

VŠB-Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

APROXIMACE A NUMERICKÁ REALIZACE  
KONTAKTNÍCH PROBLÉMŮ SE TŘENÍM  
A KOEFICIENTEM TŘENÍ ZÁVISLÝM NA ŘEŠENÍ

**Ing. Oldřich Vlach**

Obor: Informatika a aplikovaná matematika  
Školitel: Prof. RNDr. Jaroslav Haslinger, DrSc.

Ostrava, 2005

## Anotace

Práce se zabývá numerickým řešením kontaktních problémů pružných těles spočívajících na tuhém podloží. Na kontaktu jsou uvažovány dva modely tření a sice tření s danou mezí skluzu a Coulombův model tření. Oba modely se zabývají případem, kdy koeficient tření  $\mathcal{F}$  závisí na řešení a vedou na *implicitní* variační nerovnice eliptického typu pro formulaci úlohy v posunutích, nebo na *kvazivariační* nerovnice v případě formulace v kontaktních napětích. V práci se omezíme pouze na *stacionární* úlohy.

Tato problematika byla již dříve zkoumána v [6], kde autoři pomocí penalty odstranili jednostranná omezení a regularizovali nehladký třecí člen. Tento přístup se však příliš nehodí pro numerické výpočty. Z tohoto důvodu používáme metodu popsanou v [18], kdy je řešení definováno jako *pevný bod* jistého zobrazení. Pro nalezení pevného bodu použijeme metodu postupných aproximací. V každé iteraci je řešena úloha s daným třením a koeficientem tření nezávislým na řešení. Prvním z cílů této práce bylo rozšířit teoretické výsledky z [18] na případ, kdy koeficient tření  $\mathcal{F}$  závisí na řešení. Druhým a hlavním cílem bylo prověřit vhodnost tohoto přístupu pro numerickou realizaci na počítači.

První část práce se zabývá úlohami ve 2D, druhá úlohami ve 3D. V obou částech je nejdříve definována spojitá úloha se třením jako problém nalezení pevného bodu jistého zobrazení. Následuje definice diskrétní úlohy a analýza spojitě úlohy s daným třením, respektive analýza diskrétní úlohy s Coulombovým třením. Pro oba případy dokážeme existenci alespoň jednoho řešení, pokud koeficient tření je daný libovolnou spojitou a nezápornou funkcí  $\mathcal{F}$ . Jednoznačnost řešení spojitě úlohy s daným třením dokážeme pro koeficient  $\mathcal{F}$  daný Lipschitzovskou funkcí, s dostatečně malou konstantou Lipschitzovskosti. Za předpokladu, že  $\mathcal{F}$  je navíc dostatečně malý, dokážeme jednoznačnost řešení diskrétní úlohy s Coulombovým třením. Nakonec popíšeme postup, jak úlohy realizovat na počítači a uvedeme několik příkladů.

# Abstract

Contact mechanics analyzes the behavior of loaded deformable bodies, which are in mutual contact or in contact with rigid obstacles, if there are any in the system. Besides unilateral conditions that describe the non-penetration and continuity of contact tractions, the influence of friction on contacting parts is taken into account. To describe the friction we use models with *given* and *Coulomb's* friction. The coefficient of friction  $\mathcal{F}$  is usually supposed to be dependent only on surface properties of used materials, i.e.  $\mathcal{F}$  is a function of the space variable. However from experiments we know that  $\mathcal{F}$  may depend on the tangential velocity of deformations, i.e. on the solution itself. Just the assumption that  $\mathcal{F}$  depends on the solution makes this work different from other ones. In this work we will restrict ourselves only to *stationary* contact problems of one elastic body which is supported by a rigid foundation.

Both models of friction lead to an *implicit* variational inequality of elliptic type for displacements or to a *quasivariational* inequality for stresses. The first existence result has been done in [18], where the authors used a *fixed point* approach. It was shown that there exists at least one solution for a sufficiently small coefficient of friction which does not depend on the solution. Another approach based on a simultaneous penalization of unilateral constraints and a regularization of the friction term has been used in [6]. Although this method is powerful from the theoretical point of view it is not very convenient for computations. Therefore the former (fixed point) approach is nowadays widely accepted for numerical realization. For finding fixed points the *method of successive approximations* will be used. Each iterative step leads to a contact problem with given friction and  $\mathcal{F}$  independent of the solution. This auxiliary problem in terms of displacements leads after a discretization to a minimization problem for a non-smooth function and linear inequality constraints. To avoid difficulties with non-differentiability of the minimized function, we use the dual formulation as suggested in [18]. After this we obtain a smooth quadratic programming problem with simple (box) constraints in 2D and with separable quadratic constraints in 3D.

We will prove the existence of at least one solution for a continuous setting of the problem with given friction and for a discrete problem with Coulomb's friction, provided that the coefficient of friction  $\mathcal{F}$  is given by a continuous, nonnegative function.

# Obsah

Anotace	1
Abstract	2
Obsah	3
Úvod	5
<b>I 2D úlohy</b>	<b>7</b>
1 Formulace 2D kontaktních úloh se třením	7
2 Diskretizace 2D úloh	12
2.1 Diskretizace úlohy s daným třením . . . . .	12
2.2 Diskretizace úlohy s Coulombovým třením . . . . .	13
3 Analýza 2D úloh s daným třením	14
4 Analýza 2D úloh s Coulombovým třením	20
5 Numerická realizace 2D úloh	26
5.1 Minimizace kvadratické funkce s jednoduchými lineárními omezeními . . . . .	31
6 Modelové 2D úlohy	35
6.1 Modelové 2D úlohy s Coulombovým třením . . . . .	37
6.2 2D úloha s nejednoznačným řešením . . . . .	42
<b>II 3D úlohy</b>	<b>49</b>
7 Formulace 3D kontaktních úloh se třením	49

<b>8</b>	<b>Diskretizace 3D úloh s Coulombovým třením</b>	<b>52</b>
<b>9</b>	<b>Numerická realizace 3D úloh</b>	<b>53</b>
9.1	Minimizace kvadratické funkce s jednoduchými lineárními a separovanými kvadratickými omezeními . . . . .	58
9.1.1	Minimizace kvadratické funkce se separovanými kvadratickými omezeními . . . . .	59
<b>10</b>	<b>Modelové 3D úlohy s Coulombovým třením</b>	<b>65</b>
	<b>Závěr</b>	<b>71</b>
	<b>Reference</b>	<b>72</b>

# Úvod

V posledních letech se společně s Prof. J. Haslingerem z MFF UK zabýváme studiem kontaktních úloh. Kontaktní mechanika, do které tyto úlohy spadají, zkoumá chování systému deformovatelných těles, které jsou zatíženy silami a před, nebo v průběhu deformace se mohou ocitnout ve vzájemném kontaktu, či v kontaktu s tuhými překážkami, pokud v systému takové jsou. Kromě jednostranných podmínek, popisujících nepronikání těles a zákon akce a reakce, je třeba vzít do úvahy také tření, ke kterému obvykle na kontaktu dochází. K tomuto účelu slouží celá řada modelů tření, z nichž se omezíme pouze na modely s *daným* a *Coulombovým* třením. O koeficientu tření  $\mathcal{F}$  se obvykle předpokládá, že závisí pouze na povrchových vlastnostech materiálů, tedy na prostorových souřadnicích. Z experimentů však je známo, že  $\mathcal{F}$  může záviset také na tečné složce rychlosti posunutí, tj. na řešení, což bere u obou modelů tření v úvahu. Právě skutečností, že  $\mathcal{F}$  závisí na řešení se tato práce liší od současných poznatků v pevněbodovém přístupu. V práci se omezíme pouze na *stacionární* kontaktní úlohy pružného tělesa spočívajícího na tuhém podloží.

Oba modely tření vedou na *implicitní* variační nerovnice eliptického typu pro formulaci úlohy v posunutích, nebo na *kvazivariační* nerovnice, v případě formulace v kontaktních napětích [5]. První důkaz existence řešení (pro  $\mathcal{F}$  nezávislý na řešení) uvedený v [18], používal pevněbodový přístup a pro existenci řešení bylo nutné, aby byl koeficient tření dostatečně malý. Existence byla následně v [6] dokázána použitím metody, která odstraňuje jednostranné omezení zavedením penalty a současně regularizuje nehladký třecí člen. Touto metodou byla dokázána pro oba modely tření existence řešení i v případě, kdy  $\mathcal{F}$  závisí na řešení. Tento, z teoretického hlediska výhodný přístup, se ale příliš nehodí pro numerické výpočty. Diskretizace vede na soustavu nelineárních rovnic, která závisí na dvou malých parametrech. Výpočetní náklady jsou ale silně ovlivněny jejich volbou, viz. [7]. Z těchto důvodů se pro výpočty dává přednost pevněbodové metodě. Pro hledání pevných bodů lze použít metod nehladké optimalizace (viz. [1] a [19]). My však budeme používat dobře známou *metodu postupných aproximací* a budeme se snažit rozšířit výsledky z [18] také na případ, kdy  $\mathcal{F}$  závisí na řešení. V každé iteraci je řešena kontaktní úloha s *daným* třením a koeficientem tření  $\mathcal{F}$  *nezávislým* na řešení. Tato pomocná úloha formulovaná v posunutích vede po diskretizaci na problém nalezení minima nehladké funkce s vazbami, které jsou dány lineárními nerovnostmi. Abychom se vyhnuli problémům s nehladkostí minimizované funkce, použijeme duální formulaci, doporučenou v [18], čímž nehladkost odstraníme. Omezující podmínky poté budou mít tvar jednoduchých omezení

v 2D, zatímco u 3D úloh přibudou navíc kvadratická omezení.

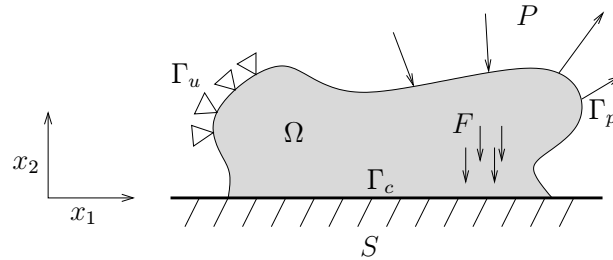
Z důvodu lepší přehlednosti popisujeme 2D a 3D úlohy samostatně, členění kapitol však zůstává podobné. V kapitole 1 definujeme klasické a slabé řešení 2D kontaktního problému pro dané a Coulombovo tření a posléze převedeme obě úlohy na problém nalezení pevného bodu jistého zobrazení  $\Psi$ , respektive  $\Phi$ . Obě zobrazení jsou definována na základě řešení pomocné úlohy s daným třením a koeficientem tření nezávislým na řešení. V kapitole 2 aproximujeme posunutí po částech lineárními funkcemi a Lagrangeovy multiplifikátory pro úlohu s Coulombovým třením po částech konstantními funkcemi. V kapitole 3 dokážeme existenci alespoň jednoho řešení pro spojitou úlohu s daným třením a koeficientem tření daným libovolnou spojitou a nezápornou funkcí  $\mathcal{F}$ . Za dodatečného předpokladu, že  $\mathcal{F}$  je Lipschitzovská s malou konstantou Lipschitzovskosti dokážeme jednoznačnost řešení. Podobnou analýzu provedeme v následující kapitole pro *diskrétní* úlohu s Coulombovým třením. V kapitole 5 popíšeme, jak u 2D úloh převést smíšenou formulaci pomocné úlohy do algebraického tvaru a krátce popíšeme algoritmus, kterým ji řešíme. V kapitole 6 uvedený postup otestujeme na několika úlohách. Uvedeme rovněž úlohu, která má více řešení. V kapitolách 7 až 10 se věnujeme 3D úlohám. Kapitoly členíme podobně jako u 2D úloh.

# Část I

## 2D úlohy

### 1 Formulace 2D kontaktních úloh se třením

Náplní této kapitoly je formulace 2D stacionárních kontaktních úloh s *daným* a s *Coulombovým třením*. Pro snazší a přehlednější formulaci se budeme zabývat pouze problémem jednoho pružného tělesa spočívajícího na dokonale tuhém podloží. Budeme zkoumat pouze jednoduchou geometrii úlohy. Vyjdeme z diferenciálních rovnic lineární pružnosti a kontaktních podmínek, uvedeme variační formulaci obou úloh ve tvaru variačních nerovnic. V Úvodu jsme se zmínili, že úlohu převedeme na problém hledání pevného bodu jistého zobrazení, což učiníme v této kapitole. Pro hledání pevného bodu použijeme metodu prostých iterací. Součástí každé iterace bude, jak uvidíme, řešení pomocné kontaktní úlohy s daným třením a koeficientem tření nezávislým na řešení.



Obr. 1.1

Pružné těleso je reprezentováno oblastí  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Nechť hranice  $\partial\Omega$  oblasti  $\Omega$  je Lipschitzovská a skládá se z disjunktních částí  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_p$  a  $\Gamma_c$ . Těleso je pevně upevněno na části hranice  $\Gamma_u$  (Dirichletova okrajová podmínka), na části  $\Gamma_p$  je těleso zatíženo povrchovými silami o hustotě  $P$  (Neumanova okrajová podmínka) a uvnitř oblasti  $\Omega$  je zatíženo objemovými silami o hustotě  $F$ . Ke kontaktu tělesa s tuhým podložím  $S$  může dojít pouze na části  $\Gamma_c$ , kde uvažujeme podmínky nepronikání a tření. Dále předpokládejme speciální geometrii úlohy (viz obr. 1.1), kdy  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0\}$  a  $\Gamma_c$  leží v ose  $x_2 = 0$ . Jinými slovy, mezi  $\Omega$  a  $S$  je před deformací nulová vzdálenost.

Nyní si uvedeme vztahy, které splňuje klasické řešení kontaktní úlohy se třením formulované v posunutích. Posunutí  $u$  musí vyhovovat následujícím



podmínkám (ve vztazích používáme sčítací konvence):  
(*rovnice rovnováhy*)

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \text{na } \Omega; \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

kde  $(\tau_{ij})_{i,j=1}^2$  je tenzor napětí, který vyhovuje zobecněnému Hookovu zákonu, tj. lineárnímu vztahu mezi tenzorem napětí a tenzorem malé deformace  $(e_{ij})_{i,j=1}^2$ :

$$\tau_{ij} := \tau_{ij}(u) = c_{ijkl} e_{kl}(u), \quad i, j, k, l = 1, 2; \quad e_{kl}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.2)$$

Z fyzikálních vlastností plynou pro koeficienty  $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$  tyto podmínky symetrie a elipticity (podrobně popsáno v [17]):

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{jikl} = c_{klij} \quad \text{s.v. v } \Omega; \\ (\exists \alpha = \text{const.} > 0) (\forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathbb{R}^1) &: c_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad \text{s.v. v } \Omega; \end{aligned}$$

(*podmínky vetknutí*)

$$u_i = 0 \quad \text{na } \Gamma_u, \quad i = 1, 2; \quad (1.3)$$

(*podmínky rovnováhy na } \Gamma\_p*)

$$T_i := \tau_{ij} \nu_j = P_i \quad \text{na } \Gamma_p, \quad i = 1, 2, \quad (1.4)$$

kde  $\nu$  je jednotkový vektor vnější normály k  $\partial\Omega$  a  $T_i$  je  $i$ -tá složka vektoru napětí  $T$ . Pro bližší popis kontaktních podmínek si následujícími vztahy definujeme normálové a tečné posunutí, respektive normálové a tečné složky vektoru napětí:

$$\begin{aligned} u_n &:= u_i \nu_i, & u_t &:= u - u_n \nu, \\ T_n &:= \tau_{ij} \nu_i \nu_j, & T_t &:= T - T_n \nu. \end{aligned}$$

S ohledem na zvolenou geometrii úlohy plyne:

$$\begin{aligned} u_n &= -u_2, & u_t &= [u_1, 0] \\ T_n &= -T_2, & T_t &= [T_1, 0]. \end{aligned}$$

(podmínky nepronikání)

$$u_2 \geq 0 \quad , \quad T_2 \geq 0 \quad , \quad u_2 T_2 = 0 \quad \text{na } \Gamma_c ; \quad (1.5)$$

(podmínky tření)

model s daným třením

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) = 0 &\Rightarrow |T_1(x)| \leq \mathcal{F}(0) g; \\ u_1(x) \neq 0 &\Rightarrow T_1(x) = -\mathcal{F}(|u_1(x)|) g \operatorname{sign} u_1(x), \quad x \in \Gamma_c, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Coulombův model tření

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) = 0 &\Rightarrow |T_1(x)| \leq \mathcal{F}(0) T_2(x); \\ u_1(x) \neq 0 &\Rightarrow T_1(x) = -\mathcal{F}(|u_1(x)|) T_2(x) \operatorname{sign} u_1(x), \quad x \in \Gamma_c. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)^c$$

Symbol  $g$  v (1.6) značí předem zadanou mez skluzu. Všimněme si, že koeficient tření  $\mathcal{F}$  závisí na velikosti tečné složky posunutí. O koeficientu tření dále předpokládáme, že je spojitý a zdola i shora je omezený kladnými konstantami  $\mathcal{F}_{min}$  a  $\mathcal{F}_{max}$ :

$$\mathcal{F} \in C(\mathbb{R}_+^1) \quad , \quad \mathcal{F}_{min} \leq \mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}_{max} \quad \forall t \geq 0 . \quad (1.7)$$

Nyní jsme si vyjmenovali všechny potřebné podmínky a přistoupíme k definicím klasických řešení obou kontaktních úloh.

*Klasickým řešením 2D kontaktní úlohy s daným třením* nazveme takové dostatečně hladké posunutí  $u$ , které vyhovuje podmínkám (1.1)–(1.6).

*Klasickým řešením 2D kontaktní úlohy s Coulombovským třením* nazveme takové dostatečně hladké posunutí  $u$ , které vyhovuje podmínkám (1.1)–(1.5) a (1.6)<sup>c</sup>.

Místo klasického řešení je vhodnější hledat slabé řešení. Pro formulaci slabého řešení zavedeme následující množiny:

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{na } \Gamma_u\} \quad , \\ \mathbb{V} &= V \times V \quad , \\ K &= \{v \in \mathbb{V} \mid v_2 \geq 0 \quad \text{s.v. na } \Gamma_c\} \quad , \\ H^{1/2}(\Gamma_c) &= \{\varphi \in L^2(\Gamma_c) \mid \exists v \in V : v = \varphi \quad \text{na } \Gamma_c\} \quad , \\ H^{-1/2}(\Gamma_c) &= (H^{1/2}(\Gamma_c))' \quad \text{prostor duální k } H^{1/2}(\Gamma_c) \quad , \\ H_+^{1/2}(\Gamma_c) &= \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_c) \mid \varphi \geq 0 \quad \text{s.v. na } \Gamma_c\} \quad , \\ H_+^{-1/2}(\Gamma_c) &= \{\mu \in H^{-1/2}(\Gamma_c) \mid \langle \mu, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_+^{1/2}(\Gamma_c)\} \quad . \end{aligned}$$

$K$  je množina posunutí, jež vyhovují první z podmínek nepronikání.  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  je prostorem všech stop na  $\Gamma_c$  funkcí z  $V$ . V tomto prostoru je obvyklé zavést normu takto

$$\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_c} = \inf_{\substack{v \in V \\ v = \varphi \text{ na } \Gamma_c}} |v|_{1,\Omega} . \quad (1.8)$$

Symbol  $\langle , \rangle$  značí dualitu mezi  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  a  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ . Po silách požadujeme, aby  $F \in (L^2(\Omega))^2$  a  $P \in (L^2(\Gamma_p))^2$ .

**Definice 1.1** Slabým řešením kontaktní úlohy s daným třením  $g \in H_+^{-1/2}(\Gamma_c)$  nazveme posunutí  $u$  splňující implicitní variační nerovnici

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdi } u \in K \text{ takové, že } (\forall v \in K) : \\ & a(u, v - u) + \langle \mathcal{F} \circ |u_1|, g, |v_1| - |u_1| \rangle \geq L(v - u) , \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P})$$

kde

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \tau_{ij}(u) e_{ij}(v) dx , \\ L(v) &= \int_{\Omega} F_i v_i dx + \int_{\Gamma_p} P_i v_i ds , \quad u, v \in \mathbb{V} . \end{aligned}$$

**Definice 1.2** Slabým řešením 2D kontaktní úlohy s Coulombovým třením nazveme posunutí  $u$  splňující implicitní variační nerovnici

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdi } u \in K \text{ takové, že } (\forall v \in K) : \\ & a(u, v - u) + \langle \mathcal{F} \circ |u_1|, T_2(u), |v_1| - |u_1| \rangle \geq L(v - u) . \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}_c)$$

Jak již bylo řečeno v Úvodu, přeformulujeme výše uvedené implicitní variační nerovnice na úlohy hledání pevného bodu jistého zobrazení, který pak bude hledán pomocí metody postupných iterací. Součástí každé iterace bude řešení pomocné úlohy s daným třením a s koeficientem tření nezávislým na řešení. Pomocnou úlohu lze již poměrně snadno řešit za využití známých metod.

Označme  $X = H_+^{1/2}(\Gamma_c) \times H_+^{-1/2}(\Gamma_c)$ . K libovolné dvojici  $(\varphi, g) \in X$  přiřadíme tuto pomocnou úlohu s daným třením  $g$  a koeficientem tření  $\mathcal{F} := \mathcal{F} \circ \varphi$ , který nezávisí na řešení:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdi } u := u(\varphi, g) \in K \text{ takové, že } (\forall v \in K) : \\ & a(u, v - u) + \langle \mathcal{F} \circ \varphi, g, |v_1| - |u_1| \rangle \geq L(v - u) . \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}(\varphi, g))$$

O pomocné úloze víme, že má právě jedno řešení  $u$  pro jakoukoli dvojici  $(\varphi, g) \in X$  (podrobnosti lze najít v [5], [12]). To nám umožňuje definovat

zobrazení  $\Psi : H_+^{1/2}(\Gamma_c) \mapsto H_+^{1/2}(\Gamma_c)$  a  $\Phi : X \mapsto X$  vztahy

$$\Psi(\varphi) = |u_1|_{\Gamma_c} \quad \varphi \in H_+^{1/2}(\Gamma_c) , \quad (1.9)$$

$$\Phi(\varphi, g) = (|u_1|_{\Gamma_c}, T_2(u)) \quad (\varphi, g) \in X . \quad (1.9)^c$$

Pokud srovnáme definici řešení  $u$  úloh  $\mathcal{P}(\varphi, g)$ ,  $(\mathcal{P})$ ,  $(\mathcal{P}_c)$  a definice obou zobrazení, vidíme, že  $u$  řeší  $(\mathcal{P})$  právě tehdy, když  $|u_1|_{\Gamma_c}$  je pevným bodem zobrazení  $\Psi$  na  $H_+^{1/2}(\Gamma_c)$ . Analogicky,  $u$  je řešením  $(\mathcal{P}_c)$  právě tehdy, když dvojice  $(|u_1|_{\Gamma_c}, T_2(u))$  je pevným bodem zobrazení  $\Phi$  na  $X$ .

K nalezení pevného bodu zobrazení  $\Psi$  a  $\Phi$  použijeme metodu postupných iterací

$$\begin{cases} \varphi^{(0)} \in H_+^{1/2}(\Gamma_c) \text{ dané;} \\ \varphi^{(k+1)} = \Psi(\varphi^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

nebo

$$\begin{cases} (\varphi^{(0)}, g^{(0)}) \in X \text{ dané;} \\ (\varphi^{(k+1)}, g^{(k+1)}) = \Phi(\varphi^{(k)}, g^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Složka  $\varphi^{(k+1)}$  nám aktualizuje nový koeficient tření  $\mathcal{F} := \mathcal{F} \circ \varphi^{(k+1)}$ , zatímco složka  $g^{(k+1)}$  je novou aproximací meze skluzu.

V dalším textu se budeme zabývat úlohou  $\mathcal{P}(\varphi, g)$ , v níž je mez skluzu  $g$  dána *nezápornou, kvadraticky integrovatelnou funkcí*, tj.  $g \in L_+^2(\Gamma_c)$ . Jelikož bilineární forma  $a$  je symetrická, odpovídá řešení  $u$  úlohy  $(\mathcal{P}(\varphi, g))$  problému nalezení minima funkcionálu

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi g |v_1| dx_1 - L(v) \right\} .$$

Pomocí Lagrangeových multiplikátorů lze odstranit nediferencovatelný člen obsahující  $|v_1|$  a také omezení  $v \in K$ . Platí totiž

$$\min_{v \in K} J(v) = \inf_{v \in \mathbb{V}} \sup_{\substack{\mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g) \\ \mu_2 \in \Lambda_2}} \mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2) , \quad (1.10)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2) &= \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) - \langle \mu_1, v_1 \rangle - \langle \mu_2, v_2 \rangle & (1.11) \\ \Lambda_1(\varphi, g) &= \{ \mu \in L^2(\Gamma_c) \mid |\mu| \leq \mathcal{F} \circ \varphi g \text{ s.v. na } \Gamma_c \} \\ \Lambda_2 &= H_+^{-1/2}(\Gamma_c) , \end{aligned}$$

neboť

$$\int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi g |v_1| dx_1 = \sup_{\mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g)} \int_{\Gamma_c} \mu_1 v_1 dx_1 ,$$

$$\sup_{\mu_2 \in \Lambda_2} -\langle \mu_2, v_2 \rangle = \begin{cases} 0 & v \in K \\ \infty & v \notin K \end{cases} .$$

*Smíšenou variační formulací úlohy* ( $\mathcal{P}(\varphi, g)$ ), nazveme úlohu

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (u, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{V} \times \Lambda_1(\varphi, g) \times \Lambda_2 \text{ takový, že} \\ a(u, v) = L(v) + \langle \lambda_1, v_1 \rangle + \langle \lambda_2, v_2 \rangle \quad \forall v \in \mathbb{V} , \\ \langle \mu_1 - \lambda_1, u_1 \rangle + \langle \mu_2 - \lambda_2, u_2 \rangle \geq 0 \quad \forall \mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g), \forall \mu_2 \in \Lambda_2 . \end{aligned} \right\} (\mathcal{M}(\varphi, g))$$

Dualita  $\langle \mu_1, v_1 \rangle$ , kde  $\mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g)$  je reprezentována skalárním součinem v  $L^2(\Gamma_c)$ . Problém  $(\mathcal{M}(\varphi, g))$  má jediné řešení  $(u, \lambda_1, \lambda_2)$ , jak plyne například z [12]. Posunutí  $u$  přitom řeší  $(\mathcal{P}(\varphi, g))$  a Lagrangeovy multiplikátory odpovídají kontaktním napětím, tj.  $\lambda_1 = T_1(u)$  a  $\lambda_2 = T_2(u)$  na  $\Gamma_c$ . Toto nám umožňuje definovat zobrazení  $\Phi$  ekvivalentně následujícím způsobem:

$$\Phi(\varphi, g) = (|u_1|_{\Gamma_c}, \lambda_2) . \quad (1.12)$$

## 2 Diskretizace 2D úloh

Tato kapitola pojednává o diskretizaci úloh formulovaných v předchozí části. Pro numerické řešení kontaktních úloh je potřeba zkonstruovat jejich diskretizovanou verzi, k čemuž použijeme metodu konečných prvků. Vlastnosti posloupnosti řešení diskretizovaných úloh budou také sloužit v analýze úloh s daným třením. Při pozdější analýze úloh s Coulombovým třením se budeme zabývat pouze diskretizovanou úlohou, kterou formulujeme v druhé části této kapitoly. *Od této chvíle předpokládejme, že  $\Omega$  je polygonální oblast.*

### 2.1 Diskretizace úlohy s daným třením

Nechť je mez skluzu  $g \in L^2_+(\Gamma_c)$  daná,  $\{\mathcal{T}_h\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  je *regulární* systém triangulací  $\bar{\Omega}$  takový, že  $\{\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  je *silně regulární* dělení  $\Gamma_c$  (viz [2]). Nechť  $V_h \subset V$  je prostorem všech spojitých, po částech lineárních funkcí na  $\mathcal{T}_h$ :

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v_h = 0 \text{ na } \Gamma_u\} ,$$

$$\mathbb{V}_h = V_h \times V_h .$$

Prostor stop funkcí z  $V_h$  na  $\Gamma_c$  označíme

$$\mathcal{V}_h = \{\varphi_h \in C(\overline{\Gamma}_c) \mid \exists v_h \in V_h : v_h = \varphi_h \text{ na } \Gamma_c\} . \quad (2.1)$$

Buď dále

$$\mathcal{V}_h^+ = \{\varphi_h \in \mathcal{V}_h \mid \varphi_h \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\} . \quad (2.2)$$

Nechť  $K_h$  je konvexní podmnožina funkcí z  $\mathbb{V}_h$ , jež splňují podmínku nepronikání na  $\Gamma_c$ :

$$K_h = \{v_h = (v_{h1}, v_{h2}) \in \mathbb{V}_h \mid v_{h2} \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\} . \quad (2.3)$$

Zvolme  $\varphi_h \in \mathcal{V}_h^+$  pevně a definujme tuto úlohu:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najdi } u_h := u_h(\varphi_h) \in K_h \text{ takové, že } (\forall v_h \in K_h) : \\ a(u_h, v_h - u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g, |v_{h1}| - |u_{h1}|] \geq L(v_h - u_h) , \end{array} \right\} \quad (\mathcal{P}(\varphi_h))_h$$

kde  $[\cdot, \cdot]$  značí skalární součin v  $L^2(\Gamma_c)$ . Zobrazení  $\Psi_h : \mathcal{V}_h^+ \mapsto \mathcal{V}_h^+$  definované vztahem

$$\Psi_h(\varphi_h) = r_h |u_{h1}|_{\Gamma_c} , \quad (2.4)$$

bude sloužit jako diskretizace zobrazení  $\Psi$ . Přitom  $r_h$  je po částech lineární Lagrangeův interpolační operátor na  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$ , a  $u_h = (u_{h1}, u_{h2}) \in K_h$  řeší  $(\mathcal{P}(\varphi_h))_h$ .

