdroj pro energetiku ČR”. VaV FT-TA/067. MPO ČR 2005.
- “Výzkum spolehlivosti energetických soustav v souvislosti s ekologií netradičních zdrojů a oceněním nedodané energie. MSM:6198910007. Od 2005.
- “Risk and cost limited optimatization of the maintenance based on semi-analytic stochastic modeling”. SI/CZ projekt ”Kontakt”, Jozef Stefan Institute Ljubljana, VŠB-TU Ostrava (Čepin/Briš), 2005-2006.
- “Vývoj algoritmů pro řešení složitých průmyslových problémů”. CEZ J17/98: 272400019
- “Aplikace nové generace pravděpodobnostních metod pro posuzování bezpečnosti, provozuschopnosti a trvanlivosti konstrukcí”. GA ČR č. 103/01/1410
- “Extrémně rozsáhlé výpočty (supercomputing) a tvarová optimalizace v geomechanice“ GA ČR 105/99/1229
- “Rozvoj a aplikace pravděpodobnostních metod využívajících simulační techniku pro posuzování spolehlivosti a funkčnosti konstrukcí a stavebních součástí“. GA ČR 103/04/1451
- “Inteligentní analýza obsahu a struktury WWW”. GA ČR 201/03/1318

5.2 Seznam publikací

Kapitola v knize

- Praks P., Konečný P.: *Direct Monte Carlo Method vs. improved methods considering applications in designers every day work.* Chapter 23 in book: Marek

P., Brozzetti J. & Guštar M. (Eds.): *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Basics, Exercises, Software (Sec. edition).* Institute of Theoretical and Applied Mechanics - Academy of Sciences of the Czech Republic, 2003 (10 pages, CD-ROM), ISBN: 80-86246-19-1

- Praks P., Machala L., Snásel V.: *On SVD-free Latent Semantic Indexing for iris recognition of large databases.* In V. A. Petrushin and L. Khan (Eds.) Multimedia Data mining and Knowledge Discovery (Part V, Chapter 26). Springer Verlag. To appear (2006); [*invited contribution*]

Publikace v recenzovaných časopisech

- Praks P.: *Computer Simulations of Functions with Random Parameters using Direct Monte Carlo and Importance Sampling.* Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Computer Science and Mathematics Series, No. 2/2003, Vol. II. Referee: Prof. Ing. Pavel Marek, PhD., DrSc. VŠB – Technical University of Ostrava, pg. 91-98, ISBN 80-248-0455-7

- Praks P.: *Conjugate gradient methods for linear systems with multiple right hand sides.* In Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava, Computer Science and Mathematics Series, 1/2001, Vol. I, pg. 129-138, Referee: Prof. RNDr. Zdeněk Dostál, CSc. VŠB – Technical University of Ostrava, ISBN 80-7078-905-0

- Briš R., Praks P.: *Simulation Approach for Modeling of Dynamic Reliability using Time Dependent Acyclic Graph.* Special Issue of the International Journal of Polish Academy of Sciences "Maintenance and Reliability" Nr 2(30)/2006. Warsaw. Ed. Ilia B. Frenkel. ISSN 1507-2711. In print.

Přehled publikací z konferencí a workshopů

- Praks P., Kučera R.: *Case Study of a Domain Decomposition Method for Efficient Structural Analysis.* 16th Summer School Software and Algorithms of Numerical Mathematics (SANM'05), organized by I. Marek and University of West Bohemia, Srní, September 8-12, 2003. Submitted.

- Praks P., Brožovský J.: *A test case for probabilistic reliability assessment using simulation techniques and FEM.* Proceedings of the 6th International PhD Workshop on Systems and Control Young Generation Viewpoint. Oct 4-8, 2005 Izola, Slovenia. Ljubljana: Jozef Stefan Institute, 2005. Edited by D. Tinta and U. Benko, pg. 1-4. ISBN: 961-6303-74-0

- Briš R., Praks P.; *Special Case of Dynamic Reliability Analysis Based on Time Dependent Acyclic Graph.* The International Symposium on Stochastic Models in Reliability, Safety, Security and Logistics, Feb 15-17, 2005, Beer Sheva, Israel, I. Frenkel (ed.) et al., pg. 69-70; ISBN 9984-668-79-7. Invited paper.

