

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Relokační metoda pro adaptivní řešení variačních nerovnic

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 10.5. 2005

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu své diplomové práce prof. RNDr. J. Haslingerovi, DrSc za odborné vedení a podnětné rady při jejím vypracování. Ráda bych také poděkovala prof. RNDr. Z. Dostálovi, DrSc. a Ing. P. Beremlijskemu z katedry aplikované matematiky VŠB-TU Ostrava za jejich ochotu a vstřícný přístup při konzultacích.

Práce byla vypracována za finanční podpory Grantové agentury České republiky (grant č. 101/02/0072 a č. 101/04/1145).

Abstrakt

Cílem této práce je nalezení optimálního dělení sítě pro řešení variační nerovnice. K tomuto je využito nástrojů tvarové optimalizace. Návrh analýzy citlivosti je dán s ohledem k pohybu uzlů sítě, jež vystupují jako návrhové proměnné. Kritérium užívané v analýze citlivosti je celková potenciální energie systému. Minimizace cenového funkcionálu znamená snížení diskretizační chyby a zlepšení aproximace kontaktní části. Pro srovnání výsledků je použito i další metody optimalizace - lokální zjemnění sítě. Teoretické úvahy jsou doplněny o numerické výsledky na konkrétním problému.

Klíčová slova

Variační nerovnice, existence a jednoznačnost řešení, cenový funkcionál, gradient cenového funkcionálu, analýza citlivosti, relokační metoda.

Abstract

The aim of this work is to find an optimal distribution of a grid for solving variational inequalities. Tools of optimization are used for it. Design sensitivity analysis is given with respect to the movement of grid points. The criterion used in sensitivity analysis is the total potential energy of the system evaluated at the equilibrium state. Minimization of the cost functional means reduction of the discretization error and a better approximation of the contact zone. To compare results we use another method of optimization – local refinement of a grid. Numerical results of model problem are presented.

Keywords

Variational inequalities, existence and the uniqueness of a solution, cost functional, gradient of the cost functional, sensitivity analysis, relocation method.

Obsah:

1 Úvod	6
2 Variační nerovnice	7
2.1 Řešení variační nerovnice	7
2.2 Existence a jednoznačnost řešení variační nerovnice.....	8
2.3 Aproximace variačních nerovnic.....	8
3 Analýza citlivosti	11
4 Formulace a variační formulace nerovnice 2.řádu.....	17
5 Úloha s konstantní překážkou.....	24
5.1 Zadání úlohy	24
5.2 Řešení pro pravidelnou síť	24
5.3 Řešení na lokálně zjemněné síti	34
5.4 Relokační metoda	45
6 Závěr	51
Literatura	53

1. Úvod

Analýza citlivosti je důležitá část jakékoli metody optimalizace, neboť se podílí také na výpočtu gradientů objektů. Poskytuje důležitý nástroj pro zlepšení návrhu. Spojitá závislost řešení na návrhových proměnných je fundamentální vlastnost zajišťující existenci optimálního řešení. Spojitost je sice důležitá, ale nestačí. Je potřeba znát i další vlastnosti. Jednou z nejdůležitějších je diferencovatelnost. Analýza citlivosti vyvíjí příslušné nástroje, které umožňují analyzovat diferencovatelnost objektů jako jsou řešení stavových problémů vzhledem k návrhovým proměnným v tvarové optimalizaci. Analýza citlivosti poskytuje informaci o gradientu potřebnou v metodách gradientního typu, nejčastěji využívaných k numerické minimizaci funkcí.

Hlavním úkolem této práce je jednoduše a srozumitelně ukázat možnosti optimalizace sítě pro řešení variační nerovnice. V kapitole 2 jsou shrnuty základní poznatky o variačních nerovnicích, existenci řešení a aproximaci variačních nerovnic. Kapitola 3 pojednává o diferencovatelných vlastnostech řešení, ukazuje, jak vypadá derivace cenového funkcionálu. V kapitole 4 je popsána speciální variační nerovnice. Je dokázána existence a jednoznačnost jejího řešení. Dále se zabývá diskretizací spojitého problému. Na závěr kapitoly je naznačen postup pro nalezení optimální volby sítě. V kapitole 5 je zadána konkrétní úloha. Detailně je zde ukázán postup řešení této úlohy. K diskretizaci spojitě úlohy je využita metoda konečných prvků (MKP), v tomto případě metoda Ritz-Galerkinova se speciálním výběrem báze funkcí. Je popsána optimalizace sítě, buď přidáním bodů (lokální zjemnění sítě), nebo přemístěním návrhových proměnných (pevný počet uzlů) – relokační metoda.

2. Variační nerovnice

Cílem této kapitoly bude uvést podmínky existence a jednoznačnosti řešení variační nerovnice. Dále ukážeme, jak souvisí vlastnosti bilineární formy s řešením variační nerovnice. Stručně popíšeme metody diskretizace a podíváme se na konvergenci řešení.

2.1 Řešení variační nerovnice

Mějme V reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem a normou $\|\cdot\|$, označme $U \subseteq V$ jeho neprázdnou, konvexní a uzavřenou podmnožinou a V' prostor spojitých lineárních funkcionalů nad V . Dále označme $\langle f, u \rangle$ jako hodnotu funkcionalu f v bodě u a definujme jeho normu

$$\|f\|_{V'} = \sup \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|} \quad v \neq 0, v \in V.$$

Buď $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineární forma.

Definice 2.1 Řekneme, že a je

a) symetrická na V , pokud $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$.

b) omezená na V , pokud existuje konstanta $k > 0$ tak, že

$$|a(u, v)| \leq k \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

c) V - eliptická na V , pokud existuje konstanta $\alpha > 0$ tak, že

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Definice 2.2 Řekneme, že u je řešením variační nerovnice zadané $\{U, a, f\}$, jestliže $u \in U$ a splňuje

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in U. \tag{P1}$$

Pokud je a navíc symetrická na V , je úloha (P1) ekvivalentní úloze:

$$\text{najít } u \in V \text{ takové, že } J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in U, \quad (\text{P2})$$

kde $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle$ je kvadratický funkcionál.