**Definice 2.1** Řekneme, že  $u_h$  je řešením diskrétní kontaktní úlohy s daným třením, jestliže  $r_h |u_{h1}|_{\Gamma_c}$  je pevným bodem operátoru  $\Psi_h$ .

## 2.2 Diskretizace úlohy s Coulombovým třením

Věnujme se nyní diskretizaci úlohy s Coulombovým třením. Ačkoli budeme pro její řešení využívat smíšené variační formulace pomocné úlohy  $\mathcal{M}(\varphi, g)$  uvedené v Kapitole 1, k její analýze použijeme maličko odlišnou pomocnou úlohu, ve které na rozdíl od  $\mathcal{M}(\varphi, g)$  ponecháme třecí člen. Lagrangeovy multiplikátory použijeme pouze pro odstranění podmínek nepronikání.

Jelikož diskretizujeme smíšenou úlohu, musíme aproximovat také prostor Lagrangeových multiplikátorů, tj. prostor  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ . Nechť  $\mathcal{T}_H$  je dělení  $\overline{\Gamma}_c$  na úsečky  $S_i$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , jejichž délka je omezena  $H$ . Definujme

$$\begin{aligned} L_H &= \{\mu_H \in L^2(\Gamma_c) \mid \mu_H|_{S_i} \in P_0(S_i) \quad \forall i \in \mathcal{I}\} , \\ \Lambda_H &= \{\mu_H \in L_H \mid \mu_H \geq 0 \text{ skoro všude na } \Gamma_c\} \\ X_{hH} &= \mathcal{V}_h^+ \times \Lambda_H , \end{aligned}$$

tj.  $L_H$  je prostor funkcí po částech konstantních na  $\mathcal{T}_H$ , množina  $\Lambda_H$  je diskretizace prostoru  $H_+^{-1/2}(\Gamma_c)$  a  $X_{hH}$  aproximace  $X$ .

Pro pevně zvolenou dvojici  $(\varphi_h, g_H) \in X_{hH}$  definujeme aproximaci smíšené variační formulace kontaktního problému s daným třením  $g_H$  a koeficientem tření  $\mathcal{F}_{\varphi_h} := \mathcal{F} \circ \varphi_h$ :

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdi } (u_h, \lambda_H) \in \mathbb{V}_h \times \Lambda_H \text{ takový, že} \\ & a(u_h, v_h - u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H, |v_{h1}| - |u_{h1}|] \geq \\ & \quad \geq L(v_h - u_h) + [\lambda_H, v_{h2} - u_{h2}] \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \\ & [\mu_H - \lambda_H, u_{h2}] \geq 0 \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H. \end{aligned} \right\} (\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$$

$[ \cdot, \cdot ]$  opět značí skalární součin v  $L^2(\Gamma_c)$  a  $\mathbb{V}_h$  je týž, jako byl použit v předchozím odstavci. Omezení  $u_2 \geq 0$  na  $\Gamma_c$  je realizováno pomocí Lagrangeových multiplikátorů z  $\Lambda_H$ . Poslední nerovnost v  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  říká, že  $u_h \in K_{hH}$ , kde

$$K_{hH} = \{v_h = (v_{h1}, v_{h2}) \in \mathbb{V}_h \mid \int_{S_i} v_{h2} dx_1 \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}\}. \quad (2.5)$$

Podmínka nepronikání je tedy zajištěna pouze ve slabší (integrální) podobě.  $K_{hH}$  je pak *externí* aproximací množiny  $K$ .

Pro aproximaci zobrazení  $\Phi$  potřebujeme, aby obě složky řešení úlohy  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  byly určeny jednoznačně. To je zajištěno, pokud platí následující podmínka:

$$\text{Nechť } \mu_H \in L_H \text{ je takové, že } (\forall z_h \in \mathcal{V}_h) : [\mu_H, z_h] = 0 \Rightarrow \mu_H = 0. \quad (2.6)$$

Tu je možno splnit například tak, že použijeme dělení  $\mathcal{T}_H$ , které bude řidší než dělení  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$ . Pak má úloha  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  právě jedno řešení  $(u_h, \lambda_H)$  pro každé  $(\varphi_h, g_H) \in X_{hH}$ , viz například [12].

Jelikož  $\lambda_H$  aproximuje  $\lambda_2$ , za aproximaci zobrazení  $\Phi$  v (1.9)<sup>c</sup> je možno považovat zobrazení  $\Phi_{hH} : X_{hH} \mapsto X_{hH}$  definované vztahem:

$$\Phi_{hH}(\varphi_h, g_H) = (r_h|u_{h1}|_{\Gamma_c}|, \lambda_H). \quad (2.7)$$

**Definice 2.2** Řekneme, že  $u_h \in K_{hH}$  je řešením diskrétní kontaktní úlohy s Coulombovým třením, jestliže dvojice  $(r_h|u_{h1}|_{\Gamma_c}|, \lambda_H)$  je pevným bodem zobrazení  $\Phi_{hH}$ .

### 3 Analýza 2D úloh s daným třením

V přechozích kapitolách jsme formulovali kontaktní úlohu s daným třením a koeficientem tření závislým na řešení jako problém nalezení pevného bodu

zobrazení  $\Psi$ . Uvedli jsme si také aproximaci tohoto problému. V této kapitole dokážeme, že pevný bod zobrazení  $\Psi$  existuje. Nejdříve dokážeme existenci řešení diskretizované úlohy. Pak dokážeme, že posloupnost řešení diskretizovaných úloh bude konvergovat k řešení spojité úlohy, pokud parametr diskretizace konverguje k nule. Tím dokážeme existenci pevného bodu zobrazení  $\Psi$ . Posléze odvodíme předpoklady, které navíc zaručí jednoznačnost tohoto pevného bodu. Nakonec uvedeme duální formulaci úlohy, kterou používáme v numerickém řešení úlohy.

Začněme důkazem existence pevného bodu zobrazení  $\Psi_h$ . Jelikož pevný bod hledáme v prostoru konečné dimenze, postačuje ověřit předpoklady Brouwerovy věty o pevném bodě:

**Věta 3.1.** (Brouwerova věta o pevném bodě): *V prostoru konečné dimenze má každé spojité zobrazení  $G : B \mapsto B$  pevný bod, kde  $B$  je uzavřená, omezená konvexní množina.*

**Lemma 3.1.** *Zobrazení  $\Psi_h$  zobrazuje  $\mathcal{V}_h^+ \cap B_R$  do sebe, kde  $B_R = \{\varphi_h \in \mathcal{V}_h \mid \|\varphi_h\|_{1/2, \Gamma_c} \leq R\}$  a  $R > 0$  nezávisí na  $h$ .*

*Důkaz.* Dosadíme-li  $v_h = 0$  (nulový prvek  $\mathbb{V}_h$ ) do  $(\mathcal{P}(\varphi_h))_h$ , pak s ohledem na nezápornost třetího členu  $[\mathcal{F} \circ \varphi_h g, |u_{h1}|]$  dostaneme

$$\alpha \|u_h\|_{1, \Omega}^2 \leq a(u_h, u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g, |u_{h1}|] = L(u_h) \leq \|L\|_* \|u_h\|_{1, \Omega}, \quad (3.1)$$

kde  $\alpha$  je konstanta z Kornovy nerovnosti a  $\|L\|_*$  je duální norma  $L$ . Z definice normy v  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  plyne, že

$$\| |u_{h1}| \|_{1/2, \Gamma_c} \leq \|u_{h1}\|_{1/2, \Gamma_c} \leq \|u_{h1}\|_{1, \Omega} \leq \frac{\|L\|_*}{\alpha}. \quad (3.2)$$

Dále

$$\begin{aligned} \|r_h |u_{h1}| \|_{1/2, \Gamma_c} &\leq \|r_h |u_{h1}| - |u_{h1}| \|_{1/2, \Gamma_c} + \| |u_{h1}| \|_{1/2, \Gamma_c} \\ &\leq ch^{1/2} \|u_{h1}\|_{1, \Gamma_c} + \|u_{h1}\|_{1/2, \Gamma_c} \\ &\leq c \|u_{h1}\|_{1/2, \Gamma_c} + \|u_{h1}\|_{1/2, \Gamma_c} \leq (c+1) \|L\|_* / \alpha, \end{aligned}$$

kde jsme využili známých aproximačních vlastností Lagrangeovy interpolace  $r_h$  a inverzní nerovnosti ve  $\mathcal{V}_h$  mezi normami prostorů  $H^1(\Gamma_c)$  a  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ , viz [2]:

$$\|v_h\|_{1, \Gamma_c} \leq ch^{-1/2} \|v_h\|_{1/2, \Gamma_c} \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (3.3)$$

Přitom  $c > 0$  v (3.3) nezávisí na  $h$ , jak plyne z předpokladů na  $\{\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}\}$ ,  $h \rightarrow 0+$ . Stačí tedy položit  $R := (c+1) \|L\|_* / \alpha$ . □



**Lemma 3.2.** *Zobrazení  $\Psi_h$  je spojité na  $\mathcal{V}_h^+$ .*

*Důkaz.* Protože všechny normy v konečnědimenzionálním prostoru jsou ekvivalentní, použijeme pro konvergenci ve  $V_h$  a  $\mathbb{V}_h$  stejný symbol  $\rightarrow$ . Pro jednoduchost značení vynecháme index  $h$  u funkcí. Nechtě  $\{\varphi_n\}$ ,  $\varphi_n \in \mathcal{V}_h^+$  je taková, že  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{V}_h^+$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Chceme dokázat, že

$$r_h|u_{n1}|_{\Gamma_c} \rightarrow r_h|u_1|_{\Gamma_c}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

kde  $u_n$ , respektive  $u$  je řešením úlohy  $(\mathcal{P}(\varphi_n))_h$ , respektive  $(\mathcal{P}(\varphi))_h$ . Z (3.1) plyne, že  $\{u_n\}$  je omezená. Existuje proto vybraná posloupnost  $\{u_{n'}\} \subset \{u_n\}$  a prvek  $u \in K_h$  takový, že

$$u_{n'} \rightarrow u, \quad n' \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Limitním přechodem pro  $n' \rightarrow \infty$  v  $(\mathcal{P}(\varphi_{n'}))_h$  snadno ukážeme, že  $u \in K_h$  řeší  $(\mathcal{P}(\varphi))_h$ . Protože toto řešení je jediné, platí (3.5) pro celou posloupnost. Zobrazení  $r_h$  a  $|\cdot|: v_h \mapsto |v_h|$  jsou spojitá a proto (3.4) je bezprostředním důsledkem (3.5). □

Z Lemmat 3.1 a 3.2 plyne následující věta.

**Věta 3.2.** *Operátor  $\Psi_h$  má ve  $\mathcal{V}_h^+$  alespoň jeden pevný bod.*

Existenci alespoň jednoho řešení diskrétní kontaktní úlohy s daným třením máme dokázanou. Toho využijeme při důkazu existence alespoň jednoho řešení spojitě úlohy.

Bud'  $\{u_h\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  posloupnost řešení diskrétních kontaktních úloh s daným třením, neboli  $\{r_h|u_{h1}|_{\Gamma_c}\}$  je posloupnost pevných bodů zobrazení  $\Psi_h$ . Pro jednodušší zápis označme  $r_h|u_{h1}| := r_h|u_{h1}|_{\Gamma_c}$ . Platí tedy, že  $u_h = (u_{h1}, u_{h2}) \in K_h$  je řešením

$$a(u_h, v_h - u_h) + [\mathcal{F}(r_h|u_{h1}|)g, |v_{h1}| - |u_{h1}|] \geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h. \quad (3.6)$$

Zopakujme, že symbol  $[\cdot, \cdot]$  značí skalární součin v  $L^2(\Gamma_c)$ .

Předpokládejme, že k libovolnému prvku  $v \in K$  lze sestrojít posloupnost  $\{v_h\}$ ,  $v_h \in K_h$  takovou, že

$$v_h \rightarrow v \quad v \in (H^1(\Omega))^2. \quad (3.7)$$

Z (3.1) plyne, že posloupnost  $\{u_h\}$  je omezená v  $(H^1(\Omega))^2$ . Existuje tedy vybraná posloupnost  $\{u_{h'}\} \subset \{u_h\}$  a prvek  $u \in K$ , takový, že

$$u_{h'} \rightarrow u \quad u \in (H^1(\Omega))^2. \quad (3.8)$$

Toho, spolu s (3.7) využijeme k důkazu následující nerovnosti:

$$\begin{aligned}
\limsup_{h' \rightarrow 0^+} a(u_{h'}, v_{h'} - u_{h'}) &\leq \limsup_{h' \rightarrow 0^+} a(u_{h'}, v_{h'}) + \limsup_{h' \rightarrow 0^+} -a(u_{h'}, u_{h'}) \\
&\leq \limsup_{h' \rightarrow 0^+} a(u_{h'}, v) + \limsup_{h' \rightarrow 0^+} a(u_{h'}, v_{h'} - v) - \liminf_{h' \rightarrow 0^+} a(u_{h'}, u_{h'}) \\
&\leq a(u, v) + \lim_{h' \rightarrow 0^+} M \|u_{h'}\|_{1, \Omega} \|v_{h'} - v\|_{1, \Omega} - a(u, u) \\
&= a(u, v - u) ,
\end{aligned}$$

kde  $M > 0$  je norma bilineární formy  $a$ . Platí tedy

$$\left. \begin{aligned}
\limsup_{h' \rightarrow 0^+} a(u_{h'}, v_{h'} - u_{h'}) &\leq a(u, v - u) \\
\lim_{h' \rightarrow 0^+} L(v_{h'} - u_{h'}) &= L(v - u) .
\end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Z posloupnosti  $\{u_{h'}\}$  lze vybrat posloupnost  $\{u_{h''}\}$ , pro kterou platí

$$r_{h''} |u_{h''1}| \rightarrow |u_1| \text{ skoro všude na } \Gamma_c . \quad (3.10)$$

Skutečně, stačí vzít v úvahu, že

$$\begin{aligned}
\|r_{h''} |u_{h''1}| - |u_1|\|_{0, \Gamma_c} &\leq \|r_{h''} |u_{h''1}| - |u_{h''1}|\|_{0, \Gamma_c} + \| |u_{h''1}| - |u_1|\|_{0, \Gamma_c} \\
&\leq c(h'')^{1/2} \|u_{h''1}\|_{1/2, \Gamma_c} + \| |u_{h''1}| - |u_1|\|_{0, \Gamma_c} .
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Jak plyne z (3.2), první člen na pravé straně konverguje k nule. Jelikož vnoření  $H^1(\Omega)$  do  $L^2(\Gamma_c)$  je kompaktní, plyne z (3.8), že i druhý člen na pravé straně (3.11) konverguje k nule. Existence vybrané posloupnosti, pro kterou platí (3.10) je pak důsledkem (3.11).

Užitím (3.7), (3.8), (3.10) a Lebesgueovy věty obdržíme

$$\lim_{h'' \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_c} \mathcal{F}(r_{h''} |u_{h''1}|) g(|v_{h''1}| - |u_{h''1}|) dx_1 = \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ |u_1| g(|v_1| - |u_1|) dx_1 .$$

Odtud a z (3.9) plyne, že

$$a(u, v - u) + [\mathcal{F} \circ |u_1| g, |v_1| - |u_1|] \geq L(v - u) . \quad (3.12)$$

Jelikož byl  $v \in K$  zvolen libovolně, je  $u \in K$  řešením variační nerovnice ( $\mathcal{P}$ ) a  $\varphi := \text{trace}_{\Gamma_c} |u_1|$  je pevným bodem zobrazení  $\Psi$ . Právě jsme dokázali následující větu.

**Věta 3.3.** Z posloupnosti  $\{\varphi_h\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  pevných bodů zobrazení  $\Psi_h$  ve  $\mathcal{V}_h^+ \cap B_R$  lze vybrat posloupnost  $\{\varphi_{h'}\} \subset \{\varphi_h\}$  takovou, že:

$$\varphi_{h'} \rightharpoonup \varphi \quad v \quad H^{1/2}(\Gamma_c), \quad h' \rightarrow 0+ .$$

Slabá limita  $\varphi \in H_+^{1/2}(\Gamma_c) \cap B_R$  je navíc pevným bodem zobrazení  $\Psi$ .

**Poznámka 3.1.** V důkazu věty 3.2 jsme potřebovali aproximovat libovolný prvek  $v \in K$  posloupností  $\{v_h\}$ ,  $v_h \in K_h$  (viz (3.7)). Poznamenejme, že existence takové posloupnosti je zaručena, jakmile množina  $K \cap (C^\infty(\bar{\Omega}))^2$  je hustá v  $K$ . Tato problematika je řešena například v [12].

Nyní víme, že také operátor  $\Psi$  má alespoň jeden pevný bod. V následujícím nás bude zajímat, za jakých předpokladů má  $\Psi$  jediný pevný bod, tj. kontaktní úloha s daným třením má jediné řešení. Jednou z možností jak to zaručit, je dokázat kontraktivnost zobrazení  $\Psi$ . Dokažme nejprve, že  $\Psi$  je Lipschitzovsky spojitý v normě prostoru  $L^2(\Gamma_c)$ , pokud koeficient tření  $\mathcal{F}$  je také Lipschitzovsky spojitý a nezáporná mez skluzu  $g \in L^\infty(\Gamma_c)$ .

**Věta 3.4.** Nechť  $\Psi : H_+^{1/2}(\Gamma_c) \mapsto H_+^{1/2}(\Gamma_c)$  je zobrazení definované v (1.9),  $g \in L^\infty(\Gamma_c)$  a  $l = \text{konst.} > 0$  je taková, že

$$|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(\bar{x}_1)| \leq l|x_1 - \bar{x}_1| \quad \forall x_1, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}_+^1 . \quad (3.13)$$

Pak existuje kladná konstanta  $c$ , pro kterou platí

$$\|\Psi(\varphi) - \Psi(\bar{\varphi})\|_{0,\Gamma_c} \leq cl\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{0,\Gamma_c} . \quad (3.14)$$

pro všechny  $\varphi, \bar{\varphi} \in H_+^{1/2}(\Gamma_c)$ .

*Důkaz.* Nechť  $u, \bar{u}$  jsou řešení problémů  $(\mathcal{P}(\varphi, g))$  (respektive  $(\mathcal{P}(\bar{\varphi}, g))$ ) pro dané  $\varphi, \bar{\varphi} \in H_+^{1/2}(\Gamma_c)$ , tj.

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + [\mathcal{F} \circ \varphi g, |v_1| - |u_1|] &\geq L(v - u) \quad \forall v \in K \\ a(\bar{u}, v - \bar{u}) + [\mathcal{F} \circ \bar{\varphi} g, |v_1| - |\bar{u}_1|] &\geq L(v - \bar{u}) \quad \forall v \in K . \end{aligned}$$

Dosadíme-li  $v := \bar{u}$  do první, respektive  $v := u$  do druhé nerovnice, pak po následném sečtení obou nerovnic dostaneme:

$$a(u - \bar{u}, u - \bar{u}) \leq [(\mathcal{F} \circ \varphi - \mathcal{F} \circ \bar{\varphi})g, |\bar{u}_1| - |u_1|] .$$

Protože

$$\begin{aligned} \alpha \|u - \bar{u}\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u - \bar{u}, u - \bar{u}) \leq l \|g\|_{\infty,\Gamma_c} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{0,\Gamma_c} \|\bar{u}_1 - u_1\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq lc_1 \|g\|_{\infty,\Gamma_c} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{0,\Gamma_c} \|\bar{u}_1 - u_1\|_{1,\Omega} , \end{aligned}$$

platí

$$\| |u_1| - |\bar{u}_1| \|_{0,\Gamma_c} \leq \|u_1 - \bar{u}_1\|_{0,\Gamma_c} \leq c_1 \|u_1 - \bar{u}_1\|_{1,\Omega} \leq \frac{lc_1^2 \|g\|_{\infty,\Gamma_c}}{\alpha} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{0,\Gamma_c},$$

kde  $c_1$  je norma operátoru stop z  $V$  do  $L^2(\Gamma_c)$ . Položíme-li  $c := c_1^2 \|g\|_{\infty,\Gamma_c}/\alpha$ , dostaneme (3.14).  $\square$

**Důsledek 3.1.** *Je-li  $cl < 1$ , pak je zobrazení  $\Psi$  kontraktivní vzhledem k normě prostoru  $L^2(\Gamma_c)$ . To znamená, že zobrazení  $\Psi$  má právě jeden pevný bod, který je roven limitě posloupnosti  $\{\varphi_h\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  pevných bodů posloupnosti  $\Psi_h$ . Navíc metoda postupných aproximací*

$$\left. \begin{array}{l} \varphi^{(0)} \in \mathcal{V}_h^+ \text{ je dáno;} \\ \text{pro } k = 1, 2, \dots \text{ položíme} \\ \varphi_h^{(k+1)} = \Psi_h(\varphi_h^{(k)}) \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

konverguje pro jakoukoli volbu  $\varphi_h^{(0)} \in \mathcal{V}_h^+$ .

Při numerickému výpočtu  $\Psi_h(\varphi_h)$  nehledáme  $|u_{h1}|_{\Gamma_c}$  přímým řešením diskretizované úlohy  $(\mathcal{P}(\varphi_h))_h$ , ale využíváme toho, že vzniká jako vedlejší produkt při řešení její duální formulace. Z toho důvodu se zmíníme o duální formulaci spojitě úlohy  $(\mathcal{P}(\varphi))$  (tj. úlohy  $(\mathcal{P}(\varphi, g))$  pro pevné  $g \in L^\infty(\Gamma_c)$ ). Řešení smíšené variační formulace  $(\mathcal{M}(\varphi, g))$  lze také ekvivalentně charakterizovat jako sedlový bod Lagrangianu  $\mathcal{L}$ , definovaného pomocí (1.10). Tedy platí, že

$$\mathcal{L}(u, \mu_1, \mu_2) \leq \mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) \leq \mathcal{L}(v, \lambda_1, \lambda_2) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad \forall \mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g) \quad \forall \mu_2 \in \Lambda_2.$$

Je známo (viz [8]), že

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \min_{v \in \mathbb{V}} \sup_{\substack{\mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g) \\ \mu_2 \in \Lambda_2}} \mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2) = \max_{\substack{\mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g) \\ \mu_2 \in \Lambda_2}} \inf_{v \in \mathbb{V}} \mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2).$$

Označme

$$-\mathcal{S}(\mu_1, \mu_2) = \inf_{v \in \mathbb{V}} \mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2), \quad \mu_1 \in \Lambda_1(\varphi, g), \quad \mu_2 \in \Lambda_2$$

duální funkcionál.

Duální variační formulaci úlohy  $(\mathcal{P}(\varphi))$  nazveme úlohu

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najdi } \lambda \in \Lambda(\varphi, g) \text{ takové, že } (\forall \mu \in \Lambda(\varphi, g)) : \\ \mathcal{S}(\lambda) \leq \mathcal{S}(\mu), \end{array} \right\} \quad (\mathcal{D}(\varphi))$$

kde  $\Lambda(\varphi, g) := \Lambda_1(\varphi, g) \times \Lambda_2$ . Snadno se lze přesvědčit, že  $\mathcal{S}$  je kvadratický funkcional:

$$\mathcal{S}(\mu) = \frac{1}{2}b(\mu, \mu) - f(\mu) , \quad (3.16)$$

kde  $b : (H^{-1/2}(\Gamma_c))^2 \times (H^{-1/2}(\Gamma_c))^2 \mapsto \mathbb{R}^1$ , respektive  $f : (H^{-1/2}(\Gamma_c))^2 \mapsto \mathbb{R}^1$  je symetrická bilineární, respektive lineární forma, které jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} b(\mu, \nu) &= \langle \mu_1, G_1(\nu_1, \nu_2) \rangle + \langle \mu_2, G_2(\nu_1, \nu_2) \rangle \\ f(\mu) &= -\langle \mu_1, G_1(L) \rangle - \langle \mu_2, G_2(L) \rangle , \end{aligned}$$

kde  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in (H^{-1/2}(\Gamma_c))^2$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  značí dualitu mezi  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  a  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ . Symbolem  $G = (G_1, G_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{V}', \mathbb{V})$  rozumíme Greenův operátor. Označíme-li  $\hat{z}, \tilde{z} \in \mathbb{V}$  výsledky jeho působení na  $L$ , respektive  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \hat{z} &:= G(L) = (G_1(L), G_2(L)) \\ \tilde{z} &:= G(\nu) = (G_1(\nu_1, \nu_2), G_2(\nu_1, \nu_2)) , \end{aligned}$$

pak  $\hat{z}, \tilde{z}$  jsou řešením následujících úloh lineární pružnosti :

$$\begin{aligned} \text{Najdi } \hat{z} \in \mathbb{V} : (\forall v \in \mathbb{V}) : & \quad a(\hat{z}, v) = L(v) \\ \text{Najdi } \tilde{z} \in \mathbb{V} : (\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{V}) : & \quad a(\tilde{z}, v) = \langle \nu_1, v_1 \rangle + \langle \nu_2, v_2 \rangle . \end{aligned}$$

O vztahu řešení úloh  $(\mathcal{D}(\varphi))$  a  $(\mathcal{P}(\varphi))$  pojednává následující věta, jejíž důkaz vyplývá z teorie uvedené v [8].

**Věta 3.5.** *Úloha  $(\mathcal{D}(\varphi))$  má právě jedno řešení  $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2)$ . Pro složky tohoto řešení navíc platí, že*

$$\lambda_1 = T_1(u(\varphi)) , \quad \lambda_2 = T_2(u(\varphi)) ,$$

kde  $u(\varphi) \in K$  je řešením úlohy  $\mathcal{P}(\varphi)$ .

## 4 Analýza 2D úloh s Coulombovým třením

Na rozdíl od analýzy 2D úloh s daným třením, kde jsme dokázali existenci řešení *spojité* úlohy, dokážeme pro úlohy s Coulombovým třením pouze existenci řešení *diskrétní* úlohy, tj. existenci pevného bodu zobrazení  $\Phi_{hH}$ . Podobně jako v předchozí kapitole ověříme předpoklady Brouwerovy věty, tentokrát pro zobrazení  $\Phi_{hH}$ . Poté se zaměříme na předpoklady zaručující jednoznačnost tohoto pevného bodu. Všechna značení budou stejná jako v odstavci 2.2.

Zavedme do prostoru  $\mathcal{V}_h \times L_H$  tuto normu:

$$\|(\varphi_h, \mu_H)\| := \|\varphi_h\|_{0,\Gamma_c} + \|\mu_H\|_{-1/2,h}, \quad (\varphi_h, \mu_H) \in \mathcal{V}_h \times L_H, \quad (4.1)$$

kde

$$\|\mu_H\|_{-1/2,h} = \sup_{\substack{z_h \in V_h \\ z_h \neq 0}} \frac{[\mu_H, z_h]}{\|z_h\|_{1,\Omega}}. \quad (4.2)$$

Vezmeme-li v úvahu (2.6), je patrné že  $\|\cdot\|_{-1/2,h} : L_H \mapsto \mathbb{R}^1$  je duální normou v  $L_H$ , která závisí na prostoru  $\mathcal{V}_h$ , a tedy na  $h$ .