- Briš R., Praks, P.: *Reliability assessment of a parallel system with six reliable components using direct Monte Carlo and Importance Sampling.* In 6-th Int. Sci. Conf. Electric Power Engineering 2005.VŠB-TU Ostrava, pg. 1-7, ISBN 80-248-0842-0

- Praks P., Kučera R., Brožovský J.: *Stable Block Conjugate Gradient Algorithm for FETI-based Domain Decomposition Method and Probabilistic Reliability Assessment of Structures.* International Sci. Conf. held on the occasion of the 55^{th} anniversary of founding the Faculty of Mechanical Engineering Ostrava. Section no. 9: Computational and Experimental Analysis of Strength. Ed. K. Frydrýšek Sep. 7-9, 2005; pg. 1-21 (CD-ROM); ISBN 80-248-0896-X

- Praks P.: *Reliability Analysis and Information Retrieval using Iterative Solvers.* In proc. of PhD. Workshop Wofex 2005, pg. 452-457, VŠB-TU Ostrava, September 21-22 2005, ISBN 80-248-0866-8

- Praks P.: *Experiences with Large-Scale Probabilistic Reliability Assessment and Information Retrieval.* 6th International PhD Workshop on Systems and Control a Young Generation Viewpoint. Jozef Stefan Institute, Oct 4-8, 2005 IZOLA, Slovenia. Pg. 80-80.
  Also at http://www-e2.ijs.si/PhDWorkshop/2005/abstracts-WEB/abstract_-Praks-Pavel.pdf

- Praks, P., Briš, R.: *Přesnost výpočtu pravděpodobnostního posudku spolehlivosti*

metodou Monte Carlo. In VI. Konference Spolehlivost konstrukcí. 6.4.2005, Dům techniky Ostrava. Ed. P. Marek, Ostrava: Dům techniky Ostrava, s.r.o., 2005, pg. 95-98, ISBN 80-02-01708-0

- Praks, P., Václavek L., Briš, R.: *Systém Switch-Earth pro efektivní modelování zemětřesení v prostředí SBRA-Importance Sampling.* In Mezinárodní konference Modelování v mechanice 2005, Ostrava:VŠB-TU Ostrava, 2005, pg. 203-210, ISBN 80-248-0776-9

- Praks P.: *Intelligent information retrieval for future GIS.* International conference GIS Visions 2025, Ed. J. Růžička, Sep. 19. - 20. 2005, VŠB-TU Ostrava; http://gis.vsb.cz/gisvisions/2025/abstracts/praks.html http://server3.streaming.cesnet.cz/others/vsbtuo/GISvisions2025/praks.wmv

- Praks P.: *O vztahu mezi směrodatnou odchylkou a singulárními čísly SVD rozkladu.* Sborník Posezení s aplikovanou matematikou aneb na vlnkách diskrétních transformací s paní doc. Ing. Ninou Častovou CSc.; Ústav geoniky AV ČR Ostrava, 27. září 2005. Ed. M. Sameš. Vydala Katedra aplikované matematiky VŠB - TU Ostrava; pg. 71-76.

- Labský M., Praks, P., Svátek V., Šváb O.: *Multimedia information extraction from HTML product catalogues.* DATESO 2005. Ed. K. Richta, V. Snášel, J. Pokorný; pg. 84-93, ISBN 80-01-03204-3, ISSN 1613-0073. Also at http://ceur-ws.org/Vol-129/paper10.pdf

- Svátek V., Labský M., Praks, P., Šváb O.: *Information extraction from HTML product catalogues: coupling quantitative and knowledge-based approaches.* In Dagstuhl Seminar on Machine Learning for the Semantic Web. Ed. N. Kushmerick, F. Ciravegna, A. Doan, C. Knoblock and S. Staab, Wadern,Germany, Feb. 13–18 2005, pg. 1-5. Also at

  http://www.smi.ucd.ie/Dagstuhl-MLSW/proceedings/labsky-svatek-praks-svab.pdf

- Labský M., Svátek V., Šváb O., Praks P., Krátký M. and Snášel V.: *Information Extraction from HTML Product Catalogues: from Source Code and*