2.2 Existence a jednoznačnost řešení variační nerovnice

K dokázání existence a jednoznačnosti řešení využijeme toto zobecnění Lax-Milgramovy věty.

Věta 2.1 *Nechť V je Hilbertův prostor, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_1$ je bilineární forma, která je omezená a V - eliptická na V a $f \in V'$. Pak existuje právě jedno řešení úlohy (P1) a platí:*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}. \quad (2.1)$$

Důkaz viz [H83].

2.3 Aproximace variačních nerovnic

Buď $S \subseteq V, S \neq V$ neprázdná, konvexní, uzavřená podmnožina V , jiná než $U \subseteq V, U \neq V$. Předpokládejme navíc, že $S \subseteq S'$, kde S' je lineární podprostor dimenze n a buď $e_1, e_2, \dots, e_n$ jeho báze. Dále předpokládejme, že bilineární forma a je symetrická na V .

Řekneme, že prvek $u_S \in S$ je Ritzovou aproximací (P2) na množině S , pokud

$$J(u_S) \leq J(v) \quad \forall v \in S. \quad (2.2)$$

Úlohu (2.2) můžeme numericky řešit. Mějme $v \in S'$ libovolné. Pak můžeme v jednoznačně vyjádřit ve tvaru:

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}_1. \quad (2.3)$$

Dosazením do J dostáváme:

$$J(v) = \frac{1}{2}(\vec{a}, A\vec{a}) - (\vec{b}, \vec{a}),$$

kde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je matice tuhosti a $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ vektor pravých stran, jejichž prvky jsou dány:

$$a_{ij} = a(e_i, e_j), \quad b_i = \langle f, e_i \rangle, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Jelikož $\dim S' = n$, je prostor S' isomorfní s R_n pomocí isomorfního zobrazení $I: S' \rightarrow R_n$, kde

$$Iv = \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R_n \quad \forall v \in S',$$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je vektor koeficientů lineární kombinace vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$ (viz. (2.3)).

Užitím isomorfního zobrazení I je možno konvexní množinu S ztotožnit s konvexní neprázdnou podmnožinou $K \subseteq R_n$, definovanou vztahem

$$K = \{\vec{\alpha} \in R_n: I^{-1}\vec{\alpha} \in S\},$$

kde I^{-1} je inverze I .

Nyní lze úlohu (2.2) psát v této algebraické podobě:

$$\text{najít } \vec{\alpha} \in K: J(\vec{\alpha}) \leq J(\vec{\alpha}) \quad \forall \vec{\alpha} \in K, \quad (2.4)$$

kde

$$J(\vec{\alpha}) = J(I^{-1}\vec{\alpha}) = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}, A\vec{\alpha}) - (\vec{b}, \vec{\alpha}), \quad \vec{\alpha} \in R_n.$$

Úloha (2.4) tedy vede na úlohu konvexního programování v R_n : nalézt minimum kvadratické funkce J na konvexní, uzavřené podmnožině v R_n .

Jelikož hlavním požadavkem je řešení u aproximovat s libovolnou přesností, je zřejmé, že nám nebude stačit jedna množina S , pokud ovšem u není prvkem S , ale celý systém $\{S_h\}$, $h \rightarrow 0 +$.

Necht' u_h je řešením variační nerovnice $\{S_h, a, f\}$:

$$u_h \in S_h: a(u_h, v - u_h) \geq \langle f, v - u_h \rangle \quad \forall v \in S_h. \quad (2.5)$$

Označme $\varepsilon(h) = \|u - u_h\|$ jako chybu mezi přesným řešením u a jeho aproximací u_h na S_h .

Pak platí tato věta o konvergenci:

Věta 2.2 *Necht' $a: V \times V \rightarrow R_1$ je symetrická, V -eliptická a omezená na V . Necht' systém $\{S_h\}$ má tyto vlastnosti:*

$$\forall v \in U \exists v_h \in S_h: v_h \rightarrow v \text{ ve } V, h \rightarrow 0+; \quad (2.6)$$

$$\text{ze slabé konvergence } v_h \text{ k } v, v_h \in S_h, \text{ plyne, že } v \in U. \quad (2.7)$$

Pak $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0+$, tj. metoda je konvergentní.

Důkaz viz [H83].

3. Analýza citlivosti

Kapitola se zabývá diferencovatelnými vlastnostmi řešení variační nerovnice, závislé na parametru $\vec{\alpha}$.

Bud' $A(\vec{\alpha}) \in R_{n \times n}$ matice, $\vec{f}(\vec{\alpha}) \in R_n$ vektor a $\vec{\alpha}$ parametr, jež patří do nějaké otevřené množiny U_{ad} . Budeme uvažovat variační nerovnici, závislou na parametru $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$:

najít $\vec{x}(\vec{\alpha}) \in K(\vec{\alpha})$ tak, že

$$(\vec{y} - \vec{x}(\vec{\alpha}))^T A(\vec{\alpha}) \vec{x}(\vec{\alpha}) \geq (\vec{y} - \vec{x}(\vec{\alpha}))^T \vec{f}(\vec{\alpha}) \quad \forall \vec{y} \in K(\vec{\alpha}), \quad (\text{P}(\vec{\alpha}))$$

kde

$$K(\vec{\alpha}) = \{\vec{y} \in R_n : y_i \geq \phi_i(\vec{\alpha}) \forall i \in I\}, \quad (3.1)$$

$I = \{1, \dots, n\}$ a $\phi_i : U_{\text{ad}} \rightarrow R$, $i \in I$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na U_{ad} .

Bud' $J : U_{\text{ad}} \times R_n \rightarrow R$ reálná funkce.