**Lemma 4.1.** *Zobrazení  $\Phi_{hH}$  zobrazuje  $X_{hH} \cap B$  do sebe, kde  $B = \{(\varphi_h, \mu_H) \in \mathcal{V}_h \times L_H \mid \|\varphi_h\|_{0,\Gamma_c} \leq R_1, \|\mu_H\|_{-1/2,h} \leq R_2\}$ , a  $R_1, R_2 > 0$  nezávisí na  $h$ .*

*Důkaz.* Dosadíme-li postupně do druhé nerovnosti v  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  prvek  $\mu_H = 0, 2\lambda_H$ , obdržíme

$$[\lambda_H, u_{h2}] = 0. \quad (4.3)$$

S využitím této skutečnosti, Kornovy nerovnosti a nezápornosti třetího členu, dostaneme po dosazení  $v_h = 0, 2u_h$  do první nerovnosti v  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$ :

$$\alpha \|u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_h, u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H, |u_{h1}|] = L(u_h) \leq \|L\|_* \|u_h\|_{1,\Omega}. \quad (4.4)$$

Z věty o stopách a předchozí nerovnosti přímo plyne, že

$$\| |u_{h1}| \|_{0,\Gamma_c} = \|u_{h1}\|_{0,\Gamma_c} \leq c_1 \|u_{h1}\|_{1,\Omega} \leq \frac{c_1}{\alpha} \|L\|_*, \quad (4.5)$$

kde  $c_1$  je norma zobrazení přiřazujícího prvku z  $V$  jeho stopu z  $L^2(\Gamma_c)$ . Dále

$$\begin{aligned} \|r_h |u_{h1}| \|_{0,\Gamma_c} &\leq \|r_h |u_{h1}| - |u_{h1}|\|_{0,\Gamma_c} + \| |u_{h1}| \|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq ch \|u_{h1}\|_{1,\Gamma_c} + \|u_{h1}\|_{0,\Gamma_c} \leq c_2 \|u_{h1}\|_{0,\Gamma_c}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde jsme vzali v úvahu aproximační vlastnosti  $r_h$  a inverzní nerovnost mezi normami prostorů  $H^1(\Gamma_c)$  a  $L^2(\Gamma_c)$  pro funkce z  $\mathcal{V}_h$ :

$$\|v_h\|_{1,\Gamma_c} \leq \bar{c} h^{-1} \|v_h\|_{0,\Gamma_c} \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (4.7)$$

Z (4.5) a (4.6) plyne omezenost  $r_h |u_{h1}|$ :

$$\|r_h |u_{h1}| \|_{0,\Gamma_c} \leq R_1 := \frac{c_1 c_2}{\alpha} \|L\|_*. \quad (4.8)$$

Zbývá dokázat omezenost  $\lambda_H$ . Nechť  $\overset{\circ}{\mathbb{V}}_h \subset \mathbb{V}_h$  je podprostor  $\mathbb{V}_h$ , jehož prvky mají nulovou první složku:

$$v_h \in \overset{\circ}{\mathbb{V}}_h \Leftrightarrow v_h = (0, v_{h2}), \quad v_{h2} \in V_h. \quad (4.9)$$

Jelikož z první nerovnosti v  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  vyplývá

$$a(u_h, v_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H, |v_{h1}|] \geq L(v_h) + [\lambda_H, v_{h2}] \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h ,$$

pak omezíme-li se pouze na prvky z  $\mathring{\mathbb{V}}_h$ , platí

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) + [\lambda_H, v_{h2}] \quad \forall v_h \in \mathring{\mathbb{V}}_h . \quad (4.10)$$

Odtud a (4.4) již snadno dokážeme omezenost  $\lambda_H$  v  $\|\cdot\|_{-1/2, h}$  normě:

$$\begin{aligned} \|\lambda_H\|_{-1/2, h} &= \sup_{v_{h2} \in \mathbb{V}_h} \frac{[\lambda_H, v_{h2}]}{\|v_{h2}\|_{1, \Omega}} \leq M \|u_h\|_{1, \Omega} + \|L\|_* \\ &\leq R_2 := \left(\frac{M}{\alpha} + 1\right) \|L\|_* , \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde  $M$  je norma bilineární formy  $a$ . □

**Poznámka 4.1.** *Pokud by  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$  bylo součástí systému silně regulárních dělení  $\Gamma_c$ , konstanta  $\bar{c}$  v (4.7) by byla nezávislá na  $h$ . Stejnou vlastnost by proto měla i konstanta  $c_2$  v (4.6).*

**Lemma 4.2.** *Zobrazení  $\Phi_{hH}$  je spojitě na  $X_{hH}$ .*

*Důkaz.* Je obdobou důkazu Lemmatu 3.2 □

Lemmata 4.1 a 4.2 říkají, že zobrazení  $\Phi_{hH}$  splňuje předpoklady Brouwerovy věty, tudíž platí následující věta.

**Věta 4.1.** *Operátor  $\Phi_{hH}$  má v  $X_{hH}$  alespoň jeden pevný bod.*

Právě jsme dokázali, že diskretní kontaktní úloha s Coulombovým třením a koeficientem tření  $\mathcal{F}$  závislým na řešení má alespoň jedno řešení, když  $\mathcal{F}$  splňuje (1.7). Samozřejmě nás také zajímají postačující podmínky, jež zaručí, že řešení je určeno jednoznačně. Touto podmínkou bude opět kontraktivnost zobrazení  $\Phi_{hH}$ . Nejprve dokážeme Lipschitzovskost  $\Phi_{hH}$  za předpokladu, že  $\mathcal{F}$  je Lipschitzovsky spojitě, viz (3.13).

Mějme  $(\varphi_h, g_H), (\bar{\varphi}_h, \bar{g}_H) \in X_{hH} \cap B$ , kde  $B$  je stejná jako v Lemmatu 4.1. Nechť dvojice  $(u_h, \lambda_H), (\bar{u}_h, \bar{\lambda}_H)$  jsou řešeními úloh  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$ , respektive  $(\mathcal{M}(\bar{\varphi}_h, \bar{g}_H))_h^H$ . Omezíme-li se na testovací funkce  $v_h \in K_{hH}$ , (viz (2.5)), a vezmeme-li v úvahu (4.3) a definici  $K_{hH}$ , obdržíme

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h - u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H, |v_{h1}| - |u_{h1}|] &\geq L(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_{hH} \\ a(\bar{u}_h, v_h - \bar{u}_h) + [\mathcal{F} \circ \bar{\varphi}_h \bar{g}_H, |v_{h1}| - |\bar{u}_{h1}|] &\geq L(v_h - \bar{u}_h) \quad \forall v_h \in K_{hH} . \end{aligned}$$

Jelikož  $u_h, \bar{u}_h \in K_{hH}$ , můžeme dosadit  $v_h := \bar{u}_h$  do první, respektive  $v_h := u_h$  do druhé nerovnice. Po jejich sečtení dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - \bar{u}_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u_h - \bar{u}_h, u_h - \bar{u}_h) \\ &\leq \|\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H - \mathcal{F} \circ \bar{\varphi}_h \bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} \|u_{h1} - \bar{u}_{h1}\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq c_1 \|\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H - \mathcal{F} \circ \bar{\varphi}_h \bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} \|u_h - \bar{u}_h\|_{1,\Omega} , \end{aligned}$$

kde  $c_1 > 0$  je stejná konstanta jako v (4.5). Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} \| |u_{h1}| - |\bar{u}_{h1}| \|_{0,\Gamma_c} &\leq \|u_{h1} - \bar{u}_{h1}\|_{0,\Gamma_c} \leq c_1 \|u_h - \bar{u}_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{c_1^2}{\alpha} \|\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H - \mathcal{F} \circ \bar{\varphi}_h \bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dále s využitím (1.7) a (3.13) odhadneme člen na pravé straně:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H - \mathcal{F} \circ \bar{\varphi}_h \bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq \|\mathcal{F} \circ \varphi_h (g_H - \bar{g}_H)\|_{0,\Gamma_c} + \|(\mathcal{F} \circ \varphi_h - \mathcal{F} \circ \bar{\varphi}_h) \bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq \mathcal{F}_{max} \|g_H - \bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} + l \|\varphi_h - \bar{\varphi}_h\|_{\infty,\Gamma_c} \|\bar{g}_H\|_{0,\Gamma_c} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Prostory  $\mathcal{V}_h$  a  $L_H$  mají konečnou dimenzi, a proto všechny normy jsou v nich ekvivalentní. Existují tedy konstanty  $c_3, c_4 > 0$  takové, že

$$\left. \begin{aligned} \|\varphi_h\|_{\infty,\Gamma_c} &\leq c_3 \|\varphi_h\|_{0,\Gamma_c} & \forall \varphi_h \in \mathcal{V}_h \\ \|\mu_H\|_{0,\Gamma_c} &\leq c_4 \|\mu_H\|_{-1/2,h} & \forall \mu_H \in L_H . \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Shrneme-li (4.12), (4.13) a (4.14), pak s využitím toho, že  $\|\bar{g}_H\|_{-1/2,h} \leq R_2$  obdržíme:

$$\begin{aligned} \| |u_{h1}| - |\bar{u}_{h1}| \|_{0,\Gamma_c} &\leq \|u_{h1} - \bar{u}_{h1}\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq \frac{c_1^2 c_4}{\alpha} \mathcal{F}_{max} \|g_H - \bar{g}_H\|_{-1/2,h} + \frac{c_1^2 c_3 c_4}{\alpha} l R_2 \|\varphi_h - \bar{\varphi}_h\|_{0,\Gamma_c} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nyní již zbývá pouze malý krok k získání odhadu normy rozdílu prvních složek zobrazení  $\Phi_{hH}(\varphi_h, g_H)$  a  $\Phi_{hH}(\bar{\varphi}_h, \bar{g}_H)$ . Snadno zjistíme, že  $r_h$  má následující vlastnost monotonie:

$$(\forall v, \bar{v} \in C(\bar{\Gamma}_c)) : \quad v \leq \bar{v} \text{ na } \Gamma_c \Rightarrow r_h v \leq r_h \bar{v} \text{ na } \Gamma_c ,$$

odkud

$$|r_h(|u_{h1}| - |\bar{u}_{h1}|)| \leq r_h |u_{h1} - \bar{u}_{h1}| \quad \text{na } \Gamma_c .$$



Když použijeme tuto nerovnost a postupně zopakujeme kroky z odhadu (4.6), dostaneme:

$$\begin{aligned} \|r_h|u_{h1}| - r_h|\bar{u}_{h1}|\|_{0,\Gamma_c} &\leq \|r_h|u_{h1} - \bar{u}_{h1}|\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq ch\|u_{h1} - \bar{u}_{h1}\|_{1,\Gamma_c} + \|u_{h1} - \bar{u}_{h1}\|_{0,\Gamma_c} \\ &\leq c_2\|u_{h1} - \bar{u}_{h1}\|_{0,\Gamma_c} . \end{aligned}$$

Zkombinujeme-li tento výsledek s (4.15), dostaneme kýžený odhad

$$\begin{aligned} \|r_h|u_{h1}| - r_h|\bar{u}_{h1}|\|_{0,\Gamma_c} &\leq \frac{c_1^2 c_2 c_4}{\alpha} \mathcal{F}_{max} \|g_H - \bar{g}_H\|_{-1/2,h} + \\ &\quad + \frac{c_1^2 c_2 c_3 c_4}{\alpha} lR_2 \|\varphi_h - \bar{\varphi}_h\|_{0,\Gamma_c} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Podobný odhad nyní dokážeme i pro druhé složky zobrazení  $\Phi_{hH}$ . Dosažením  $v_h \in \mathring{V}_h$  do první nerovnice v  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$ , respektive  $(\mathcal{M}(\bar{\varphi}_h, \bar{g}_H))_h^H$  získáme:

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= L(v_h) + [\lambda_H, v_{h2}] \\ a(\bar{u}_h, v_h) &= L(v_h) + [\bar{\lambda}_H, v_{h2}] . \end{aligned}$$

Když obě rovnosti odečteme a využijeme (4.12), (4.13) a (4.14), získáme hledaný odhad pro rozdíl druhých složek:

$$\begin{aligned} \|\lambda_H - \bar{\lambda}_H\|_{-1/2,h} &= \sup_{\substack{v_{h2} \in V_h \\ v_{h2} \neq 0}} \frac{[\lambda_H - \bar{\lambda}_H, v_{h2}]}{\|v_{h2}\|_{1,\Omega}} \leq M\|u_h - \bar{u}_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{Mc_1 c_4}{\alpha} \mathcal{F}_{max} \|g_H - \bar{g}_H\|_{-1/2,h} + \\ &\quad + \frac{Mc_1 c_3 c_4}{\alpha} lR_2 \|\varphi_h - \bar{\varphi}_h\|_{0,\Gamma_c} . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Předchozí odhady použijeme k důkazu následující věty.

**Věta 4.2.** *Nechť  $\Phi_{hH} : X_{hH} \mapsto X_{hH}$  je zobrazení definované v (2.7) a koeficient tření  $\mathcal{F}$  splňuje (1.7) a (3.13). Pak existuje konstanta  $q > 0$  taková, že*

$$\|\Phi_{hH}(\varphi_h, g_H) - \Phi_{hH}(\bar{\varphi}_h, \bar{g}_H)\| \leq q\|(\varphi_h - \bar{\varphi}_h, g_H - \bar{g}_H)\| \quad (4.18)$$

*platí pro všechny dvojice  $(\varphi_h, g_H), (\bar{\varphi}_h, \bar{g}_H) \in X_{hH} \cap B$ . Norma použitá v (4.18) je definovaná vztahem (4.1) a  $B$  je stejná jako v Lemmatu 4.1.*

*Důkaz.* Z definice zobrazení  $\Phi_{hH}$ , normy (4.1) a nerovností (4.16), respektive (4.17) plyne, že stačí položit

$$q = \max\left\{\left(\frac{c_1^2 c_2 c_4}{\alpha} + \frac{M c_1 c_4}{\alpha}\right) \mathcal{F}_{max}, \left(\frac{c_1^2 c_2 c_3 c_4}{\alpha} R_2 + \frac{M c_1 c_3 c_4}{\alpha} R_2\right) l\right\}. \quad (4.19)$$

□

**Důsledek 4.1.** *Pokud jsou  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$  dostatečně malé, je konstanta  $q$  menší než 1 a zobrazení  $\Phi_{hH}$  je kontraktivní vzhledem k normě (4.1).  $\Phi_{hH}$  tedy má právě jeden pevný bod. Navíc metoda postupných aproximací*

$$\left. \begin{array}{l} (\varphi_h^{(0)}, g_H^{(0)}) \in X_{hH} \text{ je dáno;} \\ \text{pro } k = 1, 2, \dots \text{ položíme} \\ (\varphi_h^{(k+1)}, g_H^{(k+1)}) = \Phi_{hH}(\varphi_h^{(k)}, g_H^{(k)}) \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

konverguje pro jakoukoli volbu  $(\varphi_h^{(0)}, g_H^{(0)}) \in X_{hH}$ .

**Poznámka 4.2.** *Předpokládejme nyní, že je splněna Babuška-Brezziho podmínka, tj. existuje konstanta  $\beta > 0$  nezávislá na  $H, h$  taková, že*

$$(\forall \mu_H \in L_H) : \sup_{\substack{z_h \in V_h \\ z_h \neq 0}} \frac{[\mu_H, z_h]}{\|z_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|\mu_H\|_{-1/2, \Gamma_c},$$

kde  $\|\cdot\|_{-1/2, \Gamma_c}$  je norma v  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ . Jelikož platí

$$\beta \|\mu_H\|_{-1/2, \Gamma_c} \leq \|\mu_H\|_{-1/2, h} \leq \|\mu_H\|_{-1/2, \Gamma_c},$$

lze normu  $\|\cdot\|_{-1/2, h}$ , závislou na parametru diskretizace, nahradit normou  $\|\cdot\|_{-1/2, \Gamma_c}$ .

**Poznámka 4.3.** *Je známo, že konstanta  $c_4$  v inverzní nerovnosti (4.14)<sub>2</sub> je úměrná  $1/\sqrt{H}$ , pokud  $\mathcal{T}_H$  patří do systému  $\{\mathcal{T}_H\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  silně regulárních dělení  $\bar{\Gamma}_c$ . Také konstanta  $c_3$  v (4.14)<sub>1</sub> závisí na diskretizaci a chová se jako  $1/\sqrt{h}$ . Podrobnosti o uvedených inverzních nerovnostech a jejich vlastnostech se lze dozvědět v [2] a [9]. Odtud, Poznámky 4.2 a (4.19) vidíme, že k tomu, aby parametry  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$  zajistily kontraktivitu  $\Phi_{hH}$ , je třeba, aby  $\mathcal{F}_{max} \approx \sqrt{H}$  a  $l \approx \sqrt{Hh}$  pro  $H, h \rightarrow 0+$ . Podobný výsledek pro úlohy s Coulombovým třením, kde koeficient tření  $\mathcal{F}$  nezávisí na řešení je dokázán v [11].*

## 5 Numerická realizace 2D úloh

Jak jsme již uvedli v předchozích kapitolách, budeme pro výpočty kontaktních úloh s daným, respektive Coulombovým třením používat metody postupných aproximací (3.15), respektive (4.20). V každém kroku je v obou případech řešena kontaktní úloha s daným třením a koeficientem tření, který nezávisí na řešení. Na základě řešení této úlohy je poté aktualizován koeficient tření  $\mathcal{F}$ , v případě úloh s Coulombovým třením také mez skluzu  $g$ . Jak dále uvidíme, je tato vnitřní úloha stejná pro oba modely tření.

Zobrazení  $\Phi_{hH}$  definované vztahem (2.7) využívá smíšenou formulaci  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$ . Naproti tomu zobrazení  $\Psi_h$  definované v (2.4) využívá pro výpočet  $r_h|u_{h1}|_{\Gamma_c}$  primární formulaci  $(\mathcal{P}(\varphi_h))_h$ . Použijme namísto  $(\mathcal{P}(\varphi_h))_h$  odpovídající smíšenou formulaci

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (u_h, \lambda_H) \in \mathbb{V}_h \times \Lambda_H \text{ takový, že} \\ a(u_h, v_h - u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g, |v_{h1}| - |u_{h1}|] \geq \\ \geq L(v_h - u_h) + [\lambda_H, v_{h2} - u_{h2}] \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \\ [\mu_H - \lambda_H, u_{h2}] \geq 0 \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H. \end{aligned} \right\} (\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$$

Jediný rozdíl mezi  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  a  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$  spočívá v tom, že  $g_H$  je po částech konstantní funkce, kdežto  $g$  je obecná. Jelikož je  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g_H))_h^H$  speciálním případem  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$ , věnujme se realizaci  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$  podrobněji.

Označme  $\{\zeta_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{\theta_i\}_{i=1}^q$  a  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$  báze prostorů  $V_h$ , respektive  $\mathcal{V}_h$  a  $L_H$ . Aby byla zajištěna podmínka (2.6), musí být  $\dim \mathcal{V}_h \geq \dim L_H$ . Připomeňme, že prostor  $\mathcal{V}_h$  je restrikcí prostoru  $V_h$  na  $\Gamma_c$ . Sestává se tedy z po částech lineárních funkcí na dělení  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$ , které se anulují v bodech  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u$ , pokud je tento průnik neprázdný. Ke každé báze funkci  $\theta_i$  prostoru  $\mathcal{V}_h$  existuje právě jeden uzel  $x^{(j)} \in \bar{\Gamma}_c \setminus \bar{\Gamma}_u$  triangulace  $\mathcal{T}_h$  takový, že  $\theta_i(x^{(j)}) = 1$ . Množinu všech těchto uzlů označme  $\mathcal{N}_h$ . Na základě toho definujme zobrazení

$$\Theta : \{1, \dots, q\} \mapsto \{1, \dots, m\} \quad \Theta(i) = j \Leftrightarrow \theta_i(x^{(j)}) = 1,$$

které přiřazuje lokálnímu indexu uzlu dělení  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$  globální index toho samého uzlu nyní uvažovaného v triangulaci  $\mathcal{T}_h$ .

Uveďme nyní algebraickou podobu problému  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$ . Prvky  $v_h = (v_{h1}, v_{h2})$  a  $\mu_H$  prostorů  $\mathbb{V}_h$ , respektive  $L_H$ , budeme ztotožňovat s vektory  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2m}$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ , tj. koeficienty lineární kombinace vzhledem k příslušným báze funkcím:

$$v_{h1} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_{2i-1} \zeta_i, \quad v_{h2} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_{2i} \zeta_i, \quad \mu_H = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\mu}_i \eta_i,$$

kde  $(\mathbf{v}_{2i-1}, \mathbf{v}_{2i}) = (v_{h1}(x^{(i)}), v_{h2}(x^{(i)}))$  a  $\boldsymbol{\mu}_i$  je hodnota  $\mu_H$  na  $S_i$ . Podobně jestliže  $\varphi_h \in \mathcal{V}_h$ , pak  $\varphi_h = \sum_{i=1}^q \varphi_h(x^{(\Theta(i))})\theta_i$ . Pro počítání potřebujeme vyčíslit všechny výrazy ve smíšené formulaci  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$ . Zabýváme se nejprve třecím členem. Nahradíme  $|v_{h1}|$  její Lagrangeovou interpolací  $r_h|v_{h1}|$ :

$$\int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi_h g |v_{h1}| dx_1 \approx \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi_h g r_h |v_{h1}| dx_1 = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g r_h |v_{h1}| dx_1 .$$

Dále v integrálu na pravé straně nahradíme funkci  $\mathcal{F} \circ \varphi_h g|_{S_i}$  její integrální průměrnou hodnotou  $\mathbf{g}_i := (\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g dx_1) / \text{meas } S_i$  na  $S_i$ , kterou vytkneme před integrál. Označíme-li  $\mathbf{B}_1$  matici typu  $(n \times 2m)$  s prvky

$$\mathbf{B}_1^{ij} = \begin{cases} \int_{S_i} \theta_k dx_1 & j = 2l - 1, x^{(l)} \in \mathcal{N}_h, \Theta(k) = l \\ 0 & \text{jinak} , \end{cases} \quad (5.1)$$

můžeme psát:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g r_h |v_{h1}| dx_1 &\approx \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \int_{S_i} r_h |v_{h1}| dx_1 \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \sum_{j=1}^q |v_{h1}(x^{(\Theta(j))})| \int_{S_i} \theta_j dx_1 = \mathbf{g}^\top \mathbf{B}_1 |\mathbf{v}| , \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde jsme využili toho, že  $r_h |v_{h1}(x^{(i)})| = |v_{h1}(x^{(i)})|$  pro všechny  $x^{(i)} \in \mathcal{N}_h$ . Symbolem  $|\mathbf{v}|$  označujeme vektor, jehož složky jsou absolutní hodnoty složek vektoru  $\mathbf{v}$ .

Stejně tak vyjádříme dualitu

$$[\mu_H, v_{h2}] = \int_{\Gamma_c} \mu_H v_{h2} dx_1 = \sum_{i=1}^n \mu_H^{(i)} \sum_{j=1}^q v_{h2}(x^{(\Theta(j))}) \int_{S_i} \theta_j dx_1 = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{v} , \quad (5.3)$$

kde  $\mathbf{B}_2$  je rovněž matice  $(n \times 2m)$  s prvky

$$\mathbf{B}_2^{ij} = \begin{cases} \int_{S_i} \theta_k dx_1 & j = 2l, x^{(l)} \in \mathcal{N}_h, \Theta(k) = l \\ 0 & \text{jinak} . \end{cases} \quad (5.4)$$

Zavedme dále konvexní množinu

$$\boldsymbol{\Lambda}_2 = \mathbb{R}_+^n . \quad (5.5)$$

Vidíme, že  $\mu_H \in \Lambda_H$  právě tehdy, když pro složky vektoru  $\boldsymbol{\mu}$  charakterizujícího prvek  $\mu_H \in L_H$  platí, že  $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_2$ . Algebraická podoba smíšené formulace  $(\mathcal{M}(\varphi_h, g))_h^H$  zní:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Najdi } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{2m} \times \Lambda_2 \text{ takový, že } (\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2m}) (\forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda_2) : \\ & \mathbf{u}^\top \mathbf{A}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{g}^\top \mathbf{B}_1(|\mathbf{v}| - |\mathbf{u}|) \geq \mathbf{b}^\top (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{B}_2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ & (\boldsymbol{\mu}^\top - \boldsymbol{\lambda}^\top) \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice tuhosti a  $\mathbf{b}^\top$  je vektor zatížení. Po dosazení  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, 2\boldsymbol{\lambda}$  do (5.6)<sub>3</sub> vidíme, že

$$\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda_2 .$$

Z této skutečnosti, (5.3) a (5.4) plyne, že  $\mathbf{u} \in \mathbf{K}_{hH}$ , kde

$$\mathbf{K}_{hH} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2m} \mid \sum_{j=1}^q \mathbf{v}_{2\Theta(j)} \int_{S_i} \theta_j dx_1 \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right\} . \quad (5.7)$$

To znamená, že vektoru  $\mathbf{u}$  odpovídá prvek  $u_h \in K_{hH}$ , kde  $K_{hH}$  (viz (2.5)) je obecně *vnější* aproximací množiny  $K$ .

První složka  $\mathbf{u}$  řešení (5.6) je tedy řešením minimizační úlohy:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}_{hH}} \mathbf{J}(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2m}} \sup_{\boldsymbol{\mu}_2 \in \Lambda_2} (\mathbf{J}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\mu}_2^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{v}) , \quad (5.8)$$

kde

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}^\top \mathbf{v} + \mathbf{g}^\top \mathbf{B}_1 |\mathbf{v}|$$

a množina  $\Lambda_2$  je dána vztahem (5.5). Při numerické realizaci však vycházíme z formulace, ve které je nehladký třetí člen odstraněn pomocí Lagrangeova multiplikátoru:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2m}} \sup_{\substack{\boldsymbol{\mu}_1 \in \Lambda_1(\varphi_h, g) \\ \boldsymbol{\mu}_2 \in \Lambda_2}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}^\top \mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_1^\top \mathbf{B}_1^\top \mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_2^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{v} \right) , \quad (5.9)$$

kde množina  $\Lambda_1(\varphi_h, g)$  je definována takto:

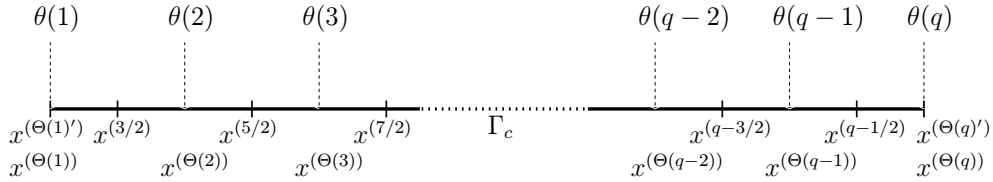
$$\Lambda_1(\varphi_h, g) = \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{\mu}_i| \leq \frac{\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g dx_1}{\text{meas } S_i} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\} . \quad (5.10)$$

Popišme ještě speciální případ, kdy  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$ , tj.  $n = q$ , který, jak uvidíme vede na *vnitřní* aproximaci množiny  $K$ .

Prostor  $L_H$  zkonstruujeme následujícím způsobem. Připomeňme, že  $\mathcal{N}_h = \{x^{(\Theta(i))}\}_{i=1}^q$  značí množinu všech kontaktních uzlů  $\mathcal{T}_h$ , tj. uzlů, které leží na  $\bar{\Gamma}_c \setminus \bar{\Gamma}_u$ . Středů úseček  $[x^{(\Theta(i))}, x^{(\Theta(i+1))}]$ ,  $i = 1, \dots, q$  označme  $x^{(i+1/2)}$ . Dělení  $\mathcal{T}_H = \{S_i\}_{i=1}^q$  hranice  $\bar{\Gamma}_c$  pak vypadá následovně:

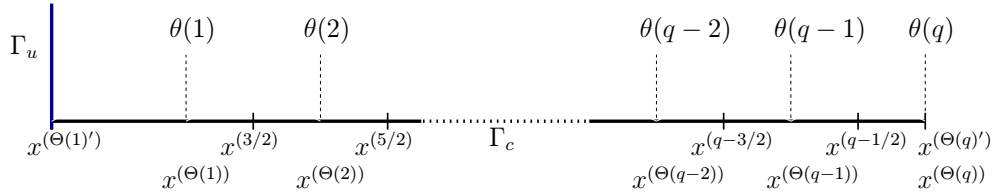
$$\begin{aligned} S_1 &= [x^{(\Theta(1)')}, x^{(3/2)}] \\ S_i &= [x^{(i-1/2)}, x^{(i+1/2)}], \quad i = 2, \dots, q-1 \\ S_q &= [x^{(q-1/2)}, x^{(\Theta(q)')}], \end{aligned}$$

kde definice bodů  $x^{(\Theta(1)')}$  a  $x^{(\Theta(q)')}$  závisí na vzájemné poloze  $\Gamma_c$  a  $\Gamma_u$ . Pokud je  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u = \emptyset$ , definujeme  $x^{(\Theta(j)')} = x^{(\Theta(j))}$ ,  $j = 1, q$ , viz obr. 5.1.