Images to RDF. The 2005 IEEE /WIC/ACM International Conference on Web Intelligence; Campiegne Univ. of Technology, France, Sep. 19-22 2005; pp. 401-404, ISBN 0-7695-2415-X. IEEE Computer Society Washington, DC, USA; Also at http://rainbow.vse.cz/wi05fi.pdf

- Labsky M., Vacura M., Praks P.: *Web Image Classification for Information Extraction.* First International Workshop on Representation and Analysis of Web Space (RAWS-05), Prague, Sep. 15-16, 2005; pg. 55-62; ISBN 80-248-0864-1; Also at http://rainbow.vse.cz/raws05img.pdf

- Dvořák P., Střižík M., Praks P., Pudil P., Šumpíková M., Lešetický O.: *The feasibility of using special quantitative methods for prediction of currency crises.* International Scientific Conference European Finance – Theory, Politics And Practice; Section C: Information Technology and Quantitative Methods in Finance. Matej Bel University, Banska Bystrica, Slovakia, September 8 – 9, 2004. ISBN 80-8055-968-6 (CD-ROM, 26 pages)

- Praks P., Machala L., Snášel V.: *Iris Recognition Using the SVD-Free Latent Semantic Indexing.* MDM/KDD2004 - Fifth International Workshop on Multimedia Data Mining "Mining Integrated Media and Complex Data" in conjunction with KDD'2004 - The 10^{th} ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining; Section 2. Multimedia Data Mining: Techniques and Applications, August 22, 2004, Seattle, WA, USA.

- Praks P., Briš R.: *Reliability analysis of a parallel system by the SBRA Method using Importance Sampling and Direct Monte Carlo.* (Analýza spolehlivosti paralelního systému metodou SBRA užitím Importance Sampling a přímé metody Monte Carlo. In Czech). In Proceedings of the Structural Reliability conference Ostrava ("Spolehlivost konstrukcí: Metodika - aplikace - poruchy - havárie"), Ostrava, March 24, 2004. Dům techniky Ostrava, pg. 129-132, ISBN 80-248-0573-1

- Machala L., Praks P., Snášel V.: *Two Methods for Iris Recognition Using Mutual Information.* In Proceedings of Znalosti 2004 (Knowledge 2004), Hotel

SANTON, Brno, Czech Republic, February 25–27, 2004. VŠB – Technical University of Ostrava, pg. 285-296, ISBN 80-248-0456-5

- Mynarz M., Konečný P., Praks P.: *A comparison of methods for probabilistic reliability assessment of a beam by SBRA method.* (Porovnání metod pro pravděpodobnostní posudek nosníku metodou SBRA. In Czech). In Proceedings of ,,Modelování v mechanice 2004“. FAST VŠB – TU Ostrava, January 28, 2004. VŠB – TU Ostrava, pg. 140-147, ISBN 80-248-0546-4

- R. Briš, P. Praks: *Reliability analysis of a parallel system using direct Monte Carlo and importance sampling by SBRA.* In: Book of abstracts of MMS 04, Ostrava February 9-10, 2004, Institute of Geonics, Czech Academy of Sciences, http://www.ugn.cas.cz/data/semin04/ .

- Praks, P.: *Sensitivity analysis using iterative solvers.* In Sborník workshopu WOFEX 2004. Ed. Václav Snášel, Ostrava:FEI VŠB-TU Ostrava, 2004, pg. 358-363, ISBN 80-248-0596-0

- Střižík M., Praks P., Dvořák P.: *Economies Reliability Assessment Based on Macroeconomic Data Analysis by the Latent Semantic Indexing Method.* In: Book of abstracts of MMS 04, Institute of Geonics, Czech Academy of Sciences, Ostrava February 9-10, 2004.