Budeme se věnovat analýze citlivosti řešení problému $(\text{P}(\vec{\alpha}))$.

Předpokládejme, že jsou splněny tyto předpoklady:

- i) $A(\vec{\alpha})$ je regulární pro každé $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$;
- ii) $A \in C^1(U_{\text{ad}}; R_{n \times n})$, $\vec{f} \in C^1(U_{\text{ad}}; R_n)$;
- iii) $J \in C^1(U_{\text{ad}} \times R_n)$;
- iv) $A(\vec{\alpha})$ je symetrická pro každé $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$;
- v) $\exists \text{konst. } m > 0 : \vec{y}^T A(\vec{\alpha}) \vec{y} \geq m \|\vec{y}\|^2 \quad \forall \vec{y} \in R_n \quad \forall \vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$.

Lemma 3.1 Bud' splněn předpoklad i), ii) a v). Pak pro každé dvě řešení $\vec{x}(\vec{\alpha})$, $\vec{x}(\vec{\beta})$ problémů $(\text{P}(\vec{\alpha}))$, $(\text{P}(\vec{\beta}))$, kde $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in U_{\text{ad}}$ platí:

$$\|\vec{x}(\vec{\alpha}) - \vec{x}(\vec{\beta})\| \leq c\{\|A(\vec{\alpha}) - A(\vec{\beta})\| + \|\vec{f}(\vec{\alpha}) - \vec{f}(\vec{\beta})\| + \|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\|\}, \quad (3.2)$$

kde $c > 0$ nezávisí na $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in U_{\text{ad}}$.

Důkaz viz [HMO3].

Z Lemma 3.1 vyplývá Lipschitzovská spojitost zobrazení $\vec{\alpha} \mapsto x(\vec{\alpha})$ na U_{ad} . Z Rademacherovy věty také plyne diferencovatelnost $\vec{x}: \vec{\alpha} \mapsto \vec{x}(\vec{\alpha}) \in K(\vec{\alpha})$ skoro všude v U_{ad} .

Nyní ukážeme, že $\vec{x}$ je směrově diferencovatelné pro každé $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$ a každý směr $\vec{\beta} \in R_d$.

Víme, že $\vec{x}(\vec{\alpha}) \in K(\vec{\alpha})$ řeší problém (P($\vec{\alpha}$)), pokud $\exists$ vektor $\vec{\lambda}(\vec{\alpha})$ takový, že dvojice $(\vec{x}(\vec{\alpha}), \vec{\lambda}(\vec{\alpha}))$ splňuje Karusch-Kuhn-Tuckerovy podmínky optimalizace:

$$\begin{aligned} a_{ij}(\vec{\alpha})x_j(\vec{\alpha}) &= f_i(\vec{\alpha}) + \lambda_i(\vec{\alpha}) & \forall i = 1, \dots, n \\ \lambda_i(\vec{\alpha}) &\geq 0, x_i(\vec{\alpha}) - \phi_i(\vec{\alpha}) \geq 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ \lambda_i(\vec{\alpha})(x_i(\vec{\alpha}) - \phi_i(\vec{\alpha})) &= 0 & \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{KKT}(\vec{\alpha}))$$

Z Lemma 3.1 a (KKT($\vec{\alpha}$)) je vidět, že zobrazení $\vec{\lambda}: \vec{\alpha} \mapsto \vec{\lambda}(\vec{\alpha})$ je rovněž Lipschitzovsky spojitě na U_{ad} . Mějme $(\vec{x}(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}), \vec{\lambda}(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}))$ splňující (KKT($\vec{\alpha} + t\vec{\beta}$)), kde $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}, \vec{\beta} \in R_d$ a $t > 0$. Konečné difference

$$\frac{\vec{x}(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) - \vec{x}(\vec{\alpha})}{t} \quad \text{a} \quad \frac{\vec{\lambda}(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) - \vec{\lambda}(\vec{\alpha})}{t}$$

jsou v důsledku Lipschitzovské spojitosti omezené pro $t > 0$, a proto lze najít posloupnost $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow 0 +$ a vektory $\vec{x}': = \vec{x}'(\{t_n\})$, $\vec{\lambda}': = \vec{\lambda}'(\{t_n\})$ takové, že

$$\frac{\vec{x}(\vec{\alpha} + t_n\vec{\beta}) - \vec{x}(\vec{\alpha})}{t_n} \rightarrow \vec{x}', \quad \frac{\vec{\lambda}(\vec{\alpha} + t_n\vec{\beta}) - \vec{\lambda}(\vec{\alpha})}{t_n} \rightarrow \vec{\lambda}', \quad t_n \rightarrow 0 +. \quad (3.3)$$

Nyní potřebujeme ukázat, že $\vec{x}'$ a $\vec{\lambda}'$ nezávisí na bližším výběru $\{t_n\}$. Z ii) vyplývá, že směrové derivace A a $\vec{f}$ existují:

$$\begin{aligned}
A'(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) &:= \lim_{t_n \rightarrow 0+} \frac{A(\vec{\alpha} + t_n \vec{\beta}) - A(\vec{\alpha})}{t_n} \\
\vec{f}'(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) &:= \lim_{t_n \rightarrow 0+} \frac{\vec{f}(\vec{\alpha} + t_n \vec{\beta}) - \vec{f}(\vec{\alpha})}{t_n}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

a tyto limity nezávisí na $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow 0+$. Zderivujeme-li první rovnost v (KKT($\vec{\alpha}$)), dostaneme:

$$a'_{ij}(\vec{\alpha})x_j(\vec{\alpha}) + a_{ij}(\vec{\alpha})x'_j(\vec{\alpha}) = f'_i(\vec{\alpha}) + \lambda'_i(\vec{\alpha}) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Definujeme rozložení indexové množiny $I: I = I_+(\vec{\alpha}) \cup I_0(\vec{\alpha}) \cup I_-(\vec{\alpha})$ takto:

$$\begin{aligned}
I_+(\vec{\alpha}) &= \{i \in I \mid x_i(\vec{\alpha}) > \phi_i(\vec{\alpha}), \lambda_i(\vec{\alpha}) = 0\} \\
I_0(\vec{\alpha}) &= \{i \in I \mid x_i(\vec{\alpha}) = \phi_i(\vec{\alpha}), \lambda_i(\vec{\alpha}) = 0\} \\
I_-(\vec{\alpha}) &= \{i \in I \mid x_i(\vec{\alpha}) = \phi_i(\vec{\alpha}), \lambda_i(\vec{\alpha}) > 0\}.
\end{aligned}$$