Obr. 5.1 :  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u = \emptyset$

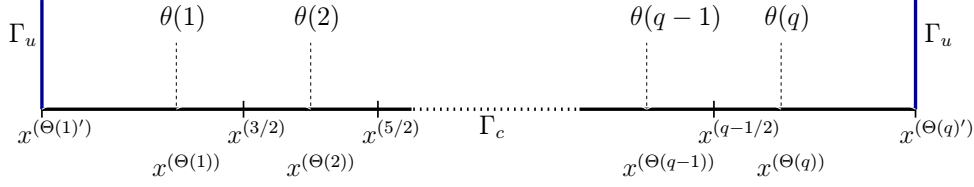
Pokud je průnikem pouze levý krajní bod hranice  $\Gamma_c$ , definujeme tento bod jako  $x^{(\Theta(1)')}$  a  $x^{(\Theta(q)')} = x^{(\Theta(q))}$ , viz obr. 5.2. Obdobným způsobem postupujeme, když  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u$  je pravý krajní bod  $\Gamma_c$ .



Obr. 5.2 :  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u = x^{(\Theta(1)')}$

V případě, že  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u$  jsou oba krajní body  $\Gamma_c$ , definujeme levý krajní bod průniku jako  $\Theta(1)'$ , a pravý krajní bod jako  $\Theta(q)'$ , viz obr. 5.3.

Vidíme, že uvnitř každé úsečky  $S_i$  dělení  $\mathcal{T}_H$  leží právě jeden bod z  $\mathcal{N}_h$ . Pokud k přibližnému výpočtu integrálů (5.2) a (5.3) použijeme obdélníkové



Obr. 5.3 :  $\bar{\Gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_u = \{x^{(\Theta(1)')}, x^{(\Theta(q)')}\}$

pravidlo s uzly v bodech  $\mathcal{N}_h$ , dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi_h g r_h |v_{h1}| dx_1 &\approx \sum_{i=1}^q \overbrace{\mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))}) g(x^{(\Theta(i))})}^{\mathbf{g}^i} |v_{h1}(x^{(\Theta(i))})| \overbrace{meas S_i}^{\mathbf{B}_1^{i,2\Theta(i)-1}} = \\ &= \mathbf{g}^\top \mathbf{B}_1 |\mathbf{v}| \end{aligned} \quad (5.2)'$$

$$\int_{\Gamma_c} \mu_H v_{h2} dx_1 \approx \sum_{i=1}^q \mu_H^{(i)} v_{h2}(x^{(\Theta(i))}) \underbrace{meas S_i}_{\mathbf{B}_2^{i,2\Theta(i)}} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{v} \quad (5.3)'$$

Přitom předpokládáme, že hodnoty  $g$  v bodech z  $\mathcal{N}_h$  jsou definovány (například  $g \in C(\bar{\Gamma}_c)$ ). Z (5.3)' a (5.5) již plyne, že  $u_{h2}(x^{(\Theta(i))}) \geq 0 \forall i = 1, \dots, q$ , neboli  $u_h \in K_h$  (viz (2.3)). Změní se také definice (5.10) množiny  $\Lambda_1(\varphi_h, g)$ :

$$\Lambda_1(\varphi_h, g) = \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{\mu}_i| \leq \mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))}) g(x^{(\Theta(i))}) \forall i = 1, \dots, n\}. \quad (5.10)'$$

Vraťme se k obecnému případu. Smíšenou formulaci (5.9) lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) &\in \mathbb{R}^{2m} \times \Lambda_1(\varphi_h, g) \times \Lambda_2 \text{ takový, že} \\ \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{b} + \mathbf{B}_1^\top \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_2^\top \boldsymbol{\lambda}_2 \\ (\boldsymbol{\mu}_1^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top) \mathbf{B}_1 \mathbf{u} &+ (\boldsymbol{\mu}_2^\top - \boldsymbol{\lambda}_2^\top) \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \geq 0 \\ &\forall \boldsymbol{\mu}_1 \in \Lambda_1(\varphi_h, g) \quad \forall \boldsymbol{\mu}_2 \in \Lambda_2 . \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

K řešení úlohy (5.11) použijeme opět duální přístup. Z rovnice (5.11)<sub>2</sub> vyjádříme

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1^\top \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_2^\top \boldsymbol{\lambda}_2) .$$

Dosazením do nerovnosti (5.11)<sub>3</sub> dostáváme úlohu *kvadratického programování s jednoduchými omezeními* (po složkách), která je formulovaná pouze v Lagrangeových multipliktorech:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) &\in \Lambda_1(\varphi_h, g) \times \Lambda_2 \text{ takový, že} \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) &\leq \mathcal{S}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \quad \forall \boldsymbol{\mu}_1 \in \Lambda_1(\varphi_h, g) \quad \forall \boldsymbol{\mu}_2 \in \Lambda_2 , \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

kde

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\mu}_1^\top, \boldsymbol{\mu}_2^\top] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} - [\mathbf{h}_1^\top, \mathbf{h}_2^\top] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

je duální funkce a

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_j^\top, \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Přitom jak víme z předchozího,  $\boldsymbol{\lambda}_1$ , respektive  $\boldsymbol{\lambda}_2$  mají význam diskrétních tečných, respektive normálových kontaktních napětí.

## 5.1 Minimizace kvadratické funkce s jednoduchými lineárními omezeními

Při hledání pevného bodu metodou postupných aproximací (3.15), respektive (4.20), hledáme v každé iteraci minimum kvadratické funkce na konvexní množině definované *jednoduchými* lineárními omezeními. Tato omezení plynou z definic (5.10) a (5.5) množin  $\boldsymbol{\Lambda}_1(\varphi_h, g)$  a  $\boldsymbol{\Lambda}_2$ :

$$low_i \leq \boldsymbol{\mu}_{1i} \leq up_i, \quad 0 \leq \boldsymbol{\mu}_{2i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.13)$$

kde

$$low_i = -\frac{\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g \, dx_1}{meas S_i}, \quad up_i = \frac{\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g \, dx_1}{meas S_i}, \quad (5.14)$$

respektive

$$low_i = -\mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))})g(x^{(\Theta(i))}), \quad up_i = \mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))})g(x^{(\Theta(i))}) \quad (5.14)'$$

v případě, že použijeme postupu vedoucího na vnitřní aproximaci  $K$ .

Odhlédneme-li od dosavadního značení a zavedeme-li nové, řešíme úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in \Upsilon} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \Upsilon} \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}, \quad \Upsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\}, \quad (5.15)$$

kde symbolem  $\leq$  myslíme nerovnosti mezi odpovídajícími složkami vektorů,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  je symetrická, pozitivně definitní matice a  $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})^{2n}$ . Jak známo, existuje právě jedno řešení (5.15).

Naše úlohy jsou rozměrné ( $2n$  je velké), s rozumně podmíněnou maticí  $\mathbf{A}$ . Řešíme je algoritmem MPRGP popsáním v [3], který kombinuje metodu



sdužených gradientů s vhodnou strategií, která se stará o splnění jednoduchých omezení. Krátce popíšeme jeho základní myšlenky a vlastnosti.

Nejdříve si zavedeme několik označení. Nechť  $\mathcal{N} = \{1, \dots, 2n\}$  je množina všech indexů. Projekci vektoru  $\mathbf{x}$  na množinu  $\Upsilon$  definujme takto:

$$P_{\Upsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} : \quad \mathbf{y}_i = \max\{\mathbf{l}_i, \min\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i\}\} .$$

Gradient  $\mathbf{g} := \mathbf{g}(\mathbf{x})$  funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je roven

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} . \quad (5.16)$$

Řešení  $\bar{\mathbf{x}}$  úlohy (5.15) musí splňovat tyto Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{l}_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{g}}_i \geq 0 \\ \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{u}_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{g}}_i \leq 0 \\ \mathbf{l}_i < \bar{\mathbf{x}}_i < \mathbf{u}_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{g}}_i = 0 , \quad i \in \mathcal{N}, \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{x}}) . \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

Množinu všech indexů  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ , které splňují  $\mathbf{x}_i = \mathbf{l}_i$ , nebo  $\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i$  nazveme *aktivní* množinou:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathcal{N} : (\mathbf{x}_i = \mathbf{l}_i) \vee (\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i)\}$$

a její doplněk  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  do  $\mathcal{N}$  nazveme *volnou* množinou. Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky lze napsat pomocí části gradientu  $\mathbf{g}$ . Definujme proto *volný* gradient  $\boldsymbol{\varphi}$  a *uříznutý* gradient  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \text{ pro } i \in \mathcal{F}(\mathbf{x}) , \quad \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}) \quad (5.18)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } i \in \mathcal{F}(\mathbf{x}) , \quad \boldsymbol{\beta}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_i^{\pm}(\mathbf{x}) \text{ pro } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}) , \quad (5.19)$$

kde  $\mathbf{g}_i^{\pm} = \min\{\mathbf{g}_i, 0\}$  pro  $\mathbf{x}_i = \mathbf{l}_i$ , respektive  $\mathbf{g}_i^{\pm} = \max\{\mathbf{g}_i, 0\}$  pro  $\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i$ . Je vidět, že Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou splněny právě tehdy, když *projektovaný* gradient  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$  je roven nule.

Než přistoupíme k popisu MPRGP, nastíníme jednoduché myšlenky Polyakova algoritmu, které byly jednou z motivací vzniku MPRGP. Algoritmus, který navrhl Polyak, využívá efektivní metody sdužených gradientů k minimalizaci  $f$ , pokud se nemění aktivní množina. Tato minimalizace vede buď k nalezení minima na konvexní množině definované aktivními vazbami, nebo vygeneruje bod mimo množinu  $\Upsilon$ . V prvním případě algoritmus odejme z aktivní množiny indexy, ve kterých jsou narušeny Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky a redukuje tak aktivní množinu. V druhém případě je krok sdužených gradientů zkrácen tak, aby vedl na hranici množiny  $\Upsilon$ , což vede k rozšíření aktivní množiny, obvykle o jeden index. Při každé redukci aktivní množiny

je funkce  $f$  minimizovaná pro stav, ve kterém je  $\mathbf{x}_i = \mathbf{l}_i$ , nebo  $\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i$  pro všechny indexy aktivní množiny. Jelikož Polyakovův algoritmus v každém kroku snižuje hodnotu funkce  $f$ , tento stav nikdy v dalších krocích nenastane. Protože je počet kombinací omezení shora a zdola ve všech indexech aktivní množiny konečný a počet všech různých aktivních množin je rovněž konečný, plyne z finitnosti metody sdružených gradientů, že počet kroků Polyakova algoritmu je také konečný.

Algoritmus MPRGP řešící (5.15) na rozdíl od Polyakova připouští zopakování některých stavů, je však rovněž finitní a je rychlejší. Zahrnuje tři typy kroků, z nichž každý nakládá jiným způsobem s aktivní množinou  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  a obsahuje rozhodovací kritérium, jež určuje, který z těchto kroků vybrat.

*Krok sdružených gradientů:* nová hodnota  $\mathbf{x}$  je definována takto

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_{cg} \mathbf{p}^k, \quad \alpha_{cg} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{p}^k}{(\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{p}^k},$$

kde  $\mathbf{p}^k$  je sdružený gradient. Pokud se jedná o počáteční krok začínající v bodě  $\mathbf{x}^s$ , je  $\mathbf{p}^s = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^s)$ . V následujících krocích je sdružený gradient počítán rekurentně:

$$\mathbf{p}^{k+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k) - \gamma \mathbf{p}^k, \quad \gamma = \frac{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{p}^k}{(\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{A} \mathbf{p}^k}.$$

Základní vlastností sdružených gradientů  $\mathbf{p}^s, \dots, \mathbf{p}^k$  je jejich  $\mathbf{A}$ -ortogonalita, tj.  $(\mathbf{p}^i)^\top \mathbf{A} \mathbf{p}^j = 0$ ,  $i, j \in \{s, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ . Navíc je známo, že

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) = \min_{\mathbf{y} \in \text{Span}\{\mathbf{p}^s, \dots, \mathbf{p}^k\}} f(\mathbf{x}^s + \mathbf{y}).$$

V případě, že se nemění aktivní množina, algoritmus využívá metodu sdružených gradientů k minimizaci  $f$ .

*Expanze aktivní množiny:* při postupných krocích sdružených gradientů je možné, že následující krok  $\mathbf{x}^{k+1} \notin \Upsilon$ . Proveďte se krok zvaný expanze a následně se restartuje metoda sdružených gradientů. Expanze se skládá ze dvou částí. Nejprve se provede krok ve směru sdruženého gradientu, zkrácený na přípustnou množinu, která se tímto krokem o maličko rozšíří:

$$\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}^k - \alpha_\Upsilon \mathbf{p}^k, \quad \alpha_\Upsilon = \max\{\alpha : \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{p}^k \in \Upsilon\}.$$

Následně se provede projektovaný krátký krok ve směru volného gradientu:

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_\Upsilon(\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}} - \bar{\alpha} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}})), \quad \bar{\alpha} \in (0, \|\mathbf{A}^{-1}\|).$$

Tento krok, stejně jako předchozí, snižuje hodnotu minimizované funkce, což zaručuje jeho délka, viz [4]. Na rozdíl od Polyakova algoritmu však může vést k většímu rozšíření aktivní množiny.

*Redukce aktivní množiny–proportioning*: předchozích dva typy kroků využívaly ke snížení hodnoty funkce  $f$  směr  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k)$  volné části projektovaného gradientu  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^k)$ . Krok zvaný proportioning minimalizuje funkci  $f$  ve směru uříznutého gradientu  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k - \alpha_{prop}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k), & \alpha_{prop} &= \min\{\alpha_{\Upsilon}, \alpha_{cg}\} \\ \alpha_{\Upsilon} &= \max\{\alpha : \mathbf{x}^k - \alpha\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k) \in \Upsilon\}, & \alpha_{cg} &= \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^\top \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)}{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)}.\end{aligned}$$

Jelikož se mohou změnit pouze ty složky vektoru  $\mathbf{x}$ , které přísluší aktivní množině, vede proportioning k redukci aktivní množiny.

O tom, kterou složku ( $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k)$  nebo  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)$ ) projektovaného gradientu  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^k)$  použijeme k minimalizaci v následujícím kroku, rozhoduje kritérium:

$$\|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)\|^2 \leq \Gamma^2 \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^k)^\top \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k), \quad (5.20)$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i(\mathbf{x}) = \max\left\{\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{u}_i}{\bar{\alpha}}, \min\left\{\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{l}_i}{\bar{\alpha}}, \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})\right\}\right\}.$$

Pravá strana (5.20) závisí jak na volném gradientu, tak na jeho části, která může být použita v druhé části kroku expanze aktivní množiny. Konstanta  $\Gamma \geq 0$  udává, jak přesně minimalizovat  $f$ , pokud se nezmenšuje aktivní množina. Při volbě  $\Gamma = 0$  se algoritmus chová stejně jako Polyakův, ideální volba je  $\Gamma = 1$ , viz [4]. Pokud je kritérium (5.20) splněno, nazýváme  $\mathbf{x}^k$  *proporcionální* a použijeme krok sdružených gradientů, nebo krok expanze aktivní množiny, pokud by krok sdružených gradientů vedl k narušení podmínky  $\mathbf{x}^{k+1} \in \Upsilon$ . V případě, že kritérium splněno není, použijeme krok redukce aktivní množiny. Takto vypadá stručný zápis algoritmu, kde konstanta  $\epsilon$  říká, jakou požadujeme přesnost:

*Krok 0* {Inicializace.}

Nechť  $k = 0$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{x}^0 - \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^0)$

**dokud**  $\|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^k)\| > \epsilon$

**jestliže**  $\|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k)\|^2 \leq \Gamma^2 \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}^k)^\top \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k)$

*Krok 1* {  $\mathbf{x}^k$  je proporcionální. Zkus sdružené gradienty. }

$\alpha_{cg} = \mathbf{g}^\top \mathbf{p} / \mathbf{p}^\top \mathbf{A}\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{x}^k - \alpha_{cg}\mathbf{p}$

$\alpha_{\Upsilon} = \max\{\alpha : \mathbf{x}^k - \alpha\mathbf{p} \in \Upsilon\}$

**jestliže**  $\alpha_{cg} \leq \alpha_{\Upsilon}$

*Krok 2* {Krok sdružených gradientů.}

$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{g} - \alpha_{cg}\mathbf{A}\mathbf{p}$

$\gamma = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})^\top \mathbf{A}\mathbf{p} / \mathbf{p}^\top \mathbf{A}\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) - \gamma\mathbf{p}$

**jinak**

*Krok 3* {Expanze aktivní množiny.}

$$\mathbf{nx}_1 = \mathbf{x}^k - \alpha_\Upsilon \mathbf{p}, \quad \mathbf{nx}_2 = P_\Upsilon(\mathbf{x}^k - \alpha_{cg} \mathbf{p}),$$

**jestliže**  $f(\mathbf{nx}_1) \leq f(\mathbf{nx}_2)$

$$\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{nx}_1, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g} - \alpha_\Upsilon \mathbf{A} \mathbf{p}$$

**jinak**

$$\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{nx}_2, \quad \mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{b}$$

**konec jestliže**

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_\Upsilon(\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}} - \bar{\alpha} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{k+\frac{1}{2}}))$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{k+1})$$

**konec jestliže**

**jinak**

*Krok 4* {Proportioning - redukce aktivní množiny.}

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}^k), \quad \alpha_{cg} = \mathbf{g}^\top \mathbf{d} / \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d}$$

$$\alpha_\Upsilon = \max\{\alpha : \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{d} \in \Upsilon\}, \quad \alpha_{prop} = \min\{\alpha_\Upsilon, \alpha_{cg}\}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_{prop} \mathbf{d}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{k+1})$$

**konec jestliže**

$k=k+1$

**konec dokud**

*Krok 5* {Konec.}

$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$  .

## 6 Modelové 2D úlohy

Za základ numerických pokusů v této kapitole nám bude sloužit následující úloha. Pružné 2D těleso je reprezentováno obdélníkem  $\Omega = (0, 5) \times (0, 1)$ , jehož rozměry jsou uvedeny v metrech. Mechanické vlastnosti homogenního materiálu, ze kterého je těleso tvořeno, jsou popsány Youngovým modulem pružnosti  $E = 21.19e10$  [Pa] a Poissonovou konstantou  $\sigma = 0.277$ . Předpokládáme rovinnou deformaci, tudíž lineární Hookův zákon mezi tenzory deformace a napětí (s využitím  $\tau_{21} = \tau_{12}$  a  $e_{21} = e_{12}$ ) je definován vztahem:

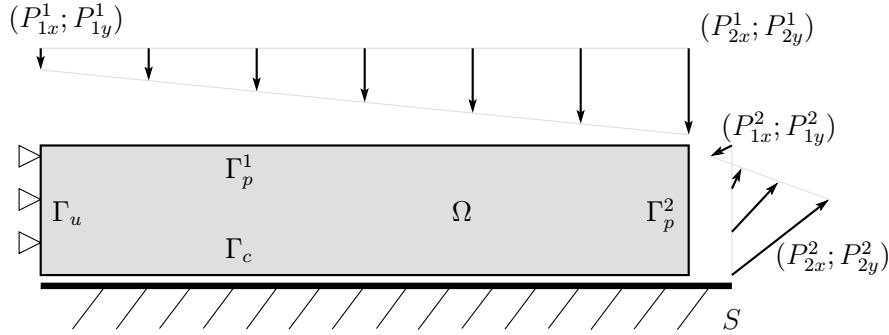
$$(\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}) = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma}{1-\sigma} & 0 \\ \frac{\sigma}{1-\sigma} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{pmatrix}$$

Okrajové podmínky se liší podle toho, o jakou část hranice se jedná, viz obr 6.1. Na části  $\Gamma_u = \{0\} \times (0, 1)$  hranice je těleso upevněno v obou směrech. Ke kontaktu tělesa a tuhého podloží může dojít na části  $\Gamma_c = (0, 5) \times \{0\}$ .

Na zbývající části hranice  $\Gamma_p$  tvořené horní hranou  $\Gamma_p^1 = (0, 5) \times \{1\}$  a pravou hranou  $\Gamma_p^2 = \{5\} \times (0, 1)$  obdélníku  $\Omega$  působí povrchové síly o hustotě  $P = (P_1, P_2)$ , kde

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 0, & P_2 &= (1-\lambda)P_{1y}^1 + \lambda P_{2y}^1, \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{na } \Gamma_p^1 \\ P_1 &= (1-\lambda)P_{1x}^2 + \lambda P_{2x}^2, & P_2 &= (1-\lambda)P_{1y}^2 + \lambda P_{2y}^2, \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{na } \Gamma_p^2, \end{aligned} \right\} (6.1)$$

$$\begin{aligned} P_{1y}^1 &= -1.e6 \text{ [N]}, & P_{2y}^1 &= -15.e6 \text{ [N]}, & P_{1x}^2 &= -5.e6 \text{ [N]}, & P_{2x}^2 &= 20.e6 \text{ [N]}, \\ P_{1y}^2 &= -5.e6 \text{ [N]}, & P_{2y}^2 &= 15.e6 \text{ [N]}. \end{aligned}$$



Obr. 6.1

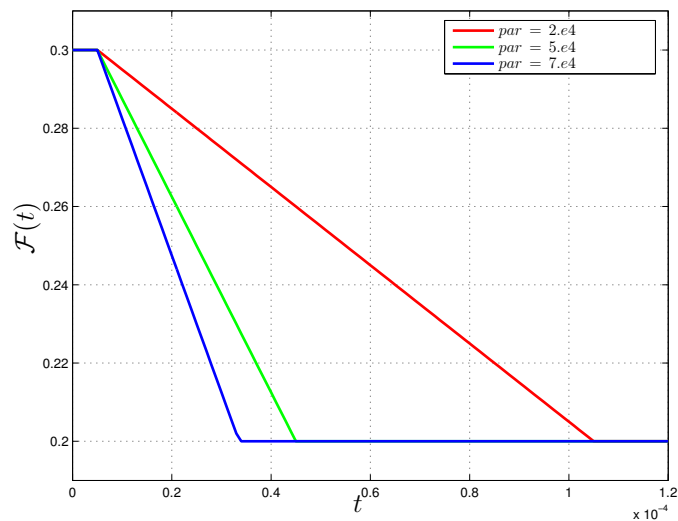
V příkladech byly pro koeficient tření použity dva funkční předpisy a sice:

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} 0.3 & t \in \langle 0, 5.e-6 \rangle \\ 0.3 - \frac{par(0.3-0.2)}{2}(t - 5.e-6) & t \in \langle 5.e-6, 5.e-6 + \frac{2}{par} \rangle \\ 0.2 & t \in \langle 5.e-6 + \frac{2}{par}, \infty \rangle, \end{cases} (6.2)$$

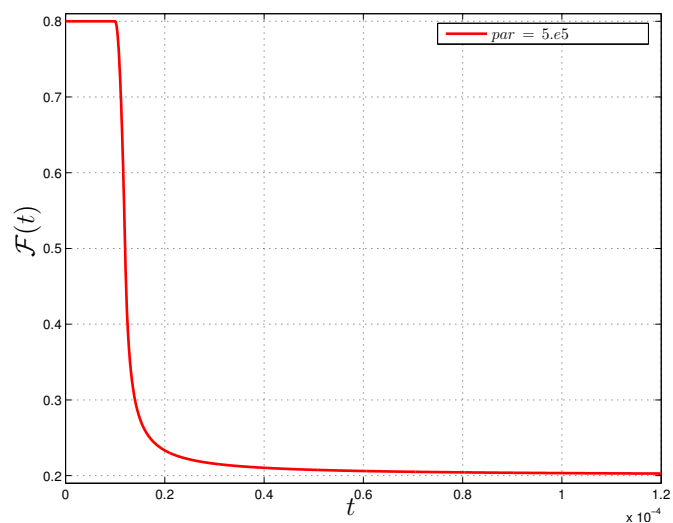
a

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} 0.8 & t \in \langle 0, 1.e-5 \rangle \\ 0.8 - \frac{(0.8-0.2)par^2}{2}(t - 1.e-5)^2 & t \in \langle 1.e-5, 1.e-5 + \frac{1}{par} \rangle \\ 0.2 + \frac{0.8-0.2}{4(t-1.e-5-1/par)par+2} & t \in \langle 1.e-5 + \frac{1}{par}, \infty \rangle. \end{cases} (6.2)'$$

Příklady byly počítány pro tři různé hodnoty  $par$  a sice  $par = 2.e4$ ,  $5.e4$  a  $7.e4$  pro funkční předpis (6.2), respektive jednu hodnotu  $par = 5.e5$  pro předpis (6.2)'. Grafy  $\mathcal{F}$  daného předpisem (6.2), respektive (6.2)' jsou zobrazeny pro tyto parametry na obr. 6.2, respektive 6.3.



Obr. 6.2

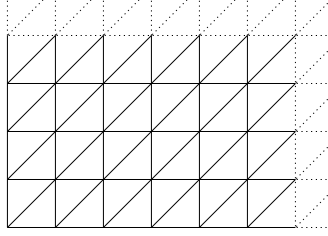


Obr. 6.3

## 6.1 Modelové 2D úlohy s Coulombovým třením

Oblast  $\bar{\Omega}$  pravidelně rozdělíme na  $5n \times n$  obdélníků pro  $n = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84$  a  $96$  a každý z nich rozdělíme na dva trojúhelníky, viz obr. 6.4. Tímto získáme triangulaci  $\mathcal{T}_h$  oblasti  $\bar{\Omega}$ . Posunutí je aproximováno spojitými, po částech lineárními funkcemi nad osmi triangulacemi  $\mathcal{T}_h$ . Počet stupňů

volnosti  $n_p$  primárních proměnných je postupně  $n_p = 1\,560, 6\,000, 13\,320, 23\,520, 36\,600, 52\,560, 71\,400$  a  $93\,120$ .



Obr. 6.4

V úlohách s Coulombovým třením jsme použili pro diskretizaci Lagrangeových multiplikátorů prostor  $L_H$ , pro který jednak  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$  (viz obr. 5.1-5.3), jednak  $\dim \mathcal{V}_h > \dim L_H$ , konkrétně  $H/h = 3$  a  $H/h = 6$  (jinými slovy,  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$  je  $3\times$ , respektive  $6\times$  jemnější než dělení  $\mathcal{T}_H$ ). Ukončovací kritérium bylo zvoleno u všech příkladů stejně a sice:

$$\frac{\|\boldsymbol{\varphi}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varphi}^{(k)}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}^{(k)}\|} + \frac{\|\mathbf{g}^{(k+1)} - \mathbf{g}^{(k)}\|}{\|\mathbf{g}^{(k)}\|} < 10^{-6},$$

kde  $\|\cdot\|$  je Eukleidova norma,  $\boldsymbol{\varphi}^{(k)} \in \mathbb{R}^q$ ,  $\mathbf{g}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  jsou vektory, jejichž složky tvoří  $\varphi_h^{(k)}(x^{(\Theta(i))})$ ,  $i = 1, \dots, q$  a  $\mathbf{g}_j^{(k)}$   $j = 1, \dots, n$ .

V každé iteraci byla úloha kvadratického programování s jednoduchými omezeními řešena algoritmem MPRGP s konstantou  $\Gamma = 1$ , s přesností  $\epsilon = 10^{-9}$  a parametrem  $\bar{\alpha} = 10^{-9}$ . Počáteční iterace metody postupných aproximací byla zvolena vždy  $\boldsymbol{\varphi}^{(0)} = \mathbf{0}$  a  $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$ , která odpovídá kontaktní úloze bez tření.

Tabulka 6.1 popisuje chování algoritmu pro různé diskretizace v případě, že  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$ , který bude v dalším textu označen  $H/h = 1$ . Výpočty byly provedeny pro koeficient  $\mathcal{F}$  daný předpisem (6.2) s parametrem  $par = 2.e4$  a porovnány s úlohou, v níž koeficient  $\mathcal{F} = 0.3$  nezávisí na řešení. Sloupec  $n_p$ , respektive  $n_d$  udává počet primárních, respektive duálních proměnných. Ve sloupci *it* jsou uvedeny počty iterací metody postupných aproximací a ve sloupci  $n_{ndm}$  jsou celkové počty násobení duální maticí. Ve sloupcích *it*,  $n_{ndm}$  a *čas* jsou vždy dvě hodnoty. Vlevo jsou údaje pro úlohu s koeficientem tření závislým na řešení, vpravo pro úlohu s koeficientem tření nezávislým na řešení. Čas výpočtu je uveden v sekundách.