- Praks P., Dvorský J., Snášel V.: *Latent Semantic Indexing for Image Retrieval Systems.* SIAM Conference on Applied Linear Algebra, July 15-19, 2003, The College of William and Mary, Williamsburg, U.S.A. SIAM; http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings/Dvorsky.pdf

- Praks P., Dvorský J., Snášel V., Černohorský J.: *On SVD-free Latent Semantic Indexing for Image Retrieval for application in a hard industrial environment.* IEEE International Conference on Industrial Technology – ICIT 2003; Session RS4_3: Industrial Applications. Hotel Habakuk, Maribor, Slovenia, December 10-12, 2003. IEEE, pg. 466-471, ISBN 0-7803-7853-9 (CD-ROM)

- Praks P., Brožovský J.: *Reliability analysis of a simple frame by the SBRA method using direct Monte Carlo and Importance Sampling in the AFEM* *software.* (Posudek spolehlivosti kloubové prutové konstrukce metodou SBRA užitím přímé metody Monte Carlo a metody Importance sampling v MKP prostředí AFEM. In Czech); In Sborník IV. ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí: Téma: Posudek - poruchy - havárie, 23. - 24.4.2003. Dům techniky Ostrava, Ed. P. Marek, 51-54, ISBN 80-02-01551-7

- Praks P., Konečný P.: *The load effect combination by the SBRA method using direct Monte Carlo and Importance Sampling.* (Kombinace účinků zatížení metodou SBRA s využitím přímé metody Monte Carlo a importance sampling. In Czech) In Sborník IV. ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí: Téma: Posudek - poruchy - havárie, 23. - 24.4.2003. Dům techniky Ostrava, Ed. Pavel Marek, pg. 35-38, ISBN 80-02-01551-7

- Praks, P.: *Reliability analysis by the Importance Sampling simulation technique.* (Analýza spolehlivosti simulační metodou Importance Sampling. In Czech) In Modelování v mechanice 2003, FAST VŠB-TU Ostrava, Katedra stavební mechaniky, 29.1.2003, VŠB-TU Ostrava, Ed. Jiří Brožovský, Ivan Kološ, pg. 118-123, ISBN 80-248-0253-8

- Střižík M., Praks P., Berger P., Černý A., Engst P., Keder J., and Černý E.: *Error estimation of the LIDAR determination of O_3 based on simultaneous measurements.* In Proceedings of Modern Methods in Mathematics, Dolní Lomná, Czech Republic, June 2 - 4, 2003. VŠB - TU Ostrava, pg. 180-184, ISBN 80-248-0480-8

- Praks P.: *Numerical Aspects of Simulation Based Reliability Assessment of Systems*, In *International Colloquium Euro-SiBRAM'2002.* Volume II. ITAM - Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Ed. P. Marek, A. Haldar, M. Guštar, P. Tikalsky, Praha 24. - 26. 6. 2002, ISBN 80-86246-17-5 (CD-ROM), http://www.sbra-anthill.com/sibram02/5-Ses/Praks.htm

- Praks, P., Konečný P.: *APROBASIS - Automated PROBabilistic Assessment using Importance Sampling.* IMAMM 03 (Industrial Mathematics and Mathematical Modelling, June 30 - July 4, 2003, Rožnov pod Radhoštem); VŠB -

Technical University Ostrava, Institute of Geonics ASCR, Ostrava, University of West Bohemia, Pilsen, Charles University Prague, Mathematical Institute ASCR, Prague (Poster)

- Praks, P.: *Analýza spolehlivosti simulační metodou Importance Sampling*, Modelování v mechanice 2003, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2003. Ed. Jiří Brožovský, Ivan Kološ, 118-123, ISBN 80-248-0253-8

- Praks P., Pustka D.: *Analýza spolehlivosti staticky neurčitého ocelového rámu metodou Stratified Sampling.* In Sborník VII. vědecké konference s mezinárodní účastí, Stavební fakulta, Technická univerzita v Košicích; Košice 22.-24. 5. 2002, Košice: Stavební fakulta, Technická univerzita v Košicích, 2002, 246-249, ISBN 80-7099-815-6

- Praks, P.: *Metoda Stratified Sampling pro efektivní určení spolehlivosti stavebních konstrukcí.* III ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí, Ed. Pavel Marek: Dům techniky Ostrava, 2002, 75-80, ISBN 80-0201489-8