Provedeme analýzu chování $\vec{x}(\vec{\alpha})$ a $\vec{\lambda}(\vec{\alpha})$ pro parametr ve tvaru $\vec{\alpha} + t\vec{\beta}$, $t \rightarrow 0+$.

Bud' $i \in I_+(\vec{\alpha})$. Pak vzhledem ke spojitosti zobrazení $\vec{\alpha} \mapsto \vec{x}(\vec{\alpha})$ platí, že $i \in I_+(\vec{\alpha} + t\vec{\beta})$ pro libovolné $|t| \leq \delta$, kde $\delta > 0$ je dosti malé. Z poslední podmínky (KKT($\vec{\alpha}$)) dostáváme, že $\lambda_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) = 0 = \lambda_i(\vec{\alpha})$ pro jakékoli $|t| \leq \delta$ a tedy $\lambda'_i(\vec{\alpha}) = 0$.

Pokud $i \in I_-(\vec{\alpha})$, pak $\lambda_i(\vec{\alpha}) > 0$ a také $\lambda_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) > 0$ pro $|t| \leq \delta$. Opět z poslední podmínky (KKT($\vec{\alpha}$)) máme: $x_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) = \phi_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta})$, takže $x'_i(\vec{\alpha}) = \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Konečně pro $i \in I_0(\vec{\alpha})$ a $t > 0$ platí:

$$\begin{aligned}
\lambda_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) &\geq \lambda_i(\vec{\alpha}) = 0 \\
x_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) &\geq \phi_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta})
\end{aligned}$$

a v důsledku toho $\lambda'_i(\vec{\alpha}) \geq 0$, $x'_i(\vec{\alpha}) \geq \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Nyní ukážeme, že

$$\lambda'_i(\vec{\alpha})(x'_i(\vec{\alpha}) - \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) = 0 \quad \forall i \in I. \tag{3.5}$$

(3.5) jistě platí pro $i \in I_+(\vec{\alpha}) \cup I_-(\vec{\alpha})$, neboť $\lambda'_i(\vec{\alpha}) = 0$ a $x'_i(\vec{\alpha}) = \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Pro $i \in I_0(\vec{\alpha})$, pokud je $\lambda'_i(\vec{\alpha}) = 0$, pak (3.5) opět platí. Pokud $\lambda'_i(\vec{\alpha}) > 0$, pak nutně $\lambda_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) > 0$, takže $x_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) = \phi_i(\vec{\alpha} + t\vec{\beta}) \forall |t| \leq \delta$ dosti malé. Odtud $x'_i(\vec{\alpha}) = \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ a je tak dokázáno, že (3.5) platí pro $\forall i \in I$.

Rozkladu I do $I_+(\vec{\alpha})$, $I_0(\vec{\alpha})$ a $I_-(\vec{\alpha})$ přiřadíme následující konvexní množinu $K(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$:

$$K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \{y \mid y_i \geq \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \forall i \in I_0(\vec{\alpha})\}. \quad (3.6)$$

Z předcházející analýzy plyne, že $(\vec{x}'(\{t_n\}), \vec{\lambda}'(\{t_n\}))$ splňuje KKT systém:

$$\begin{aligned} a_{ij}(\vec{\alpha})x'_j(\vec{\alpha}) &= f'_i(\vec{\alpha}) + \lambda'_i(\vec{\alpha}) - a'_{ij}(\vec{\alpha})x_j(\vec{\alpha}) \quad \forall i \in I \\ \lambda'_i(\vec{\alpha}) &= 0 \quad \forall i \in I_+(\vec{\alpha}) \\ \lambda'_i(\vec{\alpha}) &\geq 0, x'_i(\vec{\alpha}) \geq \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad \forall i \in I_0(\vec{\alpha}), x'_i(\vec{\alpha}) = \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad \forall i \in I_-(\vec{\alpha}) \\ \lambda'_i(\vec{\alpha})(x'_i(\vec{\alpha}) - \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) &= 0 \quad \forall i \in I_0(\vec{\alpha}) \cup I_-(\vec{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nyní jsme schopni zformulovat tuto větu.

Věta 3.1 *Bud'te splněny předpoklady ii), iv) a v). Pak řešení $\vec{x}(\vec{\alpha})$ problému $(P(\vec{\alpha}))$ je směrově diferencovatelné pro každé $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$ a v jakémkoli směru $\vec{\beta} \in R_d$. Kromě toho směrová derivace $\vec{x}'(\vec{\alpha}) := \vec{x}'(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ může být ekvivalentně charakterizována jako jediné řešení následujícího minimizačního problému:*

$$\begin{aligned} \text{najít } \vec{x}'(\vec{\alpha}) &\in K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \text{ tak, že} \\ G_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}(\vec{x}'(\vec{\alpha})) &\leq G_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}(\vec{y}) \quad \forall \vec{y} \in K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde

$$G_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}(\vec{y}) = \frac{1}{2} \vec{y}^T A(\vec{\alpha}) \vec{y} + \vec{y}^T A'(\vec{\alpha}) \vec{x}(\vec{\alpha}) - \vec{y}^T \vec{f}'(\vec{\alpha}).$$

Důkaz: Protože $A'(\vec{\alpha})$ a $\vec{f}'(\vec{\alpha})$ nezávisí na výběru $\{t_n\}$ a úloha (3.8) má právě jediné řešení, plyne odtud, že ani $\vec{x}'(\vec{\alpha})$, $\vec{\lambda}'(\vec{\alpha})$ nezávisí na bližším výběru $\{t_n\}$ a proto směrové derivace existují.