Tabulka 6.2, respektive 6.3 obsahuje tytéž údaje pro  $\dim \mathcal{V}_h > \dim L_H$ ,  $H/h = 3$ , respektive  $H/h = 6$  a tytéž koeficienty tření. V posledních dvou

$n_p$	$n_d$	$it$	$n_{ndm}$	$\check{c}as$
1560	120	12 / 8	441 / 372	4 / 4
6000	240	12 / 8	543 / 492	35 / 31
13320	360	12 / 8	646 / 647	128 / 127
23520	480	12 / 8	727 / 758	324 / 336
36600	600	12 / 8	859 / 850	720 / 710
52560	720	12 / 8	873 / 882	1250 / 1260
71400	840	12 / 8	903 / 987	2100 / 2270
93120	960	13 / 8	990 / 1096	3260 / 3580

Tabulka 6.1 :  $H/h = 1$

$n_p$	$n_d$	$it$	$n_{ndm}$	$\check{c}as$	$chyba_{\Omega}$	$chyba_{\Gamma_c}$
1560	40	13 / 8	324 / 281	4 / 3	$1.7e-2 / 8.8e-3$	$2.0e-2 / 1.3e-2$
6000	80	12 / 8	406 / 349	26 / 23	$2.6e-3 / 1.1e-3$	$3.6e-3 / 1.5e-3$
13320	120	12 / 8	497 / 406	99 / 80	$1.6e-3 / 3.7e-4$	$2.0e-3 / 1.2e-3$
23520	160	12 / 8	565 / 451	253 / 201	$4.6e-4 / 1.1e-4$	$7.6e-4 / 1.9e-4$
36600	200	12 / 8	544 / 559	460 / 469	$1.5e-4 / 2.9e-4$	$2.0e-4 / 5.4e-4$
52560	240	13 / 8	620 / 564	893 / 806	$1.4e-4 / 4.2e-4$	$2.9e-4 / 5.6e-4$
71400	280	12 / 8	668 / 647	1500 / 1450	$1.1e-5 / 2.5e-4$	$4.5e-5 / 3.7e-4$
93120	320	12 / 8	679 / 653	2250 / 2150	$4.0e-5 / 2.4e-4$	$1.5e-4 / 3.3e-4$

Tabulka 6.2 :  $H/h = 3$

$n_p$	$n_d$	$it$	$n_{ndm}$	$\check{c}as$	$chyba_{\Omega}$	$chyba_{\Gamma_c}$
1560	20	14 / 8	253 / 165	3 / 2	$4.3e-2 / 7.6e-2$	$4.9e-2 / 7.8e-2$
6000	40	13 / 8	316 / 249	21 / 16	$1.2e-2 / 6.6e-3$	$1.5e-2 / 1.2e-2$
13320	60	13 / 8	395 / 306	79 / 61	$2.4e-3 / 4.2e-3$	$5.0e-3 / 6.7e-3$
23520	80	12 / 8	383 / 351	173 / 158	$2.3e-3 / 7.2e-4$	$3.3e-3 / 1.2e-3$
36600	100	13 / 8	416 / 389	355 / 328	$3.0e-4 / 3.3e-3$	$5.8e-4 / 4.2e-3$
52560	120	12 / 8	465 / 412	672 / 592	$2.2e-3 / 5.3e-4$	$2.8e-3 / 1.5e-3$
71400	280	13 / 8	537 / 453	1220 / 1020	$1.8e-4 / 7.8e-4$	$7.9e-4 / 1.2e-3$
93120	320	12 / 8	498 / 440	1660 / 1460	$5.6e-4 / 4.5e-4$	$8.9e-4 / 6.1e-4$

Tabulka 6.3 :  $H/h = 6$

sloupcích je uvedena relativní chyba vektoru posunutí  $\mathbf{u}$  na  $\Omega$  a  $\Gamma_c$  vzhledem



k řešení s  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$ , měřená v Eukleidovské normě:

$$\begin{aligned} \text{chyba}_\Omega &= \frac{\|\mathbf{u}^{H/h=1} - \mathbf{u}^{H/h=i}\|}{\|\mathbf{u}^{H/h=1}\|} \\ \text{chyba}_{\Gamma_c} &= \frac{\|\mathbf{u}_{|\Gamma_c}^{H/h=1} - \mathbf{u}_{|\Gamma_c}^{H/h=i}\|}{\|\mathbf{u}_{|\Gamma_c}^{H/h=1}\|}, \quad i = 3, 6. \end{aligned}$$

Připomeňme, že v případě  $H/h = 1$  je množina  $K_h$  *vnitřní* aproximací množiny  $K$ , kdežto množina  $K_{hH}$  pro  $H/h > 1$  je *vnější* aproximací, neboť podmínka nepronikání (1.5) je splněna jen v integrální podobě. Z toho důvodu provádíme srovnání získaných výsledků s případem  $H/h = 1$ , jehož řešení považujeme za „přesné“.

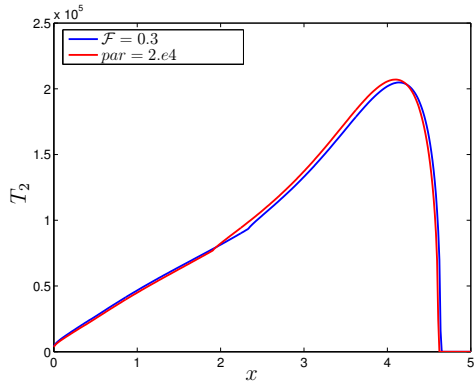
Z tabulek je patrné, že výpočty pro  $\dim \mathcal{V}_h > \dim L_H$  jsou rychlejší, neboť počet duálních proměnných je menší. Chyba oproti  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$  je relativně malá, je však řádově vyšší, než zvolená přesnost výpočtu. Nabízí se ale následující uplatnění vyšší rychlosti výpočtu. Nejprve vyřešíme úlohu při volbě  $\dim \mathcal{V}_h > \dim L_H$ . Řešení spolu s  $(\varphi_h, g_H)$  z poslední iterace pak dáme na vstup úlohy s  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$ .

Z tabulek 6.1-6.3 je patrné, že počet prostých iterací při stejném počátečním přiblížení téměř nezávisí na zvolené diskretizaci. V teoretické části jsme dokázali, že pro dostatečně malé konstanty  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$  je zobrazení  $\Phi_{hH}$  kontraktivní. Z toho lze usuzovat, že počet prostých iterací by měl růst s rostoucími hodnotami  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$ . Provedli jsme tedy výpočty pro  $H/h = 1$  a koeficient tření  $\mathcal{F}$  definovaný v (6.2) s měnícím se parametrem  $par = 2.e4, 5.e4$  a  $7.e4$ , se kterým roste konstanta Lipschitzovskosti  $l$  funkce  $\mathcal{F}$ . Výsledky pro  $n_p = 71400$  (vlevo ve sloupci) a  $n_p = 93120$  (vpravo) jsou shrnuty v tabulce 6.4.

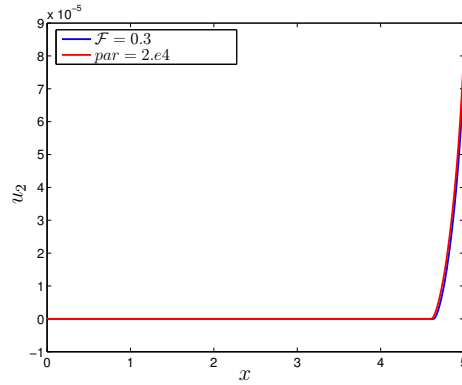
<i>par</i>	<i>it</i>	<i>n<sub>ndm</sub></i>	<i>čas</i>
2.e4	12 / 13	903 / 990	2100 / 3260
5.e4	14 / 14	1265 / 1098	2830 / 3620
7.e4	15 / 14	996 / 1298	2250 / 4270

Tabulka 6.4 :  $H/h = 1$ , různé  $\mathcal{F}$

Na obrázcích 6.5 až 6.6 jsou zobrazena rozložení kontaktních napětí a kontaktních posunutí podél  $\Gamma_c$ . Z obrázku 6.6.b) je patrné, že k většímu skluzu dochází až v druhé polovině  $\Gamma_c$ . Jelikož koeficient tření  $\mathcal{F}$  daný (6.2) je klesající funkcí  $|u_1|$ , nastává skluz dříve a skluz samotný je větší ve srovnání s případem  $\mathcal{F} = 0.3$ . Na obrázcích 6.7 srovnáváme tečné napětí  $T_1$  (plná čára)

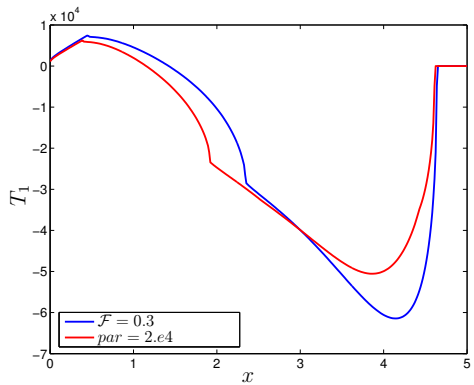


a) normálové napětí na  $\Gamma_c$

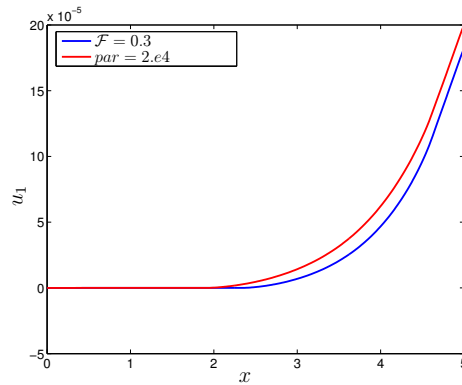


b) normálové posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 6.5

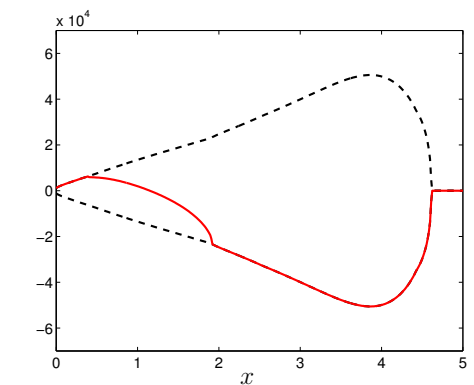


a) tečné napětí na  $\Gamma_c$

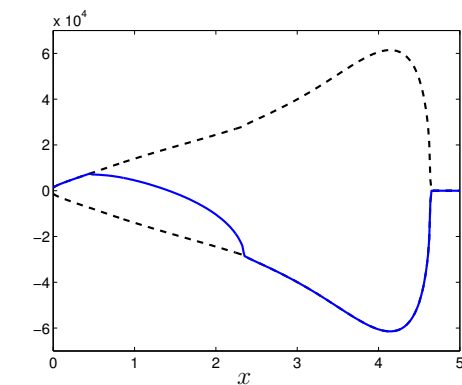


b) tečné posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 6.6



a)  $par = 2.e4$



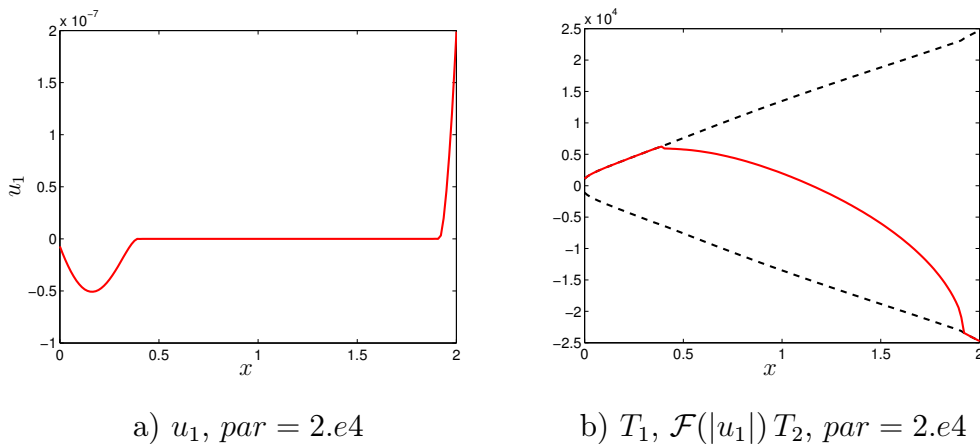
b)  $\mathcal{F} = 0.3$

Obr. 6.7 : srovnání tečného napětí  $T_1$  a součinu  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  na  $\Gamma_c$

se součinem  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  (přerušovaná čára). Vizuálně tak lze ověřit, že platí

$$|T_1| \leq \mathcal{F}(|u_1|)T_2 \quad \text{na } \Gamma_c .$$

Srovnáním obrázků 6.6.b) a 6.7 vidíme, že pokud  $|T_1| < \mathcal{F}(|u_1|)T_2$ , pak ke skluzu nedojde. Dále je z obrázků 6.7 patrné, že  $|T_1| = \mathcal{F}(|u_1|)T_2$  nad dvěma, navzájem oddělenými částmi  $\Gamma_c$ , přičemž znaménko  $T_1$  nad každou z nich je opačné. V souladu s teorií musí v blízkosti  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$  dojít rovněž ke skluzu, ale jeho směr je opačný, než na druhé zóně skluzu. Z tohoto důvodu jsme na obr. 6.8 zobrazili detailně situaci v okolí  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$  (pouze pro koeficient  $\mathcal{F}$  daný (6.2)).



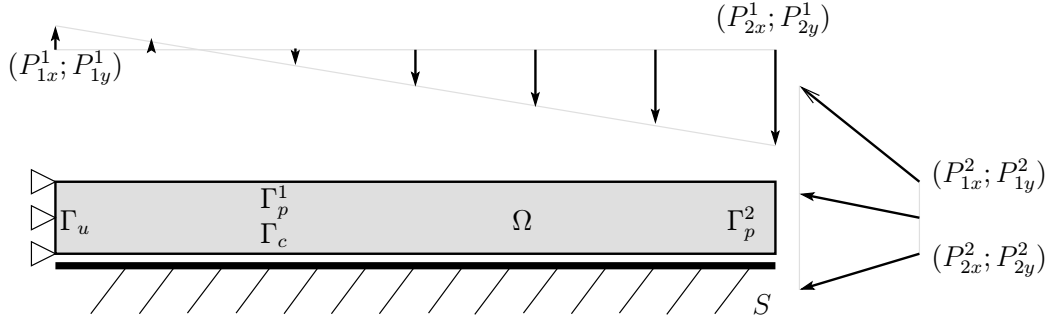
Obr. 6.8

## 6.2 2D úloha s nejednoznačným řešením

Důsledek 4.1 Věty 4 říká, že úloha s Coulombovým třením a koeficientem tření závislým na řešení má jediné řešení, pokud jsou konstanty  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$  charakterizující funkci  $\mathcal{F}$  dostatečně malé. Pokud tento předpoklad není splněný, nemusí metoda postupných iterací konvergovat, nebo může konvergovat (v závislosti na počátečním přiblížení) k různým řešením, to jest k různým pevným bodům  $\Phi_{hH}$ . Ukažme si jednu takovou úlohu s nejednoznačným řešením.

Pružné těleso je reprezentováno obdélníkem  $\Omega = (0, 10) \times (0, 1)$ , proto  $\Gamma_c = (0, 10) \times \{0\}$ ,  $\Gamma_p^1 = (0, 10) \times \{1\}$  a  $\Gamma_p^2 = \{10\} \times (0, 1)$ . Povrchové síly jsou dány opět vztahem (6.1), ale s jinými číselnými hodnotami (viz obr. 6.9):

$$P_{1y}^1 = 1.e6 [N], P_{2y}^1 = -8.e6 [N], P_{1x}^2 = -10.e6 [N], P_{2x}^2 = -10.e6 [N], \\ P_{1y}^2 = 10.e6 [N], P_{2y}^2 = -3.e6 [N].$$



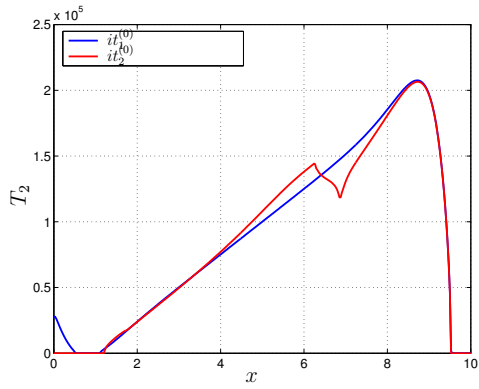
Obr. 6.9

Koeficient tření  $\mathcal{F}$  je definován vztahem (6.2)' s parametrem  $par = 5.e5$  (viz obr. 6.3).

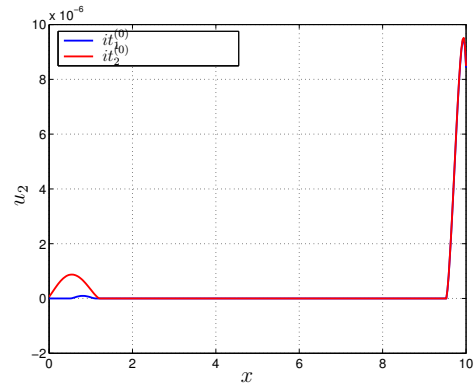
Oblast  $\Omega$  rozdělíme na  $360 \times 36$  obdélníků a každý z nich, stejně jako v odstavci 6.1, rozdělíme na dva trojúhelníky, čímž získáme úlohu s 26640 primárními proměnnými. Pro diskretizaci Lagrangeových multiplikátorů použijeme případ  $H/h = 1$ . Úloha má tedy 720 duálních proměnných. Ukončovací kritérium a parametry algoritmu MPRGP jsme zvolili stejně jako v odstavci 6.1.

Metoda postupných iterací vycházela ze dvou různých počátečních přiblížení. První odpovídalo kontaktní úloze bez tření ( $\varphi^{(0)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$ ), stejně jako v odstavci 6.1. Toto počáteční přiblížení označíme  $it_1^{(0)}$ . Druhé počáteční přiblížení odpovídalo kontaktní úloze s poměrně velkým daným třením ( $\varphi^{(0)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{g}^{(0)} = 1.e8 \cdot \mathbf{1}$ ) a označíme jej  $it_2^{(0)}$ . Těmto různým počátečním přiblížením odpovídají dvě různá řešení. Obě řešení budeme označovat podle jejich počáteční iterace. Ukázalo se, že počet iterací, nutných k dosažení pevného bodu s danou přesností, se pro obě počáteční přiblížení výrazně lišil. Zatímco v případě ( $it_1^{(0)}$ ) se pohyboval kolem deseti, v případě ( $it_2^{(0)}$ ) byl tento počet řádově ve stovkách.

Na obrázcích 6.10 až 6.12 jsou zobrazena rozložení kontaktních napětí a posunutí podél  $\Gamma_c$  pro obě řešení. Na obrázku 6.11.b) je vidět nejvýraznější rozdíl mezi nimi. U řešení, které má za počáteční přiblížení kontaktní úlohu bez tření ( $it_1^{(0)}$ ), dochází ke skluzu po celé délce kontaktu. Naproti tomu v druhém případě ( $it_2^{(0)}$ ) dochází ke skluzu až v druhé polovině  $\Gamma_c$ . V důsledku toho a definice  $\mathcal{F}$  se v obou případech výrazně liší součin  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  a tím

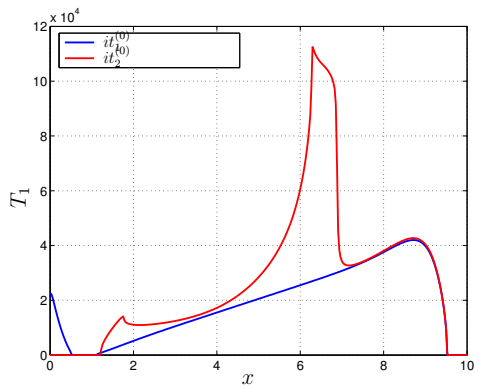


a) normálové napětí na  $\Gamma_c$

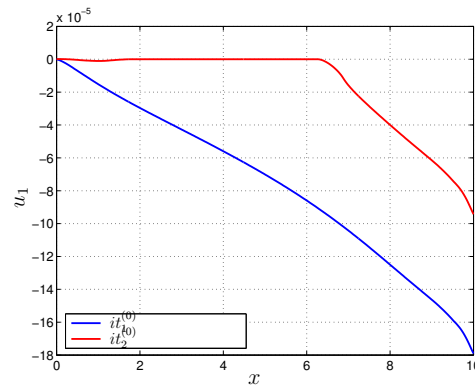


b) normálové posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 6.10

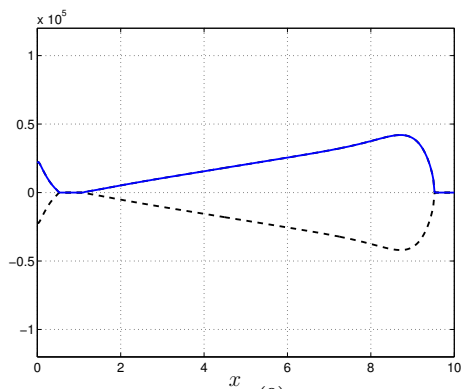


a) tečné napětí na  $\Gamma_c$

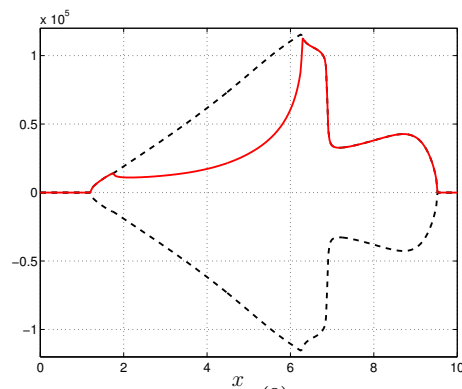


b) tečné posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 6.11



a)  $it_1^{(0)}$

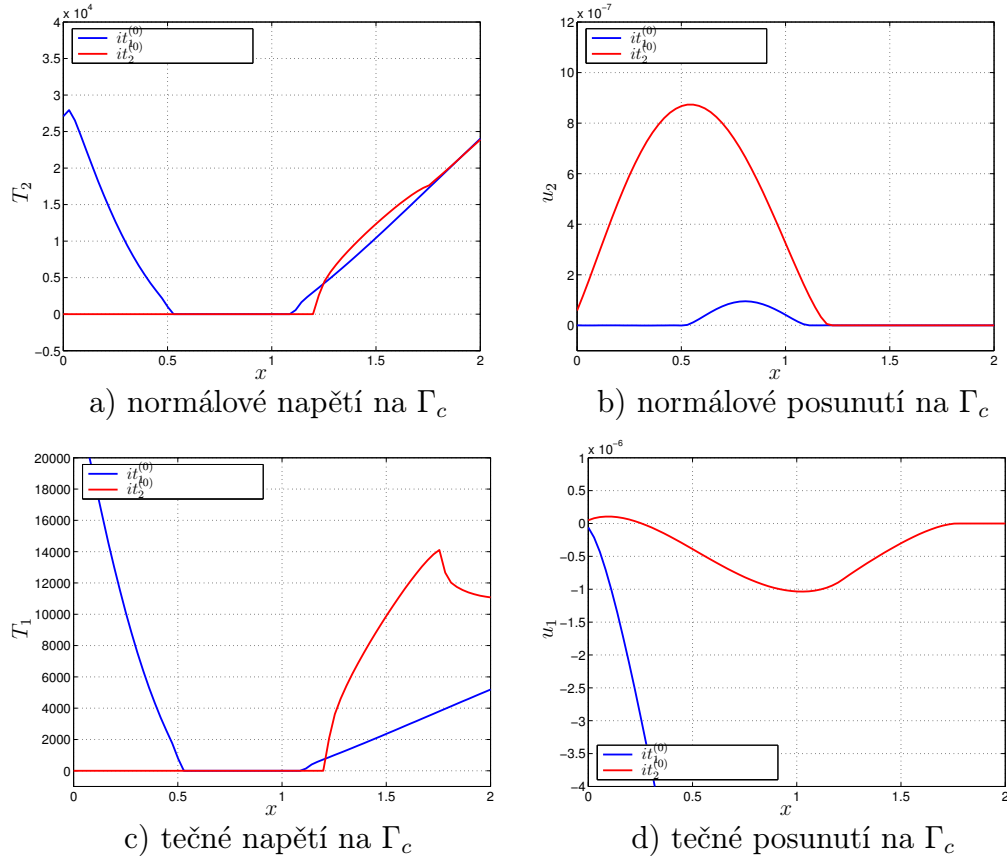


a)  $it_1^{(0)}$

Obr. 6.12 : srovnání tečného napětí  $T_1$  a součinu  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  na  $\Gamma_c$

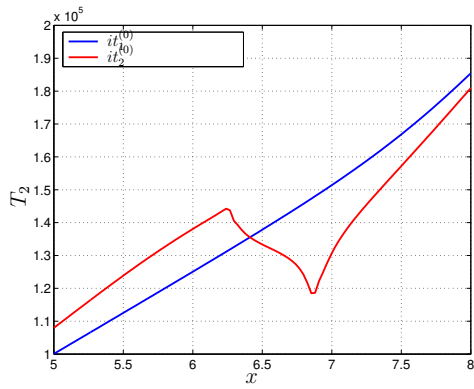
pádem také tečné napětí (viz obr. 6.12). Plná čára opět odpovídá  $T_1$ , zatímco přerušované odpovídají součinu  $\pm \mathcal{F}(|u_1|)T_2$ .

Abychom byli přesní, u řešení  $(it_2^{(0)})$  dochází ke skluzu také na krátkém úseku v okolí  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$  (viz obr. 6.13.d)). Na části tohoto úseku dochází také k posunu v normálovém směru, což znamená, že těleso není v kontaktu s podložím (detail viz obr 6.13.b)). Ke skluzu dochází v těsném sousedství části, která není v kontaktu (srovnej 6.13.b) a 6.13.d)).

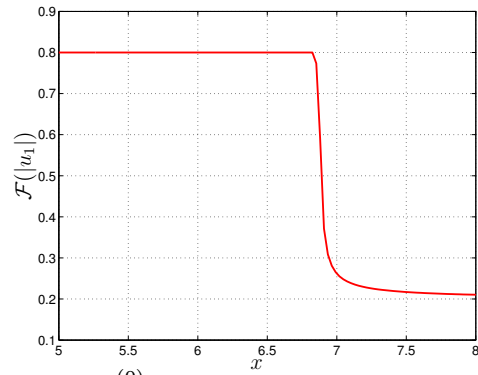


Obr. 6.13 : Detail  $\Gamma_c$  - interval  $\langle 0, 2 \rangle$

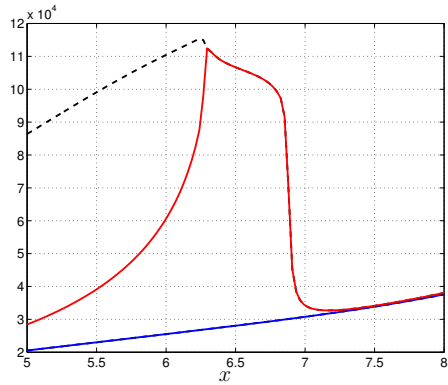
Největší rozdíl mezi průběhem normálového napětí obou řešení je „kmit“  $T_2$  v případě  $(it_2^{(0)})$ , viz obr. 6.10.a). Z detailů na obrázcích 6.14.a) a 6.14.c) je patrné, že k němu dochází v místě, kde začíná zóna skluzu. Z rozložení povrchových sil na obr. 6.9 je patrné, že tyto na  $\Gamma_p^2$  působí ve směru proti vetknutí na  $\Gamma_u$ . Těleso je tak stlačováno ve směru osy  $x$ , což je patrné na obr. 6.15.a), který znázorňuje těleso po deformaci (posunutí je zvětšeno  $7000\times$ ).