- Dostál, Z., Praks, P.: *Numerické aspekty aplikace SBRA na systémy.* In Sborník spolehlivosti konstrukcí. Ed. Pavel Marek, Dům techniky Ostrava, 2001, 39-42, ISBN 80-02-01410-3

- Praks, P.: *Iterační řešení perturbovaných soustav lineárních rovnic.* In Sborník z 10. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2001, vol. 10, 204-207, ISBN 80-248-0013-6

- Kučera, R., Praks P.: *Waveletová transformace a řešení soustav lineárních rovnic.* In Sborník ze 7. semináre Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1998, vol. 6, 135-140, ISBN 80-7078-622-1

Ocenění

- Děkan FEI VŠB - TU Ostrava, Prof. Ing. Ivo Vondrák, CSc., udělil P. Praksovi dne 24. 9. 2003 "Ocenění za výsledky dosažené v doktorandském studiu". (Workshop doktorandů Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB-TU Ostrava)

Mezinárodní spolupráce

- **Jozef Stefan Institute, Reactor Engineering Division, Ljubljana, Slovinsko**; hrazeno projektem "KONTAKT" Risk and cost limited optimization of the maintenance based on semi-analytic stochastic modeling (Briš/Čepin), termín: 3.10. – 13.10.2005

- **Tampere University of Technology, Pori, Finsko**; Výměna lektorů, téma: "Information Retrieval using Latent Semantic Indexing and practical applications". Hrazeno programem EU Socrates/Erasmus, termín: 14.6. – 9.7. 2004

- Na základě pozvání prof. Roberta Beauwense návštěva **Université Libre de Bruxelles,** pracoviště **Service de Métrologie Nucléaire, Brusel, Belgie**. Přednáška na téma: ,,Numerické aspekty pravděpodobnostního posudku spolehlivosti stavebních konstrukcí"; studium simulačních metod s důrazem na techniky redukce rozptylu (konzultace s Pierre-Etienne Labeau). Hrazeno z grantu AV ČR katedry aplikované matematiky FEI VŠB-TU, termín: 2.12.-10.12.2001

- **Université de Montreál, Montreal, Kanada**. NATO/Advanced Study Institutes: Letní škola průmyslové matematiky na téma: Moderní metody vědeckého počítání a jejich aplikace. Pobyt hrazen grantem NATO (Severoatlantická aliance, Brusel), termín: 9.-20.6.2001

- Na základě nabídky prof. Ing. Iva Vondráka, CSc. (kat.informatiky FEI VŠB-TU) pobyt na **Montanuniversitat Leoben, Rakousko** (1999, 6 měsíců), pobyt na katedře matematiky za účelem psaní diplomové práce (sekvenční a paralelní programová implementace algoritmů pro efektivní řešení rozsáhlých úloh v mechanice: řešení soustav lineárních rovnic s více pravými stranami), složení zkoušky z kurzu němčiny pro cizince; Pobyt hrazen grantem EU (Socrates-Erasmus, Brusel).

Členství

- Česká matematická společnost, Česká fyzikální společnost Jednoty českých matematiků a fyziků; http://cms.jcmf.cz
- Člen skupiny zabývající se výzkumem spolehlivosti na Katedře aplikované matematiky, FEI VŠB - TU Ostrava (od r. 2003). Vedoucí: Doc. Ing. Radim Briš, CSc.; http://www.am.vsb.cz/bris/
- SBRA Team (Simulation Based Reliability Assessment) při ÚTAM AV ČR Praha a FAST VŠB-TU Ostrava (od r. 2002). Vedoucí: Prof. Ing. Pavel Marek, DrSc.; http://www.itam.cas.cz/sbra/
- Amphora Research Group při katedře informatiky, FEI VŠB - TU Ostrava (od r. 2002). Vedoucí: doc. RNDr. Václav Snášel, CSc.; http://www.cs.vsb.cz/arg/

5.3 Organizační aktivity

- Scientific Committee GIS Ostrava 2006 (International Symposium). Oblast: Information Retrieval, http://gis.vsb.cz
- Local Organization Commitee konference IMAMM ,03 - Industrial Mathematics and Mathematical Modelling, http://imamm.am.vsb.cz/
- Člen Organizačního výboru semináře Matematické modelování spolehlivosti s aplikacemi v inženýrství MMS 2004, Ústav geoniky AV ČR, Ostrava, http://www.ugn.cas.cz/data/semin04/