Mějme $J: U_{\text{ad}} \times R_n \rightarrow R$ funkci splňující iii) a definujme $J: U_{\text{ad}} \rightarrow R$

$$J(\vec{\alpha}) = J(\vec{\alpha}, \vec{x}(\vec{\alpha})), \quad (3.9)$$

kde $\vec{x}(\vec{\alpha}) \in K(\vec{\alpha})$ je řešení (P($\vec{\alpha}$)).

Potom J jako složení J a $\vec{x}$ je směrově diferencovatelné pro jakékoli $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$ a v jakémkoli směru $\vec{\beta} \in R_d$, ale obecně nemusí být spojitě diferencovatelné. Pro některé speciální cenové funkcionály však složená funkce může být třídy C^1 . To je případ funkce:

$$J(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2}(\vec{x}(\vec{\alpha}), A(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})) - (\vec{f}(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})),$$

která je 1x spojitě diferencovatelná v U_{ad} . To je vidět z výpočtu směrové derivace $J'(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$:

$$J'(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}(\vec{x}(\vec{\alpha}), A'(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})) + (\vec{x}'(\vec{\alpha}), A(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})) - (\vec{f}'(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})) - (\vec{f}(\vec{\alpha}), \vec{x}'(\vec{\alpha})).$$

Z (KKT($\vec{\alpha}$)) a definice $K(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ je zřejmé, že

$$(\vec{x}'(\vec{\alpha}), A(\vec{\alpha})\vec{x}(\vec{\alpha}) - \vec{f}(\vec{\alpha})) = (\vec{x}'(\vec{\alpha}), \vec{\lambda}(\vec{\alpha})) = \sum_{i \in L_-(\vec{\alpha})} \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \lambda_i(\vec{\alpha}).$$

Ukažme si poslední rovnost.

Jestliže $i \notin L_-(\vec{\alpha})$, pak $\lambda_i(\vec{\alpha}) = 0$ a proto $\phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \lambda_i(\vec{\alpha}) = x_i(\vec{\alpha}) \lambda_i(\vec{\alpha}) = 0$. Je-li $i \in L_-(\vec{\alpha})$, pak $x'_i(\vec{\alpha}) = \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Dostáváme tedy tento výraz:

$$J'(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}(\vec{x}(\vec{\alpha}), A'(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})) - (\vec{f}'(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})) + \phi'_i(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\lambda_i(\vec{\alpha}). \quad (3.10)$$

Chceme-li získat gradient funkce J , volíme za směry $\vec{\beta}$ kanonickou bázi R_d , tj. $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$.

4. Formulace a variační formulace nerovnice 2.řádu

V této kapitole se budeme zabývat speciální variační nerovnicí 2. řádu.

Označme

$$U = v(0,1), \quad (4.1)$$

kde c je záporná konstanta a buď

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 f v dx, \quad f \in L^2(I), \quad f > 0, \quad I = (0,1) \quad (4.2)$$

kvadratický funkcionál. Definujme tento problém:

$$\begin{aligned} & \text{najít } u \in U \text{ tak, že} \\ & J(u) = \min_{v \in U} J(v). \end{aligned} \quad (P')$$

Jak víme, (P') je ekvivalentní variační nerovnici:

$$\begin{aligned} & \text{najít } u \in U \text{ tak, že} \\ & \int_0^1 u'(v' - u') dx \geq \int_0^1 f(v - u) dx \quad \forall v \in U. \end{aligned} \quad (P)$$

Věta 4.1 Existuje právě jediné řešení úlohy (P).

Důkaz: Využijeme věty 2.1. Stačí ukázat, že bilineární forma $a(u, v) = \int_0^1 u' v' dx$ je omezená a V-eliptická na U a $F(v) = \int_0^1 f v dx$ je spojitý lineární funkcionál.

$$|\int_0^1 f v dx| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (v')^2 dx} \leq \|f\|_0 \|v\|_1 \Rightarrow F \text{ je spojitý lineární funkcionál na } U;$$

$$|\int_0^1 u' v' dx| \leq \sqrt{\int_0^1 (u')^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (v')^2 dx} \leq \|u'\|_0 \|v'\|_0 \Rightarrow a \text{ je omezená na } U;$$

$a(v, v) = \int_0^1 (v')^2 dx \geq c \|v'\|_1^2$, když jsme použili Friedrichsovu nerovnost $\Rightarrow a$ je V-eliptická na U .

Následující věta interpretuje řešení u úlohy (P).

Věta 4.2 *Nechť řešení $u \in C^2([0,1])$. Pak platí:*

$$\begin{aligned} -u'' &\geq f \text{ v } (0,1) \\ (u'' + f)(u - c) &= 0 \text{ v } (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Důkaz: Okrajová podmínka $u(0) = u(1) = 0$ plyne z definice U . Na integrál na levé straně variační nerovnice (P) použijeme metodu integrace per partes:

$$[u'(v - u)]_0^1 - \int_0^1 u''(v - u)dx \geq \int_0^1 f(v - u)dx. \quad (4.4)$$

První člen na pravé straně (4.4) vypadne, jelikož $u, v \in U$. Po převedení na jednu stranu dostáváme:

$$\int_0^1 (u'' + f)(v - u)dx \leq 0. \quad (4.5)$$

Zvolme v tvaru $v = u + \phi$, kde $\phi \in C_0^\infty(I)$, $\phi \geq 0$ na I . Pak $v \in U$ a z (4.5) plyne

$$\int_0^1 (u'' + f)(\phi)dx \leq 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I), \phi \geq 0 \text{ na } I.$$