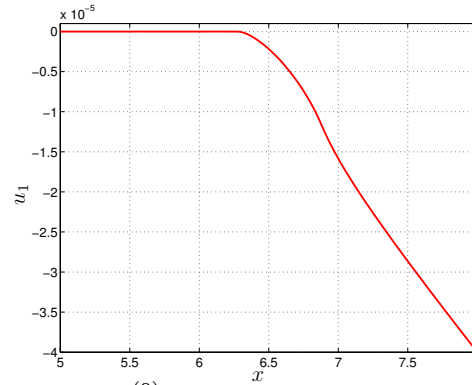
a) normálové napětí na  $\Gamma_c$



b)  $(it_2^{(0)})$ -průběh koeficientu tření na  $\Gamma_c$

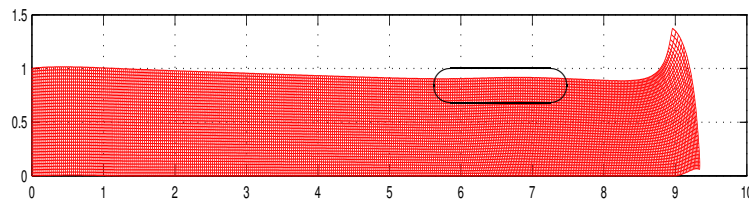


c) tečné napětí na  $\Gamma_c$

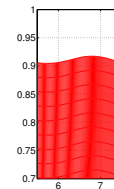


d)  $(it_2^{(0)})$ -tečné posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 6.14 : Detail  $\Gamma_c$  - interval  $\langle 5, 8 \rangle$



a)  $(it_2^{(0)})$ -těleso po deformaci, posunutí zvětšeno  $7000\times$

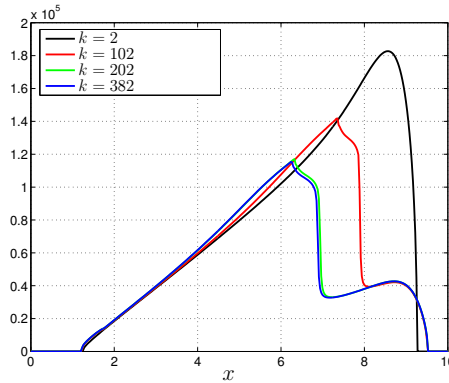


b) „hrb“

Obr. 6.15

Z obrázků 6.14.a),b) a d) je patrné, že ke „kmitu“  $T_2$  dochází na intervalu ohraničeném počátkem skluzu a bodem, kde dochází k prudké změně  $\mathcal{F}$ . Podél tohoto intervalu působí proti posunutí poměrně velké třecí síly (viz obr. 6.14.c)), které brání materiálu v posunu proti směru osy  $x$ . Tyto síly spolu s  $x$ -ovými složkami sil na  $\Gamma_p^2$  vytvoří dvojici, která stlačuje materiál. Ten nemá možnost proniknout tuhým podložím a tudíž vytvoří malý „hrb“ (viz obr. 6.15.b)) s vrcholem nad bodem, kde dochází k prudké změně koeficientu tření. Vnitřní síly v tomto „hrbu“ působí proti zatížení shora a způsobí tak pokles normálového napětí.

Jak jsme již řekli, počet iterací pro počáteční přiblížení  $it_2^{(0)}$  je poměrně velký. V první iteraci totiž dojde ke skluzu pouze na malé části hranice  $\Gamma_c$ . V průběhu dalších iterací dochází k postupnému „odtrhávání“ bodů. Průběh  $\mathcal{F}(|u_1^{(k)}|)T_2^{(k)}$  pro vybrané iterace je na obr. 6.16.



Obr. 6.16:  $\mathcal{F}(|u_1^{(k)}|)T_2^{(k)}$

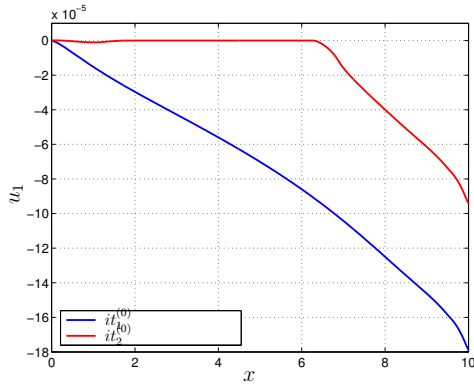
Ukázali jsme příklad, který má alespoň dvě různá řešení. Pokud budeme měnit funkci  $\mathcal{F}$  tak, že se budou zmenšovat konstanty  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$ , musí v souladu s Důsledkem 4.1 dojít k situaci, kdy má úloha jediné řešení. Pro tyto účely nahradíme funkci  $\mathcal{F} := \mathcal{F}(|u_1|)$  danou vztahem (6.2)' s parametrem  $par = 5.e5$  funkcí

$$\mathcal{F}_\xi := \xi \mathcal{F}(|u_1|) , \quad \xi \in (0, 1) .$$

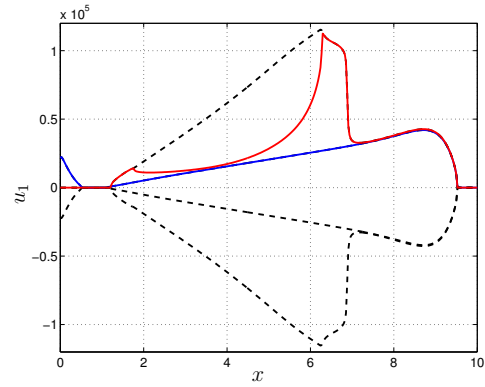
Budeme-li snižovat parametr  $\xi$ , budou se také snižovat konstanty  $\mathcal{F}_{max}$  a  $l$  funkce  $\mathcal{F}_\xi$ .

Podle výpočtů, které jsme provedli, má úloha jednoznačné řešení pro  $\xi \leq 0.9858$ . Grafy tečného posunutí,  $T_1$  a součinu  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  pro  $\xi = 1, 0.98581, 0.9858$  a obě počáteční iterace jsou na obr. 6.17-6.19.



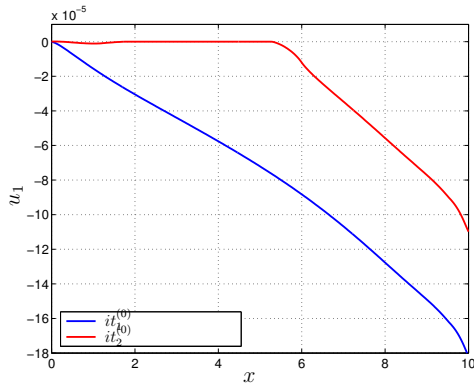


a) tečné posunutí na  $\Gamma_c$

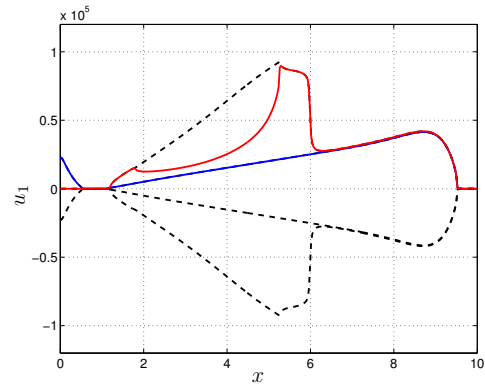


b) srovnání  $T_1$  s  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  na  $\Gamma_c$

Obr. 6.17 :  $\xi = 1$

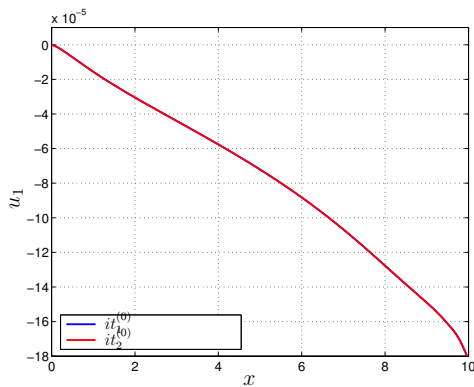


a) tečné posunutí na  $\Gamma_c$

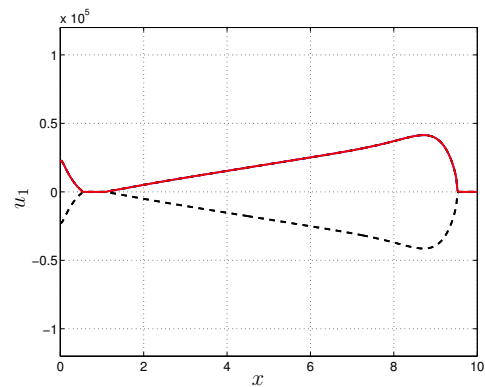


b) srovnání  $T_1$  s  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  na  $\Gamma_c$

Obr. 6.18 :  $\xi = 0.98581$



a) tečné posunutí na  $\Gamma_c$



b) srovnání  $T_1$  s  $\mathcal{F}(|u_1|)T_2$  na  $\Gamma_c$

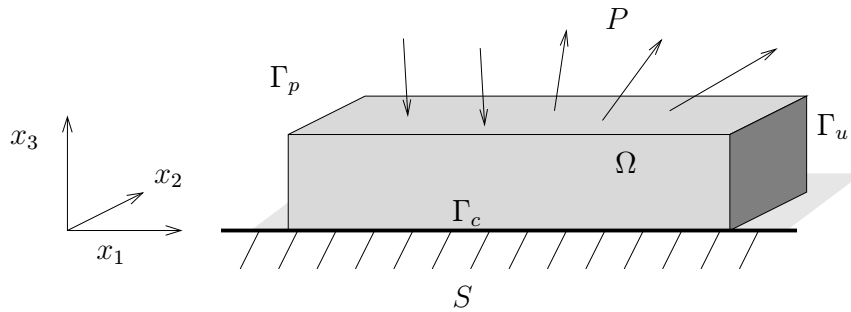
Obr. 6.19 :  $\xi = 0.9858$

## Část II

# 3D úlohy

## 7 Formulace 3D kontaktních úloh se třením

Doposud jsme se zabývali 2D úlohami. Získané výsledky v této kapitole rozšíříme na 3D úlohy, u nichž se zaměříme pouze na úlohu s Coulombovým třením. Úlohu s daným třením již zkoumat nebudeme. Zformulujeme 3D kontaktní úlohu pro pružné těleso spočívající na dokonale tuhém podloží, kde na kontaktu dochází ke tření, modelovaném Coulombovým zákonem. Předpokládáme rovněž jednoduchou geometrii úlohy, danou obr. 7.1.



Obr. 7.1

Budeme si všimnout především rozdílů oproti kapitole 1. Pružné těleso je reprezentováno oblastí  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  s Lipschitzovskou hranicí  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_p \cup \bar{\Gamma}_c$  a tuhé podloží poloprostorem  $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq 0\}$ . Ke kontaktu tedy může dojít pouze v rovině  $x_3 = 0$ . Mezi  $\Omega$  a  $S$  je před deformací opět nulová vzdálenost.

V definici klasického řešení stále platí vztahy (1.1)–(1.4), s tím rozdílem, že indexy  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ . Opět předpokládáme, že koeficienty  $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$  z (1.2) splňují podmínky symetrie a elipticity. S ohledem na zvolenou geometrii úlohy, tečné a normálové složky vektorů posunutí, respektive napětí na  $\Gamma_c$  jsou dány takto:

$$\begin{aligned} u_n &= -u_3, & u_t &= [u_1, u_2, 0] \\ T_n &= -T_3, & T_t &= [T_1, T_2, 0]. \end{aligned}$$

Podmínky nepronikání jsou vyjádřeny těmito vztahy:

$$u_3 \geq 0, \quad T_3 \geq 0, \quad u_3 T_3 = 0 \quad \text{na } \Gamma_c. \quad (7.1)$$

Nejvíce se oproti 2D úlohám změní podmínky tření. Jelikož má vektor tečného posunutí tentokrát dvě složky, je velikost tohoto vektoru (na níž závisí koeficient tření) rovna jeho Eukleidovské normě:

$$\|(u_1, u_2)\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \quad (7.2)$$

Nechť koeficient tření  $\mathcal{F}$  splňuje (1.7). Podmínky tření v 3D pak mají tvar:

$$\left. \begin{aligned} (u_1, u_2)(x) = \mathbf{0} &\Rightarrow \|(T_1, T_2)(x)\| \leq \mathcal{F}(0) T_3(x); \\ (u_1, u_2)(x) \neq \mathbf{0} &\Rightarrow \\ (T_1(x), T_2(x)) &= -\mathcal{F}(\|(u_1, u_2)(x)\|) T_3(x) \frac{(u_1, u_2)(x)}{\|(u_1, u_2)(x)\|}, \quad x \in \Gamma_c. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

*Klasickým řešením 3D kontaktní úlohy s Coulombovským třením nazveme takový dostatečně hladký vektor posunutí  $u$ , který vyhovuje podmínkám (1.1)–(1.4) (pro  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ), (7.1) a (7.3).*

Také definice některých prostorů musí respektovat jednu dimenzi úlohy navíc:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= V \times V \times V, \\ K &= \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{V} \mid v_3 \geq 0 \quad \text{s.v. na } \Gamma_c\}, \end{aligned}$$

kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_u\}.$$

**Definice 7.1** Slabým řešením 3D kontaktní úlohy s Coulombovým třením nazveme vektor posunutí  $u$ , splňující implicitní variační nerovnici:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } u \in K \text{ takové, že } (\forall v \in K) : \\ a(u, v-u) + \langle \mathcal{F} \circ \|(u_1, u_2)\| T_3(u), \|(v_1, v_2)\| - \|(u_1, u_2)\| \rangle \\ \geq L(v-u), \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}_c^{3D})$$

kde lineární zobrazení  $L$  a bilineární forma  $a$  jsou dány stejnými vztahy jako v kapitole 1.

**Poznámka 7.1.** Z důvodu jednoduchosti značení užíváme v Definicí 7.1 a v dalším textu této konvence:  $\|(v_1, v_2)\| := \|(v_1, v_2)|_{\Gamma_c}\|$ .

Libovolné dvojici  $(\varphi, g) \in X$  odpovídá jednoznačně řešitelná pomocná úloha s daným třením a koeficientem tření nezávislým na řešení:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Najdi } u := u(\varphi, g) \in K \text{ takové, že } (\forall v \in K) : \\ a(u, v - u) + \langle \mathcal{F} \circ \varphi g, \|(v_1, v_2)\| - \|(u_1, u_2)\| \rangle \geq L(v - u) . \end{array} \right\} (\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$$

Připomínáme, že  $X = H_+^{1/2}(\Gamma_c) \times H_+^{-1/2}(\Gamma_c)$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  značí dualitu mezi  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  a  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ . Jelikož řešení  $u$  pomocné úlohy  $\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g)$  patří do prostoru  $(H^1(\Omega))^3$ , lze snadno ukázat, že  $\|(u_1, u_2)\| \in H_+^{1/2}(\Gamma_c)$ . To nám opět umožňuje definovat zobrazení  $\Phi : X \mapsto X$  vztahem

$$\Phi(\varphi, g) = (\|(u_1, u_2)\|, T_3(u)) \quad (\varphi, g) \in X . \quad (7.4)$$

Srovnáním  $(\mathcal{P}_c^{3D})$ ,  $(\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$  a (7.4) opět vidíme, že  $u$  řeší  $(\mathcal{P}_c^{3D})$  právě tehdy, když je dvojice  $(\|(u_1, u_2)\|, T_3(u))$  pevným bodem zobrazení  $\Phi$  na  $X$ . Tento opět budeme hledat pomocí metody postupných iterací.

Stejně jako v kapitole 1 zbývá ještě uvést smíšenou variační formulaci problému  $(\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$ . V dalším textu předpokládáme, že mez skluzu  $g$  v úloze  $(\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$  je z prostoru  $L_+^2(\Gamma_c)$ . Řešení  $u$  úlohy  $(\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$  lze ekvivalentně charakterizovat takto:

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) + \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi g \|(v_1, v_2)\| dx_1 dx_2 - L(v) \right\} .$$

Označíme-li

$$\mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) - \langle \mu_1, v_1 \rangle - \langle \mu_2, v_2 \rangle - \langle \mu_3, v_3 \rangle , \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\varphi, g) &= \{(\mu_1, \mu_2) \in (L^2(\Gamma_c))^2 \mid \|(\mu_1, \mu_2)\| \leq \mathcal{F} \circ \varphi g \text{ s.v. na } \Gamma_c\} , \\ \Lambda_2 &= H_+^{-1/2}(\Gamma_c) , \end{aligned}$$

lze omezení  $v \in K$  a nediferencovatelný člen, obsahující Eukleidovskou normu, odstranit pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Platí, že

$$\min_{v \in K} J(v) = \min_{v \in \mathbb{V}} \sup_{\substack{(\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1(\varphi, g) \\ \mu_3 \in \Lambda_2}} \mathcal{L}(v, \mu_1, \mu_2, \mu_3) , \quad (7.6)$$

neboť

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi g \|(v_1, v_2)\| dx_1 dx_2 &= \sup_{(\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1(\varphi, g)} \int_{\Gamma_c} (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) dx_1 dx_2 , \\ \sup_{\mu_3 \in \Lambda_2} -\langle \mu_3, v_3 \rangle &= \begin{cases} 0 & v \in K \\ \infty & v \notin K . \end{cases} \end{aligned}$$

Smíšenou variační formulací úlohy  $(\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$  nazveme úlohu

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{V} \times \Lambda_1(\varphi, g) \times \Lambda_2 \text{ takový, že} \\ a(u, v) = L(v) + [\lambda_1, v_1] + [\lambda_2, v_2] + \langle \lambda_3, v_3 \rangle \quad \forall v \in \mathbb{V}, \\ [\mu_1 - \lambda_1, u_1] + [\mu_2 - \lambda_2, u_2] + \langle \mu_3 - \lambda_3, u_3 \rangle \geq 0 \\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1(\varphi, g), \quad \forall \mu_3 \in \Lambda_2. \end{aligned} \right\} (\mathcal{M}^{3D}(\varphi, g))$$

Symbol  $[ \cdot, \cdot ]$  opět značí skalární součin v  $L^2(\Gamma_c)$ . Problém  $(\mathcal{M}^{3D}(\varphi, g))$  má jediné řešení  $(u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , přičemž první složka  $u$  je řešením  $(\mathcal{P}^{3D}(\varphi, g))$  a Lagrangeovy multiplikátory odpovídají kontaktním napětím, tj.  $\lambda_1 = T_1(u)$ ,  $\lambda_2 = T_2(u)$  a  $\lambda_3 = T_3(u)$  na  $\Gamma_c$ . Toto nám umožňuje definovat zobrazení  $\Phi$  ekvivalentně následujícím způsobem:

$$\Phi(\varphi, g) = (\|(u_1, u_2)\|, \lambda_3). \quad (7.7)$$

## 8 Diskretizace 3D úloh s Coulombovým třením

Z důvodu rozsahu práce nebudeme uvádět analýzu 3D úloh, která je velice podobná analýze 2D úloh (viz kapitola 3) a plynou z ní stejné závěry. Před pojednáním o numerických experimentech se krátce zmíníme o diskretizaci úlohy. Od této chvíle předpokládáme, že  $\Omega$  je *polytopická* oblast.

O každém dělení  $\mathcal{T}_h$  množiny  $\bar{\Omega}$  na *čtyřstěny* předpokládáme, že patří do regulárního systému dělení  $\{\mathcal{T}_h\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  takového, že  $\{\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}\}$ ,  $h \rightarrow 0+$  je silně regulární dělení  $\bar{\Gamma}_c$ . Nechť  $\{\mathcal{T}_H\}$ ,  $H \rightarrow 0+$  je regulární systém dělení  $\bar{\Gamma}_c$  na čtyřúhelníky  $S_i$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , jejichž průměr je omezen  $H$ . Stejně jako v předchozí kapitole si budeme všimnout hlavně rozdílu oproti diskretizaci 2D úloh. Označme

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_h &= V_h \times V_h \times V_h, \\ K_h &= \{v_h = (v_{h1}, v_{h2}, v_{h3}) \in \mathbb{V}_h \mid v_{h3} \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Definice prostorů  $V_h$ ,  $\mathcal{V}_h$ ,  $L_H$  a množin  $\mathcal{V}_h^+$ ,  $\Lambda_H$  a  $X_{hH}$  zůstávají stejné jako v odstavcích 2.1 a 2.2 jen s tím rozdílem, že funkce jsou definovány nad dělením objektů o jednu dimenzi vyšší.

Nechť  $(\varphi_h, g_H) \in X_{hH}$  je daný. Podobně jako u 2D úloh nejprve uvedeme definici aproximace smíšené variační formulace, ve které zůstává třetí člen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (u_h, \lambda_H) \in \mathbb{V}_h \times \Lambda_H \text{ takový, že} \\ a(u_h, v_h - u_h) + [\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H, \|(v_{h1}, v_{h2})\| - \|(u_{h1}, u_{h2})\|] \\ \geq L(v_h - u_h) + [\lambda_H, v_{h3} - u_{h3}] \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \\ [\mu_H - \lambda_H, u_{h3}] \geq 0 \quad \forall \mu_H \in \Lambda_H. \end{aligned} \right\} (\mathcal{M}^{3D}(\varphi_h, g_H))_h^H$$

Podmínka nepronikání je splněna opět ve slabší (integrální) podobě, protože z druhé nerovnosti v  $(\mathcal{M}^{3D}(\varphi_h, g_H))_h^H$  plyne, že  $u_h$  patří do množiny  $K_{hH}$ , kde

$$K_{hH} = \{v_h \in \mathbb{V}_h \mid \int_{S_i} v_{h3} dx_1 dx_2 \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}\} . \quad (8.2)$$

$K_{hH}$  je tedy externí aproximací množiny  $K$ .

Pokud používáme pouze taková dělení  $\mathcal{T}_H$  a  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$ , pro které je zajištěno splnění podmínky (2.6), má úloha  $(\mathcal{M}^{3D}(\varphi_h, g_H))_h^H$  právě jedno řešení  $(u_h, \lambda_H)$ . Jelikož  $\lambda_H$  aproximuje  $\lambda_3$ , považujeme za aproximaci  $\Phi$  zobrazení  $\Phi_{hH} : X_{hH} \mapsto X_{hH}$ , definované vztahem

$$\Phi_{hH}(\varphi_h, g_H) = (r_h \|(u_{h1}, u_{h2})\|, \lambda_H) , \quad (\varphi_h, g_H) \in X_{hH} , \quad (8.3)$$

kde  $r_h : C(\bar{\Gamma}_c) \mapsto \mathcal{V}_h$  je Lagrangeova interpolace na  $\bar{\Gamma}_c$ .

**Definice 8.1** Řekneme, že  $u_h \in \mathbb{V}_h$  je řešením diskrétní kontaktní úlohy s Coulombovým třením, jestliže dvojice  $(r_h \|(u_{h1}, u_{h2})\|, \lambda_H)$  je pevným bodem zobrazení  $\Phi_{hH}$  na množině  $X_{hH}$ .

## 9 Numerická realizace 3D úloh

V kapitole 5 jsme popsali, jak převést diskrétní 2D kontaktní úlohu do algebraického tvaru. Ten vedl na úlohu minimizace kvadratické funkce s jednoduchými omezeními. Uvedli jsme algoritmus MPRGP, kterým lze tuto úlohu efektivně řešit. V této kapitole uvedeme algebraický tvar pro 3D úlohu, která tentokrát vede na minimizaci kvadratické funkce s jednoduchými lineárními a se *separovanými kvadratickými* omezeními. Rovněž krátce popíšeme algoritmus, kterým tuto minimizační úlohu řešíme.

Báze prostorů  $V_h$ ,  $\mathcal{V}_h$  a  $L_H$  opět označíme  $\{\zeta_i\}_{i=1}^m$ ,  $\{\theta_i\}_{i=1}^q$ , respektive  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ . Rovněž nebudeme měnit definice zobrazení  $\Theta$  a množiny  $\mathcal{N}_h$  z kapitoly 5. Jednotlivé složky  $v_{h1}, v_{h2}, v_{h3} \in V_h$  prvku  $v_h \in \mathbb{V}_h$ , respektive  $\mu_H \in L_H$ , ztotožníme s vektory  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \in \mathbb{R}^m$ , respektive  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ , což jsou koeficienty lineární kombinace vzhledem k příslušným bázevým funkcím:

$$v_{h1} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i^1 \zeta_i , \quad v_{h2} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i^2 \zeta_i , \quad v_{h3} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i^3 \zeta_i , \quad \mu_H = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\mu}_i \eta_i ,$$

kde

$$\mathbf{v}_i^1 = v_{h1}(x^{(i)}) , \quad \mathbf{v}_i^2 = v_{h2}(x^{(i)}) , \quad \mathbf{v}_i^3 = v_{h3}(x^{(i)}) , \quad \boldsymbol{\mu}_i = \mu_H|_{S_i} .$$

Symbolem  $\|\mathbf{v}^{12}\|$  označme vektor z  $\mathbb{R}^m$ , jehož složky definujeme takto:

$$\|\mathbf{v}^{12}\|_i = \sqrt{(\mathbf{v}_i^1)^2 + (\mathbf{v}_i^2)^2}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Prvek  $v_h \in \mathbb{V}_h$  ztotožníme s vektorem  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3m}$ , který obdržíme z vektorů  $\mathbf{v}^1$ ,  $\mathbf{v}^2$  a  $\mathbf{v}^3$  následujícím způsobem:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^3, \mathbf{v}_2^1, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_2^3, \mathbf{v}_3^1, \mathbf{v}_3^2, \mathbf{v}_3^3, \dots, \mathbf{v}_m^1, \mathbf{v}_m^2, \mathbf{v}_m^3]^\top.$$

Označme  $\mathbf{B}$  matici typu  $(n \times m)$  s prvky

$$\mathbf{B}^{ij} = \begin{cases} \int_{S_i} \theta_l dx_1 dx_2 & x^{(j)} \in \mathcal{N}_h, \Theta(l) = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (9.1)$$

$i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{B}$  označíme  $\mathbf{s}_i \mathbf{B}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , to jest

$$\mathbf{B} = [\mathbf{s}_1 \mathbf{B}, \mathbf{s}_2 \mathbf{B}, \mathbf{s}_3 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{s}_m \mathbf{B}].$$

Dále nechť  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  a  $\mathbf{B}_3$  jsou matice typu  $(n \times 3m)$ , které vzniknou kombinací nulových sloupců a sloupců matice  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= [\mathbf{s}_1 \mathbf{B} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_2 \mathbf{B} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{s}_m \mathbf{B} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \\ \mathbf{B}_2 &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{s}_1 \mathbf{B} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_2 \mathbf{B} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_m \mathbf{B} \quad \mathbf{0}] \\ \mathbf{B}_3 &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_1 \mathbf{B} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_2 \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{s}_m \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

Pro získání algebraického tvaru potřebujeme vyčíslit všechny členy ve formulaci  $(\mathcal{M}^{3D}(\varphi_h, g_H))_h^H$ . Zabývejme se nejdříve třecím členem. Nahradíme funkci  $\|(v_{h1}, v_{h2})\|$  její Lagrangeovou interpolací  $r_h \|(v_{h1}, v_{h2})\|$  a funkci  $\mathcal{F} \circ \varphi_h g_H|_{S_i}$  její integrální průměrnou hodnotou  $\mathbf{g}_i := (\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g_H dx_1 dx_2) / \text{meas } S_i$ , kterou vytkneme před integrál:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi_h g_H \|(v_{h1}, v_{h2})\| dx_1 dx_2 &\approx \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g_H r_h \|(v_{h1}, v_{h2})\| dx_1 dx_2 \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \int_{S_i} r_h \|(v_{h1}, v_{h2})\| dx_1 dx_2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \sum_{j=1}^q \|(v_{h1}, v_{h2})(x^{(\Theta(j))})\| \int_{S_i} \theta_j dx_1 dx_2 = \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \|\mathbf{v}^{12}\|. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Stejným způsobem vyjádříme duální člen:

$$\begin{aligned} [\mu_H, v_{h3}] &= \int_{\Gamma_c} \mu_H v_{h3} dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^n \mu_H^{(i)} \sum_{j=1}^q v_{h3}(x^{(\Theta(j))}) \int_{S_i} \theta_j dx_1 dx_2 = \\ &= \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B} \mathbf{v}^3 = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B}_3 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Je patrné, že  $\mu_H$  patří do  $\Lambda_H$  právě tehdy, když jemu odpovídající vektor  $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_2 = \mathbb{R}_+^n$ . Smíšená formulace  $(\mathcal{M}^{3D}(\varphi_h, g_H))_h^H$  v algebraickém tvaru pak zní:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{3m} \times \Lambda_2 \text{ takový, že } & (\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3m})(\forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda_2) : \\ \mathbf{u}^\top \mathbf{A}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{g}^\top \mathbf{B}(\|\mathbf{v}^{12}\| - \|\mathbf{u}^{12}\|) \geq \mathbf{b}^\top(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{B}_3(\mathbf{v} - \mathbf{u}) & \\ (\boldsymbol{\mu}^\top - \boldsymbol{\lambda}^\top) \mathbf{B}_3 \mathbf{u} \geq 0 . & \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Po dosazení  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, 2\boldsymbol{\lambda}$  do (9.4)<sub>3</sub> opět vidíme, že  $\mathbf{u} \in \mathbf{K}_{hH}$ , kde

$$\mathbf{K}_{hH} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3m} \mid \sum_{j=1}^q \mathbf{v}_{\Theta(j)}^3 \int_{S_i} \theta_j dx_1 dx_2 \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}, \quad (9.5)$$

což je algebraické vyjádření množiny  $K_{hH}$  z (8.2).