5.4 Konzultační činnost – transformace a statistická analýza dat

- *Mgr. Michal Střižík, PhD.* , Přír. fakulta UK v Praze; konzultace disertační práce ,,Laserová optoakustická detekce a diferenční absorpční LIDAR, šíření znečištění v ovzduší.“ (Možná prevalidace metod dálkové detekce znečištení ovzduší.) 2002 – 2003

- *Jan Nieslanik*, Institut geoinformatiky, VŠB – TU Ostrava, konzultace bakalářské práce ,,Citlivostní analýza vybraných vstupů modelu AEOLIUS (Assesing the Environment Of Locations In the Urban Streets)“, 2002
- *Ing. Libuše Knápková*, Institut environmentálního inženýrství, HGF, VŠB – TU Ostrava, konzultace diplomové práce ,,Hodnocení dřevinných druhů pro antropogenní půdy“, 2001
- *Ing. Denisa Žůrková*, Institut environmentálního inženýrství, HGF, VŠB – TU Ostrava, konzultace diplomové práce (statistická analýza dat čističek odpadních vod), 2002

5.5 Ostatní aktivity

- Lektor semináře ,,Kamerové systémy“ pro Siemens-Automotive Frenštát p.R. Téma: Hledání skrytých podobností v kolekcích obrázků metodami numerické lineární algebry. Katedra měřící a řídicí techniky, FEI VŠB-TU Ostrava, 5. 5. 2005
- Reviewer - IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2005, Dubrovnik, Chorvatsko
- Reviewer - The 12th International Power Electronics and Motion Control Conference EPE-PEMC 2006, Portoroz, Slovenia
- P. Praks je autorem vítězného návrhu znaku Fakulty elektrotechniky a informatiky – FEI VŠB-TU; http://fei.vsb.cz/ (2000-2001)
- P. Praks je autorem vítězného návrhu znaku RCCV (Regionální centrum technického celoživotního vzdělávání při VŠB-TU); http://rccv.vsb.cz/ (2003)
- P. Praks se aktivně účastnil třinácti výstav počítačových grafik. Z toho dvě výstavy proběhly v zahraničí: Zonguldak, Turecko (2003), Univerzita Montreal, Kanada (2001).

5.6 Seznam citací

Publikace Praks, P., Dvorský, J., Snášel, V.: *Latent semantic indexing for image retrieval systems. In: Proceedings of the SIAM Conference on Applied Linear Algebra (LA03), Williamsburg, USA, The College of William and Mary (2003)* je citována v následujících publikacích:

- Kosinov S., Marchand-Maillet S.: *Overview of Approaches to Semantic Augmentation of Multimedia Databases for Efficient Access and Content Retrieval.* Nurnberger and M. Detyniecki (Eds.): AMR 2003, LNCS vol. 3094, pp. 19–35, 2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004

- Kosinov S., Marchand-Maillet S.: *Hierarchical Ensemble Learning For Multimedia Categorization And Autoannotation.* In Proceedings of the 2004 IEEE Signal Processing Society Workshop (MLSP 2004), pp. 645–654, Sao Luís, Brazil, 2004.

- Srovnal V., Bernatík R., Horák B., Snášel V.: *Strategy Extraction for Mobile Embedded Control Systems Apply the Multi-Agent Technology.* In ICCS 2004: proceedings of Computational Science, LNCS 3038. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004,BRD. pp. 631–637, ISBN 3-540-22116-6

- Praus P.: *SVD-based principal component analysis of geochemical data.* Central European Journal of Chemistry, 3 (2005) 731-741

- Elghazel H., Idrissi K., Ben Amar C. & Baskurt A.: *Approches textuelles pour la recherche d'images.* In Proceedings of the 2005 IEEE SETIT 2005, Sousse, Tunisia, March 2005

- Horák B., Snášel V.: *Design of Structure and Realisation of Game Rules Database of Robot-Soccer Game.* V. Snášel, J. Pokorny, K. Richta (Eds.): Dateso 2004, pp. 162–170, ISBN 80-248-0457-3.