Odtud dostaneme

$$u'' + f \leq 0 \text{ na } I.$$

Bud' $\bar{x} \in (0,1)$ bod takový, že $u(\bar{x}) > c$. Pak $u(x) > c$ v jistém okolí $B_j(\bar{x})$, tj.

$$u(x) > c \quad \forall x \in B_j(\bar{x}).$$

Bud' $\phi \in C_0^\infty(B_j(\bar{x}))$ libovolná funkce a zvolme v ve tvaru $v = u + t\phi$, $|t| \leq \varepsilon$. Pak $v \in U$, pokud ε je dostatečně malé a proto můžeme tuto funkci užít v (4.5). Po dosazení a vydělení t , dostáváme:

$$\int_{B_j(\bar{x})} (u'' + f)\phi dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(B_j(\bar{x}))$$

a tedy

$$-u'' = f \text{ v } B_j(\bar{x}).$$

Poznámka 4.1 Interval $[0,1]$ můžeme rozdělit na 2 množiny M_1, M_2 , kde

$$M_1 = \{x \in (0,1) | u(x) = c\} \dots \text{kontaktní zóna}$$

$$M_2 = \{x \in (0,1) | u(x) > c\}.$$

Z (4.3)₂ plyne, že pro $x \in M_2$ platí rovnost $-u''(x) = f(x)$.

Nyní popíšeme diskretizaci úlohy (P'). Necht' $\Delta_h: 0 = \alpha_0 < \alpha_1 \dots < \alpha_n = 1$ je dělení intervalu $[0,1]$ a h jeho norma.

Každému takovému Δ_h přiřadíme konečně-dimensionální prostor V_h po částech lineárních funkcí:

$$V_h = \{v_h \mid v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

a jeho konvexní podmnožinu S_h , kde

$$S_h = \{v_h \mid v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Je zřejmé, že $S_h \subset U$ pro $\forall h$.

Ritzovou aproximací u nazveme řešení této úlohy:

$$\text{najdi } u_h \in S_h: J(u_h) \leq J(v_h) \quad \forall v_h \in S_h. \quad (P_h')$$

Jak víme z kapitoly 2, úloha (P_h') vede na úlohu kvadratického programování: nalézt minimum kvadratické funkce

$$J(\vec{y}) = \frac{1}{2}(\vec{y}, A\vec{y}) - (\vec{f}, \vec{y})$$

na konvexní množině

$$K = \{y \mid y_i = 0, i = 1, \dots, n-1\},$$

což je přesně úloha studovaná v předchozí kapitole.

Je vidět, že matice A je třídiagonální a pro po částech lineární polynomy jsou její prvky dány takto:

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} + \frac{1}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \\
a_{i,i+1} &= \frac{1}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} \\
a_{i,i-1} &= \frac{1}{\alpha_{i-1} - \alpha_i}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Kvalita aproximovaného řešení závisí mimo jiné na dělení intervalu $[0,1]$. Necht' $\bar{\Delta}_h$ je pevně zvolené “referenční” dělení intervalu $[0,1]$:

$$0 = \bar{\alpha}_0 < \bar{\alpha}_1 < \dots < \bar{\alpha}_n = 1.$$

Kolem každého uzlu dělení $\bar{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, n-1$ uvažujme jeho $\delta_i > 0$ okolí, tj. interval $(\bar{\alpha}_i - \delta_i, \bar{\alpha}_i + \delta_i)$. δ_i zvolíme takovým způsobem, aby uzly α_i , kde $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = 1$, $\alpha_i \in (\bar{\alpha}_i - \delta_i, \bar{\alpha}_i + \delta_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ tvořily opět dělení Δ_h intervalu $[0,1]$ (první a poslední uzel dělení je fixován).

Označme $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in R_{n-1}$ vektor, jehož složky jsou vnitřní uzly dělení Δ_h . Konečně-elementové řešení budeme uvažovat jako funkci, jež závisí na $\vec{\alpha} \in U_{ad}$, kde

$$U_{ad} = \{ \vec{\alpha} \in R_{n-1} \mid \alpha_i \in (\bar{\alpha}_i - \delta_i, \bar{\alpha}_i + \delta_i), i = 1, \dots, n-1 \}$$

a $\delta_i > 0$ jsou pevně zvolená. Naším cílem bude nalézt “optimální” $\vec{\alpha} \in U_{ad}$, které dá nejlepší kvalitu aproximovaného řešení. Základem je následující lemma.

Lemma 4.1 *Necht' $u \in U$ je řešením (P) a $u_h \in S_h$ jeho Rietzova aproximace. Necht' navíc $u \in C^2([0,1])$. Pak*

$$\frac{1}{2} \|u - u_h\|_{1,I}^2 + \int_0^1 (u'' + f)(c - u_h) dx = J(u_h) - J(u). \tag{4.7}$$

Důkaz: Z Taylorova rozvoje plyne:

$$J(u_h) - J(u) = J'(u, u_h - u) + \frac{1}{2} J''(u, u_h - u, u_h - u).$$

Protože J je kvadratický funkcionál, je

$$J'(u, u_h - u) = \int_0^1 u'(u'_h - u') \, dx - \int_0^1 f(u_h - u) \, dx \quad (4.8)$$

$$J''(u, u - u_h, u - u_h) = |u - u_h|_{1,J}^2. \quad (4.9)$$

Na první integrál pravé strany (4.8) použijeme metodu integrace per partes:

$$\int_0^1 u'(u'_h - u') \, dx = - \int_0^1 u''(u_h - u) \, dx,$$

když jsme navíc využili toho, že $u(0) = u(1) = u_h(0) = u_h(1) = 0$. Odtud a z (4.3) dostaneme:

$$J'(u, u_h - u) = - \int_0^1 (u'' + f)(u_h - u) \, dx = - \int_0^1 (u'' + f)(u_h - c) \, dx - \int_0^1 (u'' + f)(c - u) \, dx,$$

kde c je konstanta z definice množiny K . Poslední integrál je však roven 0, jak plyne z (4.3)₂.