Jelikož je matice  $\mathbf{A}$  symetrická, je první složka  $\mathbf{u}$  z (9.4) řešením úlohy

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}_{hH}} \mathbf{J}(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3m}} \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_2} (\mathbf{J}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B}_3 \mathbf{v}), \quad (9.6)$$

kde

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}^\top \mathbf{v} + \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \|\mathbf{v}^{12}\|.$$

Ve výpočtech opět vycházíme ze smíšené formulace úlohy (9.6), ve které je nehladký třetí člen odstraněn pomocí dvojice Lagrangeových multiplikátorů:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3m}} \sup_{\substack{(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \Lambda_1(\varphi_h, g_H) \\ \boldsymbol{\mu}_3 \in \Lambda_2}} & \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}^\top \mathbf{v} \right. \\ & \left. - \boldsymbol{\mu}_1^\top \mathbf{B}_1 \mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_2^\top \mathbf{B}_2 \mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}_3^\top \mathbf{B}_3 \mathbf{v} \right), \end{aligned} \quad (9.7)$$

kde konvexní množina  $\Lambda_1(\varphi_h, g_H)$  je definována následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\varphi_h, g_H) = \{ & (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \\ & \|(\boldsymbol{\mu}_{1i}, \boldsymbol{\mu}_{2i})\| \leq \frac{\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g_H dx_1 dx_2}{\text{meas } S_i} \quad \forall i = 1, \dots, n \} . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Minimizační úlohu (9.7) lze ekvivalentně formulovat ve tvaru:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3) \in \mathbb{R}^{3m} \times \Lambda_1(\varphi_h, g_H) \times \Lambda_2 \text{ takový, že } & \\ \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_1^\top \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_2^\top \boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbf{B}_3^\top \boldsymbol{\lambda}_3 & \\ (\boldsymbol{\mu}_1^\top - \boldsymbol{\lambda}_1^\top) \mathbf{B}_1^\top \mathbf{u} + (\boldsymbol{\mu}_2^\top - \boldsymbol{\lambda}_2^\top) \mathbf{B}_2^\top \mathbf{u} + (\boldsymbol{\mu}_3^\top - \boldsymbol{\lambda}_3^\top) \mathbf{B}_3^\top \mathbf{u} \geq 0 & \\ \forall (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \Lambda_1(\varphi_h, g_H) \quad \forall \boldsymbol{\mu}_3 \in \Lambda_2 . & \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$



Z rovnice (9.9)<sub>2</sub> vyjádříme vektor  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1^\top \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_2^\top \boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbf{B}_3^\top \boldsymbol{\lambda}_3)$$

a dosadíme do (9.9)<sub>3</sub>. Dostaneme tak úlohu *kvadratického programování s jednoduchými lineárními a separovanými kvadratickými omezeními*, formulovanou pouze v Lagrangeových multiplikatorech:

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3) \in \boldsymbol{\Lambda}_1(\varphi_h, g_H) \times \boldsymbol{\Lambda}_2 \text{ takový, že} \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3) \leq \mathcal{S}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3) \\ \forall (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \boldsymbol{\Lambda}_1(\varphi_h, g_H) \quad \forall \boldsymbol{\mu}_3 \in \boldsymbol{\Lambda}_2, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

přičemž duální funkce  $\mathcal{S}$  je definována vztahem

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\mu}_1^\top, \boldsymbol{\mu}_2^\top, \boldsymbol{\mu}_3^\top] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_3 \end{bmatrix} - \\ - [\mathbf{h}_1^\top, \mathbf{h}_2^\top, \mathbf{h}_3^\top] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.11)$$

kde

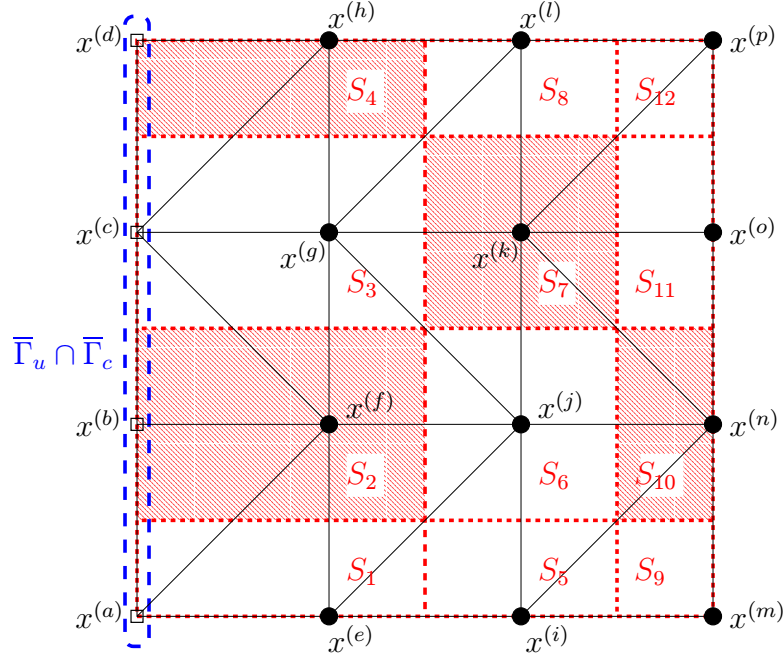
$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_j^\top, \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Dvojice  $(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2)$ , respektive vektor  $\boldsymbol{\lambda}_3$  má přitom význam diskrétního tečného, respektive normálového kontaktního napětí.

V kapitole 5 jsme pro 2D popsali speciální případ, kdy  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$ , tzn.  $n = q$ , který vedl na vnitřní aproximaci množiny  $K$ . Ukažme podobný případ ve 3D. Na rozdíl od 2D, se v 3D omezíme na speciální pravidelné dělení  $\mathcal{T}_h|_{\bar{\Gamma}_c}$ . Vycházíme z toho, že  $\bar{\Gamma}_c$  je obdélník a  $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_c}$  je triangulace, která vznikne rozdělením  $\bar{\Gamma}_c$  na  $n_x \times n_y$  obdélníků, z nichž každý je rozdělen na dva trojúhelníky. Dále předpokládáme, že jedna strana  $\bar{\Gamma}_c$  patří do průniku  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$ .

Pro ilustraci uvádíme obr. 9.1, který znázorňuje  $\bar{\Gamma}_c$ . Triangulace  $\mathcal{T}_h|_{\bar{\Gamma}_c}$  je znázorněna černými čarami. Průnik  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$  zde tvoří levá strana obdélníku  $\bar{\Gamma}_c$  a patří do něj body  $x^{(a)}, \dots, x^{(d)}$ , označené malým obdélníkem. Uzly z  $\mathcal{N}_h$  jsou označeny plným kolečkem.

Dělení  $\mathcal{T}_H$  hranice  $\bar{\Gamma}_c$  na čtyřúhelníky  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, 12$  je znázorněno červeně. Z obrázku 9.1 je patrné, že každému uzlu z  $\mathcal{N}_h$  přiřadíme právě jeden obdélník  $S_i \in \mathcal{T}_H$ . Například uzlu  $x^{(n)} \in \partial\Gamma_c \setminus \bar{\Gamma}_u$  přiřadíme obdélník  $S_{10}$ . Uzlu  $x^{(k)}$ , který je vnitřním kontaktním uzlem a nesousedí s žádným uzlem



Obr. 9.1

z  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c$ , odpovídá obdélník  $S_7$ , který leží celý uvnitř  $\Gamma_c$ . Jsou zde také uvedeny dva případy, kdy kontaktní uzel sousedí s uzlem, který do  $\mathcal{N}_h$  nepatří. Uzlu  $x^{(f)}$  přiřadíme obdélník  $S_2$ , zatímco uzlu  $x^{(h)} \in \partial\Gamma_c$  odpovídá obdélník  $S_4$ .

Pro přibližný výpočet integrálů (9.2) a (9.3) použijeme opět obdélníkové pravidlo s uzly v bodech  $\mathcal{N}_h$ . Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_c} \mathcal{F} \circ \varphi_h g_H r_h \|(v_{h1}, v_{h2})\| dx_1 dx_2 &\approx \\
&\approx \sum_{i=1}^q \underbrace{\mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))}) g_H(x^{(\Theta(i))})}_{\mathbf{g}^i} \|(v_{h1}, v_{h2})(x^{(\Theta(i))})\| \underbrace{meas S_i}_{\mathbf{B}^{ii}} = \\
&= \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \|\mathbf{v}^{12}\|, \tag{9.2}
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_c} \mu_H v_{h3} dx_1 dx_2 \approx \sum_{i=1}^q \mu_H^{(i)} v_{h3}(x^{(\Theta(i))}) \underbrace{meas S_i}_{\mathbf{B}^{ii}} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B} \mathbf{v}^3 = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B}_3 \mathbf{v}. \tag{9.3}$$

Je vidět, že se změní definice vektoru  $\mathbf{g}$  a matice  $\mathbf{B}$ , což vede ke změně

definice (9.8) množiny  $\Lambda_1(\varphi_h, g_H)$ :

$$\Lambda_1(\varphi_h, g_H) = \{(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \\ \|\boldsymbol{\mu}_{1i}, \boldsymbol{\mu}_{2i}\| \leq \mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))}) g_H(x^{(\Theta(i))}) \quad \forall i = 1, \dots, n\} . \quad (9.8)'$$

Jelikož v (9.3)' je matice  $\mathbf{B}$  diagonální s kladnými čísly na diagonále, plyne ze vztahu  $\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}^3 \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^n$ , že  $\mathbf{u}^3 \geq \mathbf{0}$ , neboli  $u_{h3}(x^{(\Theta(i))}) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ . To znamená, že  $u_h \in K_h$  (viz (8.1)) a  $K_h$  je *vnitřní* aproximace množiny  $K$ .

Vezmeme-li v úvahu vše, co jsme zatím uvedli v této kapitole, pak bude metoda postupných aproximací (4.20) vypadat takto:

Algoritmus 9.1:

*Nechť  $k = 0$ ,  $\epsilon > 0$  je zvolená přesnost a  $(\varphi_h^{(0)}, g_H^{(0)}) \in X_{hH}$  je dáno;*

**opakuji**

$$\text{Najdi } (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3) \in \Lambda_1(\varphi_h^{(k)}, g_H^{(k)}) \times \Lambda_2 \text{ takové, že} \\ \mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3) = \min_{\substack{(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \in \Lambda_1(\varphi_h^{(k)}, g_H^{(k)}) \\ \boldsymbol{\mu}_3 \in \Lambda_2}} \mathcal{S}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3) ;$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{B}_1^\top \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}_2^\top \boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbf{B}_3^\top \boldsymbol{\lambda}_3) ;$$

$$(\varphi_h^{(k+1)}, g_H^{(k+1)}) = (r_h \|u_{h1}, u_{h2}\|, \lambda_H) ;$$

$$k = k + 1 ;$$

$$\text{dokud } \frac{\|\varphi_h^{(k)} - \varphi_h^{(k-1)}\|}{\|\varphi_h^{(k-1)}\|} + \frac{\|g_H^{(k)} - g_H^{(k-1)}\|}{\|g_H^{(k-1)}\|} \leq \epsilon ,$$

kde  $(u_{h1}, u_{h2}, u_{h3}) \in \mathbb{V}_h$ , respektive  $\lambda_H \in L_H$  se získá z vektoru posunutí  $\mathbf{u}$ , respektive z vektoru  $\boldsymbol{\lambda}_3$ .

## 9.1 Minimizace kvadratické funkce s jednoduchými lineárními a separovanými kvadratickými omezeními

Při řešení 3D úloh s Coulombovým třením opět hledáme pevný bod zobrazení  $\Phi_{hH}$  (viz (8.3)) metodou postupných aproximací (4.20). V každé iteraci hledáme minimum kvadratické funkce (9.11) na konvexní množině definované *jednoduchými* lineárními a *separovanými kvadratickými* omezeními, která plynou z definice (9.8) (respektive (9.8)') množiny  $\Lambda_1(\varphi_h, g_H)$  a z definice množiny  $\Lambda_2 = \mathbb{R}_+^n$ :

$$\boldsymbol{\mu}_{1i}^2 + \boldsymbol{\mu}_{2i}^2 \leq \mathbf{r}_i^2 , \quad 0 \leq \boldsymbol{\mu}_{3i} , \quad i = 1, \dots, n , \quad (9.12)$$

kde

$$\mathbf{r}_i = \frac{\int_{S_i} \mathcal{F} \circ \varphi_h g_H dx_1 dx_2}{\text{meas } S_i}, \quad (9.13)$$

respektive

$$\mathbf{r}_i = \mathcal{F} \circ \varphi_h(x^{(\Theta(i))}) g_H(x^{(\Theta(i))}), \quad (9.13)'$$

když použijeme postupu vedoucího na vnitřní aproximaci  $K$ .

Pro jednodušší popis této úlohy a algoritmu, který používáme pro její řešení, zavedeme následující značení. Řešíme úlohu

$$\min_{\mathbf{y} \in \Upsilon} f(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in \Upsilon} \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^\top \mathbf{b}, \quad (9.14)$$

$$\Upsilon = \left\{ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{y}^2 \\ \mathbf{y}^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \underline{\mathbf{y}}_i^\top \underline{\mathbf{y}}_i \leq \mathbf{r}_i^2, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y}^3, \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Symbol  $\underline{\mathbf{y}}_i$  v dalším textu značí dvojici  $[\mathbf{y}_i^1, \mathbf{y}_i^2]^\top \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ , matice  $\mathbf{A}$  typu  $(3n \times 3n)$  je symetrická, pozitivně definitní a  $\mathbf{0}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ . Je známo, že úloha (9.14) má právě jedno řešení.

### 9.1.1 Minimizace kvadratické funkce se separovanými kvadratickými omezeními

Dříve než popíšeme algoritmus, kterým řešíme úlohu (9.14), uvedeme algoritmus (detailněji viz článek [16]) pro minimizaci kvadratické funkce pouze se separovanými kvadratickými omezeními, to jest úlohu

$$\min_{\mathbf{y} \in \bar{\Upsilon}} f(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in \bar{\Upsilon}} \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{y}^\top \mathbf{b}, \quad (9.15)$$

$$\bar{\Upsilon} = \left\{ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^1 \\ \mathbf{y}^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \underline{\mathbf{y}}_i^\top \underline{\mathbf{y}}_i \leq \mathbf{r}_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Tento algoritmus opět kombinuje metodu sdružených gradientů se strategií, která se stará o splnění separovaných kvadratických omezení. Tato omezení mají jednoduchou geometrickou interpretaci. Stačí si uvědomit, že pro každé  $i = 1, \dots, n$  leží vektor  $\underline{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2$  uvnitř nebo na kružnici se středem  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  a poloměrem  $\mathbf{r}_i$ .

Gradient  $\mathbf{g} := \mathbf{g}(\mathbf{y})$  funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{y}$  je dán vztahem (5.16). Nechť  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$  je množina indexů. Projekce vektoru  $\mathbf{y}$  na množinu  $\bar{\Upsilon}$ , je dána vztahem:

$$P_{\bar{\Upsilon}}(\mathbf{y}) = \mathbf{z} : \quad \underline{\mathbf{z}}_i = \frac{\min\{\|\underline{\mathbf{y}}_i\|, \mathbf{r}_i\}}{\|\underline{\mathbf{y}}_i\|} \underline{\mathbf{y}}_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Odvodíme podmínky, které musí splňovat řešení úlohy (9.15). Tu lze pomocí Lagrangeových multiplikátorů zapsat ve tvaru:

$$\min_{\mathbf{y} \in \bar{\mathbf{Y}}} f(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}} \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^n} \mathcal{L}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) ,$$

kde  $\mathcal{L}$  je Lagrangian definovaný vztahem

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\mu}_i (\underline{\mathbf{y}}_i^\top \underline{\mathbf{y}}_i - \mathbf{r}_i^2) .$$

Nechť  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  je sedlový bod  $\mathcal{L}$  na  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+^n$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n} . \quad (9.16)$$

Z první nerovnosti v (9.16) plyne, že

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_i (\underline{\mathbf{x}}_i^\top \underline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{r}_i^2) &= 0 \\ \boldsymbol{\mu}_i (\underline{\mathbf{x}}_i^\top \underline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{r}_i^2) &\leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

a tudíž  $\mathbf{x}$  splňuje požadované kvadratické vazby. Z druhé nerovnosti v (9.17) plyne, že  $\mathbf{x}$  je řešením úlohy (9.15) a navíc

$$\nabla_{\underline{\mathbf{y}}_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, n , \quad (9.18)$$

kde symbol  $\nabla_{\underline{\mathbf{y}}_i}$  značí parciální gradient funkce podle  $\underline{\mathbf{y}}_i \in \mathbb{R}^2$ . Vztah (9.18) je ekvivalentní

$$\underline{\mathbf{g}}_i + 2\boldsymbol{\lambda}_i \underline{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, n . \quad (9.19)$$

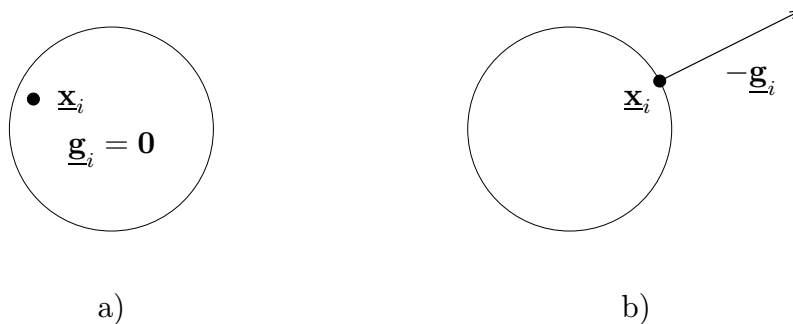
Z (9.17)<sub>1</sub> a (9.19) plyne, že řešení  $\mathbf{x}$  úlohy (9.15) musí splňovat tyto Karush-Kuhn-Tuckerovy (dále jen KKT) podmínky:

$$\|\underline{\mathbf{x}}_i\| < \mathbf{r}_i \Rightarrow \underline{\mathbf{g}}_i = \mathbf{0} \quad (9.20)$$

$$\|\underline{\mathbf{x}}_i\| = \mathbf{r}_i \Rightarrow \underline{\mathbf{g}}_i + \frac{\|\underline{\mathbf{g}}_i\|}{\mathbf{r}_i} \underline{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, n . \quad (9.21)$$

Skutečně, pokud  $\|\underline{\mathbf{x}}_i\| < \mathbf{r}_i$ , plyne z (9.17)<sub>1</sub>, že  $\boldsymbol{\lambda}_i = 0$ . Z (9.19) pak dostaneme  $\underline{\mathbf{g}}_i = \mathbf{0}$ . Pokud  $\|\underline{\mathbf{x}}_i\| = \mathbf{r}_i$ , mají vektory  $\underline{\mathbf{g}}_i$  a  $\underline{\mathbf{x}}_i$  opačný směr, což plyne ze vztahu (9.19) a toho, že  $\boldsymbol{\lambda}_i \geq 0$ . Vektor  $(\|\underline{\mathbf{g}}_i\|/\mathbf{r}_i)\underline{\mathbf{x}}_i$  má stejnou délku a opačný směr jako  $\underline{\mathbf{g}}_i$ , odkud plyne (9.21).

KKT podmínky mají jednoduchou geometrickou interpretaci: jestliže vektor  $\underline{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^2$  leží uvnitř kružnice reprezentující příslušné geometrické omezení, neexistuje žádný směr poklesu pro indexy odpovídající  $\underline{\mathbf{x}}_i$ , viz obr. 9.2.a).



Obr. 9.2

Jestliže  $\underline{\mathbf{x}}_i$  leží na této kružnici, je směr poklesu násobkem vnější normály ke kružnici v bodě  $\underline{\mathbf{x}}_i$ , viz obr. 9.2.b).

Splnění KKT podmínek zformulujeme opět pomocí částí gradientu  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}$ . Nechť  $\mathcal{A}(\mathbf{y})$  a  $\mathcal{F}(\mathbf{y})$  jsou množiny indexů definované vztahy

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{y}) &= \{i \in \mathcal{N} \mid \|\underline{\mathbf{y}}_i\| = \mathbf{r}_i\} \\ \mathcal{F}(\mathbf{y}) &= \{i \in \mathcal{N} \mid \|\underline{\mathbf{y}}_i\| < \mathbf{r}_i\},\end{aligned}$$

kteří postupně nazveme *aktivní* a *volnou* množinou. Volný gradient  $\underline{\boldsymbol{\varphi}} := \underline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})$  a uříznutý gradient  $\underline{\boldsymbol{\beta}} := \underline{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{y})$  funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{y}$  definujeme pro kvadratická omezení takto:

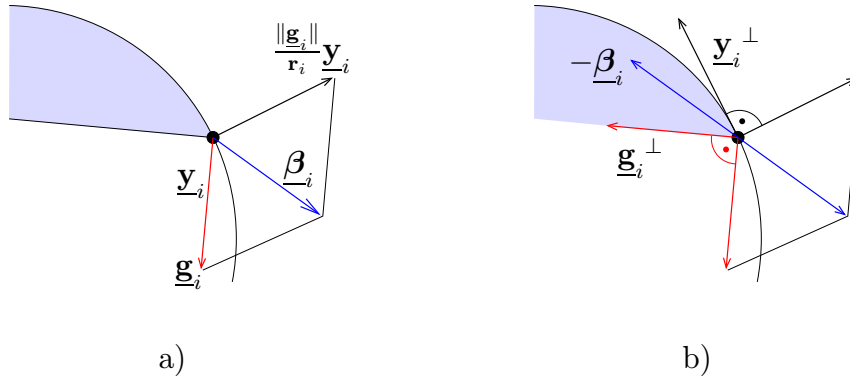
$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{\varphi}}_i &= \underline{\mathbf{g}}_i \quad \text{pro } i \in \mathcal{F}(\mathbf{y}), & \underline{\boldsymbol{\varphi}}_i &= \mathbf{0} \quad \text{pro } i \in \mathcal{A}(\mathbf{y}) \\ \underline{\boldsymbol{\beta}}_i &= \mathbf{0} \quad \text{pro } i \in \mathcal{F}(\mathbf{y}), & \underline{\boldsymbol{\beta}}_i &= \begin{cases} \underline{\mathbf{g}}_i + \frac{\|\underline{\mathbf{g}}_i\|}{\mathbf{r}_i} \underline{\mathbf{y}}_i & \text{pro } i \in \mathcal{A}(\mathbf{y}), \mathbf{r}_i \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{pro } i \in \mathcal{A}(\mathbf{y}), \mathbf{r}_i = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Projektovaný gradient  $\underline{\boldsymbol{\nu}} := \underline{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y})$  v bodě  $\mathbf{y}$  definujeme jako součet volného a uříznutého gradientu, tj.  $\underline{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) = \underline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}) + \underline{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{y})$ . Je vidět, že KKT podmínky jsou splněny právě tehdy, když je projektovaný gradient  $\underline{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$  v bodě  $\mathbf{x}$  roven nule.

Vysvětleme, co takto definované pojmy znamenají. Vektor  $\underline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})$  je ta složka gradientu  $f$  pomocí níž můžeme měnit hodnoty pouze v indexech, které přísluší volné množině. Popišme geometrický význam uříznutého gradientu  $\underline{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{y})$ . Nechť  $i \in \mathcal{A}(\mathbf{y})$  je takové, že  $\underline{\boldsymbol{\beta}}_i \neq \mathbf{0}$ . Pak je vektor  $\underline{\boldsymbol{\beta}}_i$  definován jako součet vektoru gradientu  $\underline{\mathbf{g}}_i$  a vektoru normály ke kružnici v bodě  $\underline{\mathbf{y}}_i$ , která má stejnou délku jako  $\underline{\mathbf{g}}_i$ , viz obr. 9.3.a).

Všimněme si, že vektor  $-\underline{\boldsymbol{\beta}}_i$  púlí úhel mezi vektorem  $\underline{\mathbf{y}}_i^\perp$  (mez pro přípustný směr) a vektorem  $\underline{\mathbf{g}}_i^\perp$  (směr stagnace), viz obr 9.3.b), což se ukazuje

jako ideální volba pro směr poklesu. Vektor  $-\underline{\beta}_i$  míří vždy dovnitř kružnice popisující  $i$ -té kvadratické omezení.



Obr. 9.3

Jak jsme již zmínili, používáme k řešení úlohy (9.15) algoritmus (nazvěme ho QPQ), který využívá stejného postupu jako algoritmus MPRGP. Vektory  $\underline{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ve kterých jsou splněny KKT podmínky budeme tedy opět hledat iteračně. Na rozdíl od 2D, kde pro jeden index aktivní množiny mohlo nabývat jednoduché omezení pouze dvou stavů ( $\underline{x}_i = \underline{l}_i \vee \underline{x}_i = \underline{u}_i$ ), je těchto stavů ve 3D nekonečně mnoho. Algoritmus QPQ proto *není finitní*. Lze však dokázat (viz [16]), že pro každý vektor  $\underline{y}^0$  počátečního přiblížení tento algoritmus generuje posloupnost  $\{\underline{y}^k\}$ , která konverguje k řešení  $\underline{x}$ . Navíc je posloupnost funkčních hodnot  $\{f(\underline{y}^k)\}$  klesající. Pro vygenerování následujícího členu  $\underline{y}^{k+1}$  používá algoritmus QPQ opět jeden ze tří typů kroků, které odlišně zacházejí s aktivní množinou  $\mathcal{A}(\underline{y}^k)$ :

*Krok sdružených gradientů:* je vysvětlen v odstavci 5.1. Algoritmus využívá k minimizaci  $f$  metodu sdružených gradientů, dokud se nezmění aktivní množina.

*Expanze aktivní množiny:* pokud metoda sdružených gradientů vygeneruje vektor  $\underline{y}_{cg}^{k+1} \notin \bar{\Upsilon}$ , provede se krok zvaný *expanze* a následně restartuje metoda sdružených gradientů. Nechť  $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  a  $\underline{g} \in \mathbb{R}^{2n}$  jsou dané vektory. Zavedeme operaci  $\odot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\underline{\alpha} \odot \underline{g} = \underline{\gamma}$  tak, že dvojice  $\underline{\gamma}_i \in \mathbb{R}^2$  jsou definovány vztahem

$$\underline{\gamma}_i = \alpha_i \underline{g}_i \quad i = 1, \dots, n .$$

Expanze zvolí za následující hodnotu  $\underline{y}^{k+1}$  buď vektor  $\underline{z}_{proj}$ , který reprezentuje krok ve směru *sdruženého* gradientu projektovaný na přípustnou množinu.