- Dvorský J., Martinovič, Snášel V.: *Query Expansion and Evolution of Topic in Information Retrieval Systems.* V. Snášel, J. Pokorny, K. Richta (Eds.): Dateso 2004, pp. 117–127, ISBN 80-248-0457-3.

- Skopal, T. Kolovrat, M., Snášel, V.: *Využití LSI a M-stromu při indexování a vyhledávání obrázků.* In sborník - Znalosti 2005. Stará Lesná. Ed. Lubomír Popelínský, Michal Krátký, Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2005, p. 84-95, ISBN 80-248-0755-6

- Húsek D., Pokorný J., Snášel V., Řezanková H.: *Metody vyhledávání v rozsáhlých kolekcích dat.* (in czech) [Methods of Searching in Large Data Sets.] In: Datakon 2003. (Ed.: Popelínský L.) - Brno, Masarykova univerzita 2003, pp. 23-52, ISBN 80-210-3215-4

- Krátký M., Skopal T., Snášel V.: *Efektivní vyhledávání v kolekcích obrázků tváří.* (in czech) In: Proceedings of Datakon 2003. (Ed.: Popelínský L.) - Brno, Masarykova univerzita 2003, ISBN 80-210-3215-4

Publikace

Praks P., Machala L., Snášel V.: *Iris Recognition Using the SVD-Free Latent Semantic Indexing. MDM/KDD2004 - Fifth International Workshop on Multimedia Data Mining. Section 2. Multimedia Data Mining: Techniques and Applications, August 22, 2004, Seattle, WA, USA* je citována následovně:

- L. Khan, V. A. Petrushin: *The 5th International Workshop on Multimedia Data Mining (MDM/KDD2004)* In: ACM Special Interest Group on Knowledge Discovery and Data Mining, December 2004, Volume 6, Issue 2, pg. 144-146

- *Laboratory of image analysis of human eye iris and retina.* Palacky University Olomouc, Czech Republic, http://apfyz.upol.cz/eng/obraz.html

Závěr

V práci byly dosaženy tyto hlavní výsledky:

1. Vytvoření obecného modulárního programového balíku pro automatický pravděpodobnostní posudek spolehlivosti simulačním přístupem, který zahrnuje:

   (a) implementaci přímé metody Monte Carlo a metody Importance Sampling. Vytvoření rozhraní pro histogramy metody SBRA

   (b) vytvoření rozhraní pro MKP balík CALFEM

   (c) vytvoření rozhraní pro rychlé iterační řešiče

   (d) implementaci rychlých iteračních řešičů pro soustavy s více pravými stranami včetně numerické stabilizace

2. Vytvoření rozhraní pro program AntHill(tm)

3. Implementace strategie pro řešení úloh bez apriorní informace o poruše metodou Importance Sampling.

Účinnost výše jmenovaných přístupů byla ověřena na komparačních studiích. Díky vývoji vlastního programového balíku se podařilo v prostředí SBRA metodou Importance Sampling modelovat rám s 26 vstupními náhodnými parametry včetně efektivní detekce velmi řídkých a přesto závažných jevů, jako je vliv zemětřesení a přitom nepotlačit informace o chování konstrukce v případech bez vlivu zemětřesení. Přestože byla výsledná pravděpodobnost poruchy velmi blízká nule (řádově 10^{-6}), pro tento odhad postačovalo jen 40 000 simulací metody Importance Sampling. Výsledky byly navíc verifikovány přímou metodou Monte Carlo a jsou v souladu s výsledky posudku uvedeného v [22].

Dále byl proveden pravděpodobnostní posudek spolehlivosti rámu metodou konečných prvků. Výsledky opět ukázaly vhodnost použití metody Importance Sampling pro modelování řídkých jevů. Pro efektivní řešení vzniklých soustav lineárních rovnic s více pravými stranami bylo navíc s úspěchem využito rychlých iteračních řešičů. Zatímco vyřešení soustavy lineárních rovnic s *jednou* pravou stranou běžnou metodou sdružených gradientů vyžadovalo 205 kroků, algoritmus SCG vyžadoval pro vyřešení soustavy s 1 000 pravých stran jen 595 kroků. Výsledky práce našly navíc uplatnění v oblasti vyhledávání informací iteračními řešiči (information retrieval).

Dosažené výsledky byly během doktorandského studia publikovány formou autorství nebo spoluatorství v 39 publikacích, mj. v předních nakladatelstvích (jmenujme např. SIAM, Springer Verlag a IEEE Press). Součástí publikační činnosti tvoří také spoluautorství dvou kapitol v knize. První knihu [22] vydal v roce 2003 ITAM AV ČR. Druhá kapitola v knize (vydavatel: Springer Verlag) byla v srpnu 2005 akceptována editorem knihy V.A.Petrushinem (Accenture Technology Labs, Accenture, Chicago, USA). Tato kapitola v knize se zabývá aplikací metod numerické linearní algebry pro automatickou biometrickou identifikaci osob a rozsáhlými numerickými experimenty (algoritmus byl testován na téměř 500 MB reálných biometrických dat). V současné době je připravovaná kniha v tisku. Některé výše zmiňované publikace jsou citovány v předních publikacích (vydaných mj. v nakladatelství Springer Verlag, IEEE Press a ACM).

Výzkum byl podporován grantovými projekty (AV ČR, MŠMT, MPO, GA ČR, EU a NATO/ASI).

Conclusion

The following main results of the work were achieved:

1. The creation of a general modular software toolbox for automatic probabilistic reliability assessment by the simulation approach, which includes:
   (a) the implementation of direct Monte Carlo method and Importance Sampling method. The creation of an interface for histograms of the SBRA method
   (b) the creation of an interface for the FEM package CALFEM
   (c) the creation of an interface for fast iterative solvers
   (d) the implementation of fast iterative solvers for systems with multiple right hand sides including numerical stabilization
2. the creation of an interface for the software AntHill(tm)
3. the implementation of a strategy for solving of tasks without prior failure information by Importance Sampling method.

The effectiveness of the above mentioned approaches was verified on comparative studies. It was possible to model the frame with 26 input random variables by the SBRA method with Importance Sampling including an effective detection of rare but important events, such as earthquake effects. Moreover, the presented approach allows to simulate the behaviour of the frame also with cases without earthquake effects as well. Although the resulting failure probability was very close to zero ($p_f \approx 10^{-6}$), only 40 000 simulation steps of Importance Sampling method were needed for the probabilistic reliability assessment. These results were in addition verified by direct Monte Carlo method and are in agreement with results introduced in [22].

Next, it was computed the probabilistic reliability assessment of a frame by the finite element method. The results again indicated feasibility of using Importance Sampling method for modeling of rare but important events. Further, fast iterative solvers were successfully used for arisen systems of linear equations with multiple right hand sides. The solution of *one* linear system by the classical PCG algorithm required 205 matrix-vector operations. To solve all 1 000 linear systems of equations, only 446 matrix-vector operations were needed when the SCG algorithm was applied. In addition, the results of the work were also successfully used for the content-based information retrieval by iterative solvers.

The achieved results were published during PhD. study by the form of authorship and co-authorship of 39 contributions published among others by the leading publishers, such as SIAM, Springer Verlag and IEEE Press. A part of publications involves also the co-authorship of two book chapters. The first book was published in 2003 by the ITAM - Academy of Sciences of Czech Republic [22]. The second book chapter (published by Springer Verlag) was accepted in August 2005 by the editor V.A.Petrushin (Accenture Technology Labs, Accenture, Chicago, USA). This book chapter deals with an application of numerical linear algebra for automated biometrical identification of persons and large-scale numerical experiments. (The algorithm was tested on almost of 500 MB real biometric data.) Actually, the prepared book is in print. Some of publications mentioned above are cited in the leading contributions, which were published for instance by Springer Verlag, IEEE Press and ACM.

The research leading to this contribution have been partially supported by the grant projects of the Academy of Sciences of Czech Republic, Czech government, Czech Science Foundation, EU and NATO/ASI.