žinu, nebo vektor  $\mathbf{z}_{kr}$ :

$$\mathbf{z}_{proj} = P_{\bar{\Upsilon}}(\mathbf{y}_{cg}^{k+1}), \quad \mathbf{z}_{kr} = \mathbf{y}^k - \boldsymbol{\alpha}_{exp} \odot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}^k)$$

kde složky  $\boldsymbol{\alpha}_{exp_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  vektoru  $\boldsymbol{\alpha}_{exp} \in \mathbb{R}^n$  jsou definovány takto:

$$\boldsymbol{\alpha}_{exp_i} = \begin{cases} \min\{2\|\mathbf{A}\|^{-1}, \{0 < \alpha \in \mathbb{R} : \|\underline{\mathbf{y}}_i^k - \alpha \underline{\boldsymbol{\varphi}}_i(\mathbf{y}^k)\| = \mathbf{r}_i\}\} & i \in \mathcal{F}(\mathbf{y}^k), \underline{\boldsymbol{\varphi}}_i \neq 0 \\ 0 & jinak . \end{cases}$$

Vektor  $\mathbf{z}_{kr}$  získáme následovně: chceme provést krátký krok proti směru *volného* gradientu, aby délka zajišťovala nezvýšení hodnoty minimizované funkce. Tento krok však by však mohl vést mimo přípustnou množinu, proto pro každé kvadratické omezení  $\underline{\mathbf{y}}_i^{k\top} \underline{\mathbf{y}}_i^k \leq \mathbf{r}_i^2$  zkrátíme tento krok tak, aby  $\mathbf{z}_{kr}$  tomuto omezení vyhovoval, viz obr .9.4.a). Tohoto „zkrácení po částech“ používáme proto, že přibírá do aktivní množiny daleko více indexů, než prosté (tj. pro všechny složky stejné) zkrácení kroku na přípustnou množinu. Zda bude zvolen vektor  $\mathbf{z}_{proj}$ , nebo  $\mathbf{z}_{kr}$  rozhoduje nižší hodnota funkce  $f$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}_{proj}) \leq f(\mathbf{z}_{kr}) &\Rightarrow \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{z}_{proj} \\ f(\mathbf{z}_{proj}) > f(\mathbf{z}_{kr}) &\Rightarrow \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{z}_{kr} . \end{aligned}$$

*Redukce aktivní množiny–proportioning*: v předchozích krocích nebyl vektor  $\mathbf{y}^k$  měněn ve složkách, které odpovídaly indexům v aktivní množině, jelikož se pro minimizaci využívalo pouze směru  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}^k)$ . V kroku zvaném *proportioning* se k minimizaci  $f$  využívá naopak uříznutého gradientu  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}^k)$ , přičemž je redukována aktivní množina, to jest chceme dosáhnout  $\mathcal{A}(\mathbf{y}^{k+1}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{y}^k)$ . Označme  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , hodnoty takové, že

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i = \begin{cases} \{0 < \alpha \in \mathbb{R} : \|\underline{\mathbf{y}}_i^k - \alpha \underline{\boldsymbol{\beta}}_i(\mathbf{y}^k)\| = \mathbf{r}_i\} , & i \in \mathcal{A}(\mathbf{y}^k), \underline{\boldsymbol{\beta}}_i \neq \mathbf{0} \\ 0 , & jinak . \end{cases} \quad (9.22)$$

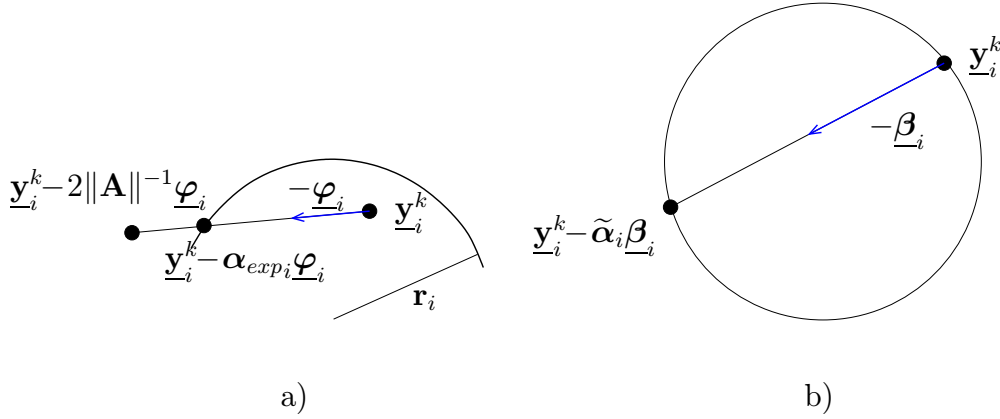
Množina v (9.22)<sub>1</sub> je jednoprvková, tj. definice je korektní. Pro jedno omezení  $\underline{\mathbf{y}}_i^\top \underline{\mathbf{y}}_i \leq \mathbf{r}_i^2$  znamená  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$  maximální povolenou délku kroku ve směru poklesu  $-\underline{\boldsymbol{\beta}}_i(\mathbf{y}^k)$ , viz obr. 9.4.b). Jinými slovy platí, že  $\mathbf{y}^k - \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \odot \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}^k) \in \bar{\Upsilon}$ . Lze dokázat (viz [16]), že pro

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \min\{\eta\|\mathbf{A}\|^{-1}, \delta\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i\} ,$$

kde  $0 < \eta, \delta < 1$ , je  $f(\mathbf{y}^k - \boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}^k)) < f(\mathbf{y}^k)$ . Jako novou hodnotu  $\mathbf{y}^{k+1}$  v kroku *proportioning* tedy volíme

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k - \boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}^k) .$$





Obr. 9.4

O tom, který z výše uvedených kroků vybere algoritmus QPQ pro výpočet následující hodnoty  $\mathbf{y}^{k+1}$ , rozhoduje kritérium:

$$\|\beta(\mathbf{y}^k)\| \leq \gamma \|\varphi(\mathbf{y}^k)\|, \quad \gamma > 0. \quad (9.23)$$

Pokud je splněno, provede se krok sdružených gradientů, respektive expanze aktivní množiny v případě, že krok sdružených gradientů  $\mathbf{y}_{cg}^{k+1} \notin \bar{\Upsilon}$ . Pokud kritérium (9.23) není splněno, použije se krok redukce aktivní množiny. Konstanta  $\gamma$  tedy určuje jak přesně minimizovat  $f$  při nezmenšující se aktivní množině.

Vraťme se k úloze (9.14). Modifikujme nyní algoritmus QPQ tak, aby zahrnoval také jednoduchá (v našem případě dokonce jednoduchá jednostranná) omezení. Nový algoritmus nazveme QPPQ a krátce popíšeme.

Obdobně jako v odstavcích 5.1 a 9.1 lze ukázat, že řešení úlohy (9.14) musí splňovat KKT podmínky (5.17) pro jednoduchá omezení a podmínky (9.20), (9.21) pro kvadratická omezení. Definujme volný a uříznutý gradient ve složkách odpovídajících jednoduchým omezením pomocí (5.18) a (5.19), kde jako aktivní, respektive volnou množinu bereme množinu indexů aktivních, respektive volných jednoduchých omezení. Pro složky odpovídající kvadratickým omezením definujeme obě složky gradientu analogicky jako v odstavci 9.1. KKT podmínky jsou v bodě  $\mathbf{z}$  splněny právě tehdy, je-li projektovaný gradient  $\nu(\mathbf{z})$  roven nule. Projekci  $P_{\Upsilon}$  na množinu  $\Upsilon$  definujeme pro složky odpovídající jednoduchým omezením jako v odstavci 5.1 a pro kvadratická omezení jako v odstavci 9.1.

Algoritmus QPPQ zvolí na základě kritéria (9.23) (složky projektovaného

gradientu chápeme rozšířeny o jednoduché vazby), zda bude v příštím kroku redukovat množinu aktivních vazeb, nebo bude minimizovat  $f$  s případnou expanzí aktivní množiny.

Kroky sdružených gradientů není třeba dále popisovat.

V kroku expanze se na základě většího poklesu funkce  $f$  zvolí jako následující hodnota buď projektovaný krok ve směru sdruženého gradientu, nebo krátký krok ve směru volného gradientu, po složkách zkrácený na přípustnou množinu. Pro složky odpovídající kvadratickým omezením je toto zkrácení vysvětleno v odstavci 9.1. Ve všech složkách odpovídajících jednoduchým omezením bude zkrácení stejné a to takové, aby získaná iterace ležela v  $\Upsilon$ .

Při redukci aktivní množiny se provede krátký krok ve směru uříznutého gradientu, zkrácený po složkách na přípustnou množinu. Zkrácení proběhne pouze ve složkách odpovídajících kvadratickým omezením, jelikož jednoduchá omezení nemohou být narušena. Je to proto, že úloha (9.14) má pouze *jednostranná* omezení.

## 10 Modelové 3D úlohy s Coulombovým třením

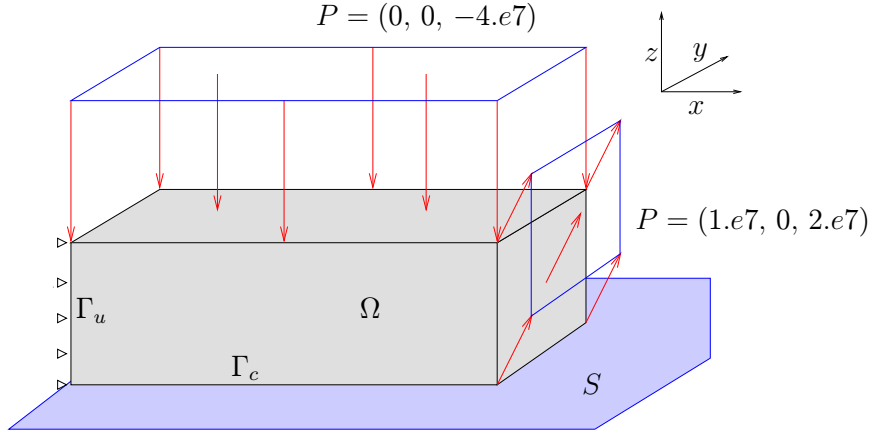
Výpočty v 3D budeme provádět na následující úloze. Pružné 3D těleso je reprezentováno kvádrem  $\Omega = (0, 3) \times (0, 1) \times (0, 1)$ , jehož rozměry jsou uvedeny v metrech. Mechanické vlastnosti tělesa jsou charakterizovány Youngovým modulem pružnosti  $E = 21.19e10 [Pa]$  a Poissonovou konstantou  $\sigma = 0.277$ . Okrajové podmínky se liší podle toho, o jakou část hranice se jedná, viz obr 10.1. Na části  $\Gamma_u = \{0\} \times (0, 1) \times (0, 1)$  hranice je těleso upevněno ve všech směrech. Ke kontaktu tělesa s tuhým podložím může dojít na části  $\Gamma_c = (0, 3) \times (0, 1) \times \{0\}$ . Zbývající část hranice  $\Gamma_p$  je na stěně  $(0, 3) \times (0, 1) \times \{1\}$  zatížena povrchovými silami o hustotě  $P = (0, 0, -4.e7) [Nm^{-2}]$  a na stěně  $\{3\} \times (0, 1) \times (0, 1)$  silami o hustotě  $P = (1.e7, 0, 2.e7) [Nm^{-2}]$ . Na zbývající stěny  $\Gamma_p$  nepůsobily žádné síly.

Koeficient tření je definován předpisem

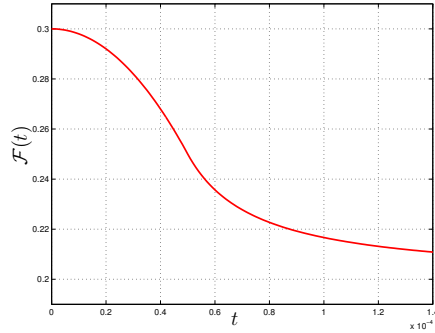
$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} 0.3 - \frac{(0.3-0.2)par^2}{2}t^2 & t \in \langle 0, 1/par \rangle \\ 0.2 + \frac{0.3-0.2}{4(t-1/par)par+2} & t \in \langle 1/par, \infty \rangle \end{cases}$$

s parametrem  $par = 2.e4$ . Graf  $\mathcal{F}$  je na obrázku 10.2.

Oblast  $\bar{\Omega}$  pravidelně rozdělíme na  $3n \times n \times n$  kvádrů pro  $n = 4, 6, 8, 12, 16, 18$  a  $20$ . Každý kvádr rozdělíme dále na pět čtyřstěnů, viz obrázek. 10.3.



Obr. 10.1



Obr. 10.2

Tímto způsobem získáme dělení  $\mathcal{T}_h$  oblasti  $\bar{\Omega}$ . Posunutí je aproximováno spjitými, po částech lineárními funkcemi nad sedmi děleními  $\mathcal{T}_h$ . Počet stupňů volnosti  $n_p$  primárních proměnných je postupně  $n_p = 900, 2\,646, 5\,832, 10\,890, 18\,252, 28\,350$  a  $41\,616$ .

Pro diskretizaci Lagrangeových multiplikátorů byl použit speciální případ prostoru  $L_H$ , pro nějž  $\dim \mathcal{V}_h = \dim L_H$ , který vedl na vnitřní aproximaci množiny  $K$  a který byl popsán v předchozí kapitole. Ukončovací kritérium bylo zvoleno u všech případů stejně a to:

$$err^{(k+1)} = \frac{\|\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)}\|}{\|\varphi^{(k)}\|} + \frac{\|\mathbf{g}^{(k+1)} - \mathbf{g}^{(k)}\|}{\|\mathbf{g}^{(k)}\|} < 10^{-5},$$

kde  $\|\cdot\|$  značí Eukleidovu normu a  $\varphi^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  jsou vektory, jejichž složky tvoří  $\varphi_h^{(k)}(x^{(\Theta(i))})$  a  $\mathbf{g}_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

V každé iteraci byla úloha kvadratického programování řešena algoritmem QPPQ s konstantou  $\gamma=5$  (viz (9.23)) a parametry  $\delta=0.5$ ,  $\eta=0.99$ . Z důvodu zaokrouhlovacích chyb nemůže být nikdy splněna KKT podmínka (9.21). V situaci, kdy gradient  $\mathbf{g}_i$  svíral s vnější normálou menší úhel než jednu sekundu jsme považovali podmínku (9.21) za splněnou a kladli  $\underline{\beta}_i = \mathbf{0}$ . Vektor  $\underline{\beta}_i$ , který by byl v této situaci velmi krátký a téměř kolmý na vnější normálu, by důsledkem zaokrouhlovacích chyb nemusel být směrem poklesu. Ukončovací kritérium algoritmu QPPQ bylo

$$\|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}^k)\| < \epsilon := 10^{-5} \min\{1, err^{(k)}\}.$$

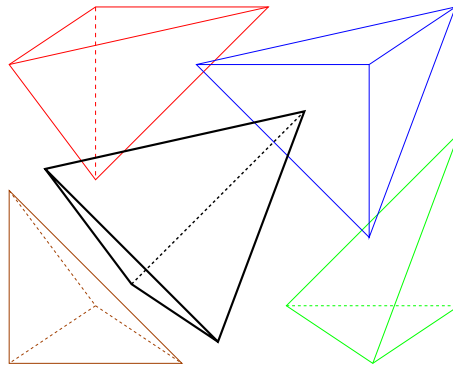
Přesnost  $\epsilon$  byla tedy adaptivně volena v závislosti na tom, s jakou relativní přesností byla spočítána předchozí iterace. Počáteční iterace metody postupných aproximací byla zvolena vždy  $\boldsymbol{\varphi}^{(0)} = \mathbf{0}$  a  $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$ , což odpovídá kontaktní úloze bez tření.

Tabulka 10.1 popisuje chování algoritmu pro různé diskretizace. Sloupec  $n_p$ , respektive  $n_d$  udává počet primárních, respektive duálních proměnných. Ve sloupci *it* jsou uvedeny počty iterací metody postupných aproximací a ve sloupci  $n_{ndm}$  jsou celkové počty násobení duální maticí. Čas výpočtu je uveden v sekundách.

Ve sloupci *chyba* jsou uvedeny relativní chyby posunutí, měřené v normě prostoru  $L^2(\Omega)$ . Za přesné řešení jsme považovali řešení pro největší spočítanou úlohu s  $n_p = 41616$ , které označíme hvězdičkou:

$$chyba = \frac{\|u - u^*\|_{L^2(\Omega)}}{\|u^*\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Obrázek 10.4 zachycuje těleso po deformaci pro  $n_p = 10890$ . Je z něj také

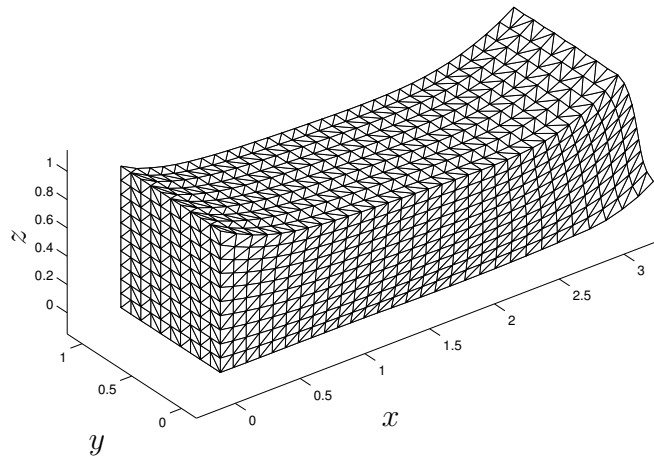


Obr. 10.3

$n_p$	$n_d$	$it$	$n_{ndm}$	$\check{c}as$	$chyba$
900	60	10	1038	14	4.7e-2
2646	126	12	1252	93	2.2e-2
5832	216	11	1584	421	1.2e-2
10890	330	11	1673	1220	6.7e-3
18252	468	12	1954	3340	3.8e-3
28350	630	12	2029	7170	2.4e-3
41616	816	12	1731	11610	–

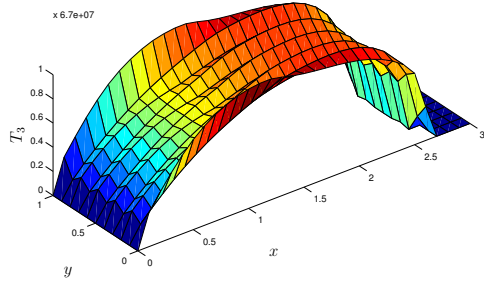
Tabulka 10.1

patrné, že deformace odpovídá zadání. Na levé stěně k žádnému posunutí nedojde. Síly působící shora proti tuhému podloží způsobí stlačení tělesa k podloží. Vliv  $x$ -ové složky sil předepsaných na pravém boku způsobí protažení ve směru osy  $x$ , zatímco  $z$ -ová složka způsobí ztrátu kontaktu pravého konce tělesa. Z obrázku je také patrná použitá diskretizace.

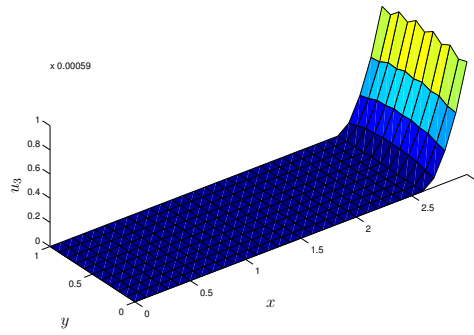


Obr. 10.4 : Těleso po deformaci, zvětšeno 300×

Na obrázku 10.5 je zobrazen průběh normálového kontaktního napětí a posunutí podél  $\Gamma_c$ . Je patrné, že normálové napětí je nulové v bodech, ve kterých dojde ke ztrátě kontaktu. Rozložení velikosti tečného kontaktního napětí, respektive posunutí, je vidět na obrázku 10.6. Průběh koeficientu tření a jeho součin s normálovým napětím jsou zobrazeny na obrázku 10.7. Je patrné, že průběh koeficientu tření podél  $\Gamma_c$  (viz obr. 10.7.b)) odpovídá velikosti

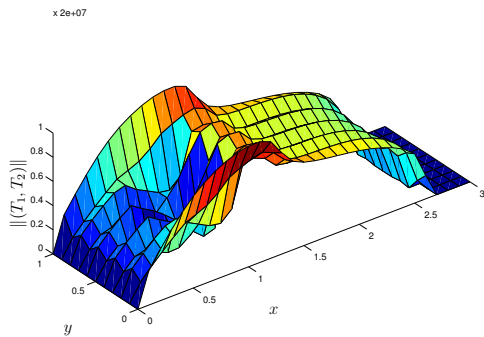


a) normálové napětí na  $\Gamma_c$

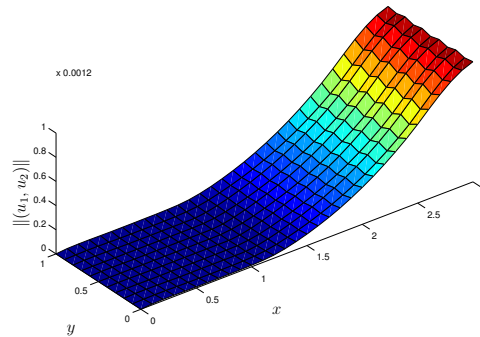


b) normálové posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 10.5

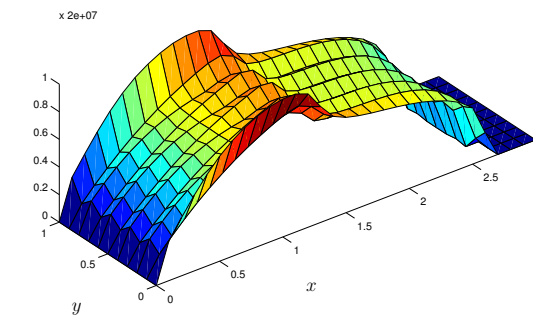


a) velikost tečného napětí na  $\Gamma_c$

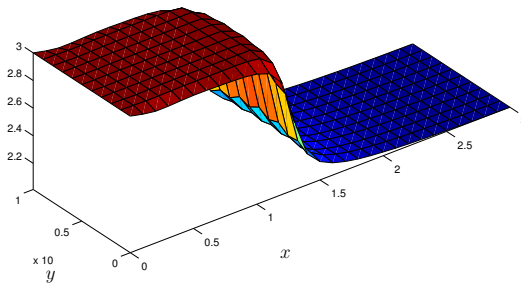


b) velikost tečného posunutí na  $\Gamma_c$

Obr. 10.6



a) průběh  $\mathcal{F}(\|(u_1, u_2)\|)T_3$  na  $\Gamma_c$



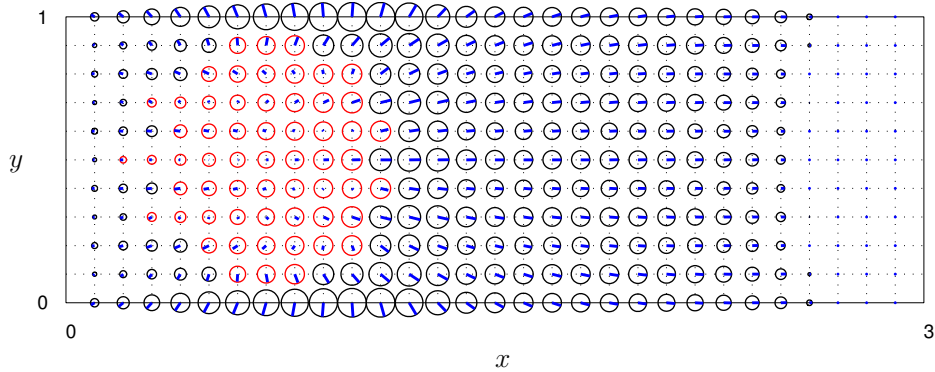
b) průběh  $\mathcal{F}(\|(u_1, u_2)\|)$  na  $\Gamma_c$

Obr. 10.7

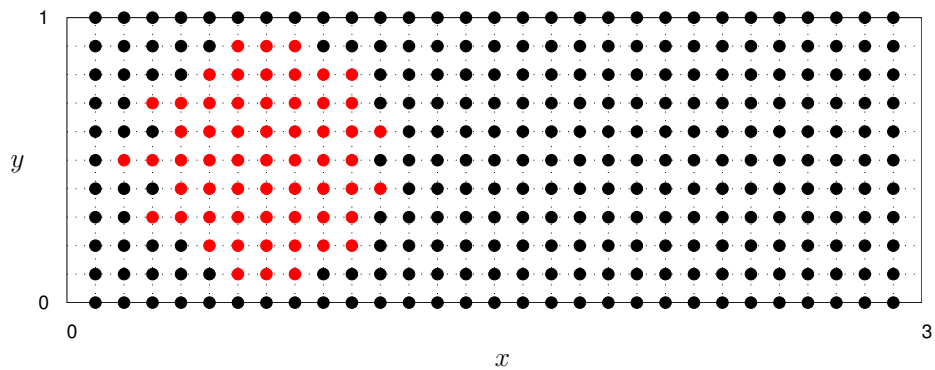
tečného posunutí (viz obr. 10.6.b)) a průběhu grafu funkce  $\mathcal{F}$ , viz obr. 10.2. Srovnáním obrázků 10.6.a) a 10.7.a) je patrné, že velikost tečného napětí na  $\Gamma_c$  je menší, nebo rovna součinu  $\mathcal{F}(\|(u_1, u_2)\|)T_3$ .

Vektory tečného napětí na  $\Gamma_c$  (modře) zachycuje obrázek 10.8.a). Kružnice znázorňují kvadratická omezení. Červené kružnice označují body, ve kterých  $\|(T_1, T_2)\| < \mathcal{F}(\|(u_1, u_2)\|)T_3$ , černé kružnice případ, kdy nastává rovnost mezi těmito veličinami. Z obrázku 10.8.b) je také patrné, že

$$\|(T_1, T_2)(x)\| < \mathcal{F}(\|(u_1, u_2)(x)\|)T_3(x) \Rightarrow (u_1, u_2)(x) = \mathbf{0} .$$



a) tečné napětí (modře) na  $\Gamma_c$



b) body (červeně), ve kterých  $(u_1, u_2) = \mathbf{0}$  na  $\Gamma_c$

Obr. 10.8

## Závěr

Tato práce se zabývá kontaktními problémy se třením a koeficientem tření  $\mathcal{F}$  *závislým* na řešení, pro modely s daným a Coulombovým třením. Známé výsledky pro tyto problémy byly dokázány za použití metody penalizace a regularizace. Tato práce měla dva hlavní cíle. Prvním cílem bylo dokázat tytéž výsledky pomocí pevněbodového přístupu. Druhým a hlavním pak bylo prověřit vhodnost tohoto přístupu pro numerickou realizaci.

V kapitolách 3 a 4 jsme pak dokázali existenci alespoň jednoho řešení diskretizované úlohy za předpokladu, že koeficient tření  $\mathcal{F}$  je reprezentován spojitou, nezápornou funkcí. Za předpokladu, že je koeficient tření dostatečně malý a lipschitzovský s malou konstantou Lipschitzovskosti jsme navíc dokázali, že řešení je jednoznačné a metoda postupných aproximací konverguje. U modelu s daným třením jsme tyto výsledky rozšířili také na spojitou úlohu.

Pevný bod jsme hledali pomocí metody postupných aproximací. V každé iteraci byla řešena úloha s *daným* třením a koeficientem tření *nezávislým* na řešení. K numerické realizaci jsme použili formulaci úlohy v kontaktních napětích, kterou jsme obdrželi pomocí duálního přístupu. V kapitolách 5–10 jsme ukázali, jak lze realizovat výpočty na počítači a spočítali několik příkladů v 2D a 3D. Z výpočtů se ukazuje, že uvedený postup je poměrně robustní a konverguje i v případech, kdy nejsou splněny předpoklady na  $\mathcal{F}$ . Dále se ukazuje, že počet pevněbodových iterací zůstává téměř konstantní i pro hustší diskretizace, pokud pro první iteraci použijeme stejné počáteční přiblížení. To je pozitivní jev oproti teorii, která v tomto směru žádný výsledek nedává.

Práce se zabývala pouze stacionární kontaktní úlohou jednoho tělesa spočívajícího na tuhém podloží. V budoucnu se zaměříme na kvazistatické a dynamické kontaktní úlohy pro jedno a více těles. Pro rozsáhlejší úlohy bude navíc nezbytné užít některou z metod rozložení oblasti a zvážit možnost předpodmínění.



## Reference

- [1] P. W. Christensen, and J. S. Pang: *Frictional Contact Algorithms Based on Semismooth Newton Methods*, M. Fukushima and L. Qci (eds.), Reformulation–Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998), 81-116
- [2] P. G. Ciarlet: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Stud. Math. Appl. 4 (1978), North–Holland, Amsterdam
- [3] Z. Dostál: *Box constrained quadratic programming with proportioning and projections*, SIAM J. Opt. 7 (3), (1997), 871-887
- [4] Z. Dostál, and J. Schöberl: *Minimizing quadratic functions subject to bound constraints with the rate of convergence and finite termination*, Comput. Optimiz. and Appl. 30,1 (2003), 23-44
- [5] G. Duvaut, and J. L. Lions: *Inequalities in Mechanics and Physics*, Ser. Compr. Stud. Math. 219 (1976), Springer, Berlin
- [6] C. Eck, and J. Jarušek: *Existence results for the static contact problem with Coulomb friction*, Math. Mod. Methods Appl. Sci. 8 (1998), 445-463
- [7] C. Eck, O. Steinbach, and W. L. Wendland: *A symmetry boundary element method for contact problems with friction*, Mathematics and Computers in Simulations 50 (1999), 43-61
- [8] I. Ekeland, and R. Temam: *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, (1976)
- [9] M. Feistauer, and K. Najzar: *Finite element approximation of a problem with a nonlinear Newton boundary condition*, Numer. Math. 78 (1998), 403-425
- [10] R. Glowinski: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer–Verlag, New York, (1984)
- [11] J. Haslinger: *Approximation of the Signorini problem with friction, obeying Coulomb law*, Math. Methods Appl. Sci. 5 (1983), 422-437
- [12] J. Haslinger, I. Hlaváček, and J. Nečas: *Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., North–Holland, (1996)

- [13] J. Haslinger, and P. D. Panagiotopoulos: *The reciprocal variational approach to the Signorini problem with friction. Approximation results*, Proc. of the Royal Society of Edinburgh, 98A, 365-383, 1984
- [14] J. Haslinger, and O. Vlach: *Signorini problem with a solution-dependent coefficient of friction (model with given friction): Approximation and numerical realization*, Appl. Math. 50, (2005) 153-171
- [15] J. Haslinger, and O. Vlach: *Approximation and numerical realization of 2D contact problems with Coulomb friction and a solution-dependent coefficient of friction*, in review
- [16] R. Kučera: *Minimizing quadratic functions with separable quadratic constraints*, to appear (2005)
- [17] J. Nečas and I. Hlaváček: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles* SNTL Praha, (1983)
- [18] J. Nečas, J. Jarušek, and J. Haslinger: *On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction*, Boll. Un. Mat. Ital. B 17, (1980), 796-811
- [19] J. Outrata, M. Kočvara, and J. Zowe: *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints*, Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. 28, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998)