Odtud a z (4.9) dostáváme (4.7).

Poznámka 4.2 První výraz vlevo (4.7) je diskretizační chyba, zatímco druhý výraz charakterizuje, jak dobře je aproximována kontaktní část. Tento člen by se rovnal nule, pokud $u_h = u$.

Jak již bylo zmíněno, budeme uvažovat naše konečně-elementové řešení u_h jakožto funkci polohy uzlů Δ_h , tj. $u_h := u_h(\vec{\alpha})$.

Jsou-li $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in U_{\text{ad}}$ dvě různá dělení intervalu $[0,1]$ a jestliže

$$J(u_h(\vec{\alpha}_1)) < J(u_h(\vec{\alpha}_2)),$$

budeme dělení realizované pomocí $\vec{\alpha}_1$ považovat za “lepší“, než dělení pomocí $\vec{\alpha}_2$. To nás vede k následující definici optimálního dělení $[0,1]$.

Definice 4.1 Řekneme, že dělení Δ_h realizované pomocí $\vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}$ je optimální, jestliže

$$J(u_h(\vec{\alpha})) \leq J(u_h(\vec{\alpha}')) \quad \forall \vec{\alpha}' \in U_{\text{ad}}. \quad (\mathbf{P})$$

Vyjádříme-li **(P)** v algebraické podobě, dostaneme následující úlohu:

$$\text{najdi } \vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}: J(\vec{\alpha}) \leq J(\vec{\alpha}) \quad \forall \vec{\alpha} \in U_{\text{ad}}, \quad (\mathbf{P}')$$

kde

$$J(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2}(\vec{x}(\vec{\alpha}), A(\vec{\alpha})\vec{x}(\vec{\alpha})) - (\vec{f}(\vec{\alpha}), \vec{x}(\vec{\alpha})).$$

Přitom $\vec{x}(\vec{\alpha})$ je řešením variační nerovnice:

najdi $\vec{x}(\vec{\alpha}) \in K$ takový, že

$$(A(\vec{\alpha})\vec{x}(\vec{\alpha}), \vec{y} - \vec{x}(\vec{\alpha})) \geq (\vec{f}(\vec{\alpha}), \vec{y} - \vec{x}(\vec{\alpha})) \quad \forall \vec{y} \in K, \quad (\mathbf{P}(\vec{\alpha}))$$

K nalezení optimální sítě užijeme dvě strategie:

- (1) zjistíme, která složka $\nabla_{\vec{\alpha}} J(\vec{\alpha})$ je největší. Tam dochází lokálně k největší změně funkce J , a proto přidáme další dva uzly dělení (nalevo a napravo od daného uzlu). Dojde tedy k lokálnímu zjemňování sítě.
- (2) budeme numericky minimizovat funkci J na množině U_{ad} . V tomto případě počet uzlů dělení zůstává stejný, mění se jejich poloha.

Při použití kterékoli z těchto strategií, je nutno spočítat gradient J . Jak víme z předchozí kapitoly je tato funkce 1x spojitě diferencovatelná. K výpočtu gradientu je potřeba znát parciální derivace A a $\vec{f}$ podle proměnných α_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Snadno zjistíme, že $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} A(\vec{\alpha})$ je dána takto:

$$a'_{ii} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} a_{ii} = -\frac{1}{(\alpha_i - \alpha_{i-1})^2} + \frac{1}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2}$$

$$\begin{aligned}
 a'_{i,i+1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} a_{i,i+1} = -\frac{1}{(\alpha_i - \alpha_{i+1})^2} \\
 a'_{i,i-1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} a_{i,i-1} = \frac{1}{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

V našem příkladu za funkci f bereme:

$$f = -2.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \vec{f}(\vec{\alpha}) = (0 \dots 0 - 1 \ 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T, \ f'_{i-1} = -1 \text{ a } f'_{i+1} = 1. \tag{4.11}$$

5. Úloha s konstantní překážkou

V této kapitole se budu zabývat analýzou a řešením konkrétní variační nerovnice s konstantní překážkou. Cílem bude najít optimální síť využitím strategií (1) a (2) zmíněných v předcházející kapitole.

5.1 Zadání úlohy

Bud'

$$U = vI,$$

kde

$$c = -0.12$$

a zvolme pravou stranu $f = -2$.

Chci najít řešení $u \in U$ tak, že:

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v), \quad (5.1)$$

kde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx + 2 \int_0^1 v dx.$$

5.2 Řešení pro pravidelnou síť

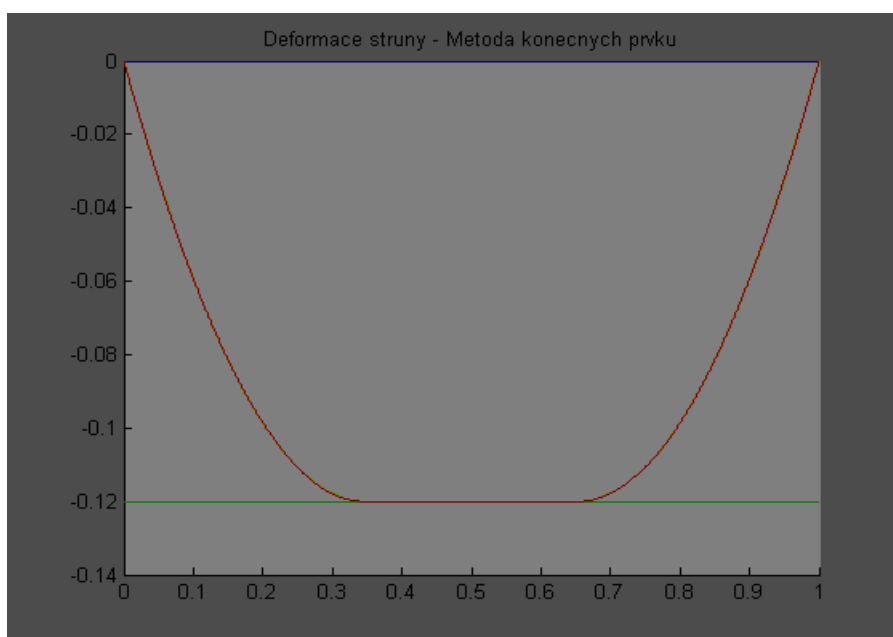
Úlohu jsem řešila metodou konečných prvků. K diskretizaci jsem použila pravidelnou síť. Interval $I = [0,1]$ jsem rozdělila na disjunktní podintervaly. Sestavila jsem matici tuhosti A a vektor vnějších sil $\vec{f}$. Prvky matice tuhosti A jsou definovány v (4.6) a prvky $\vec{f}$ jsou s ohledem na volbu $f = -2$, dány takto:

$$f_i = x_{i-1} - x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{přitom } x_0 = 0 \text{ a } x_{n+1} = 1). \quad (5.2)$$

Proměnná x_i se objevuje pouze u složky f_{i-1} a f_{i+1} , neboť

$$f_{i-1} = x_{i-2} - x_i, \quad f_{i+1} = x_i - x_{i+2}.$$

Řešení úlohy pro pravidelné dělení I na 200 podintervalů je na Obr. 1, kde je znázorněna překážka c , původní poloha struny a poloha struny po deformaci.



Obr.1 - řešení úlohy pro pravidelné dělení I na 200 podintervalů

Pro určení gradientu funkcionálu potenciální energie J je potřeba určit derivaci matice tuhosti A' dle (4.10) a derivaci vektoru vnějších sil $\vec{f}'$ dle (4.11), abych mohla využít vztahu (3.10).

Derivace překážky c' podle každé složky $\vec{a}$ a v každém směru $\vec{\beta}$ je rovna 0, takže pro výpočet derivace dostáváme vztah:

$$J'(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{1}{2}(\vec{x}(\vec{a}), A'(\vec{a}), \vec{x}(\vec{a})) - (\vec{f}'(\vec{a}), \vec{x}(\vec{a})). \quad (5.3)$$

Provedla jsem kontrolu výpočtu gradientu pro dělení intervalu $I = [0,1]$ na 5 částí. Pro kontrolu spočtených hodnot gradientu pomocí vztahu (5.3) jsem využila konečných diferencí. Každou složku vektoru $\vec{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ (mimo α_0 a α_5) jsem vždy postupně posunula o $\delta = 0.0001$, následně určila hodnotu cenového funkcionálu J a spočetla hodnotu derivace pomocí zpětných diferencí. Například pro $\alpha_1 = 0.2 + \delta$ se hodnota J rovnala -0.123999998 a po dosazení

$$\frac{\partial J(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_1} \approx \frac{J(\alpha_0, \alpha_1 + \delta, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) - J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)}{\delta}$$

vyšla hodnota této derivace 0.00002 (podobně s α_2 , α_3 a α_4). Výsledky jsou shrnuty v Tab.1.

α_i	Původní hodnota cenového funkcionálu	Hodnota cen. funkcionálu při posunutí α_i o $\delta = 0.0001$	Složka gradientu funkcionálu spočtená dle vztahu (5.3)	Výpočet derivace konečnými diferencemi
α_1	-0.124	-0.1239999980	0.000001	0.000020
α_2	-0.124	-0.1239984999	0.015005	0.015001
α_3	-0.124	-0.1240014999	-0.015003	-0.014999
α_4	-0.124	-0.1239999980	0	0.000020

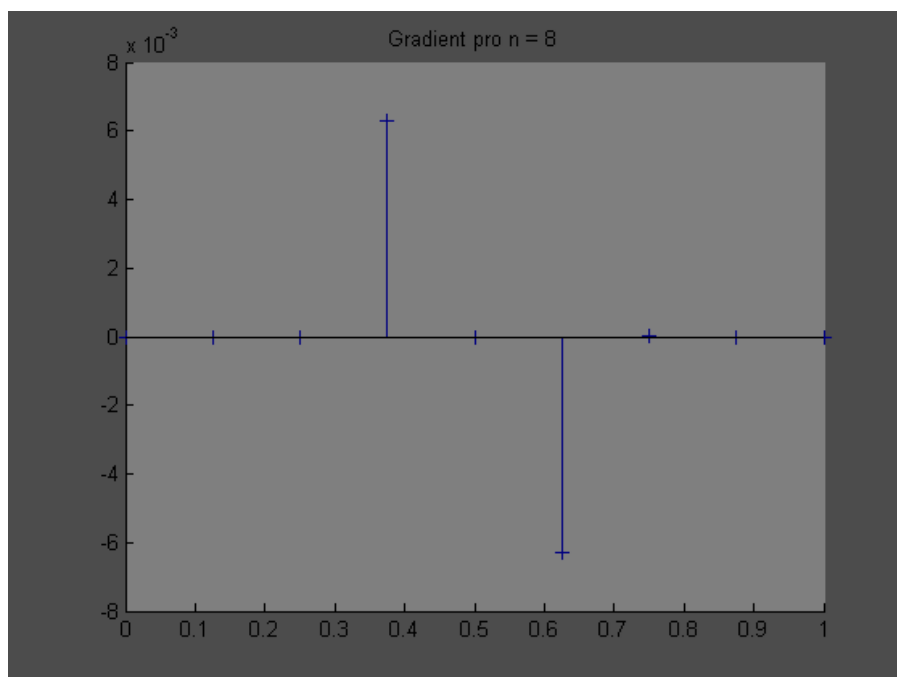
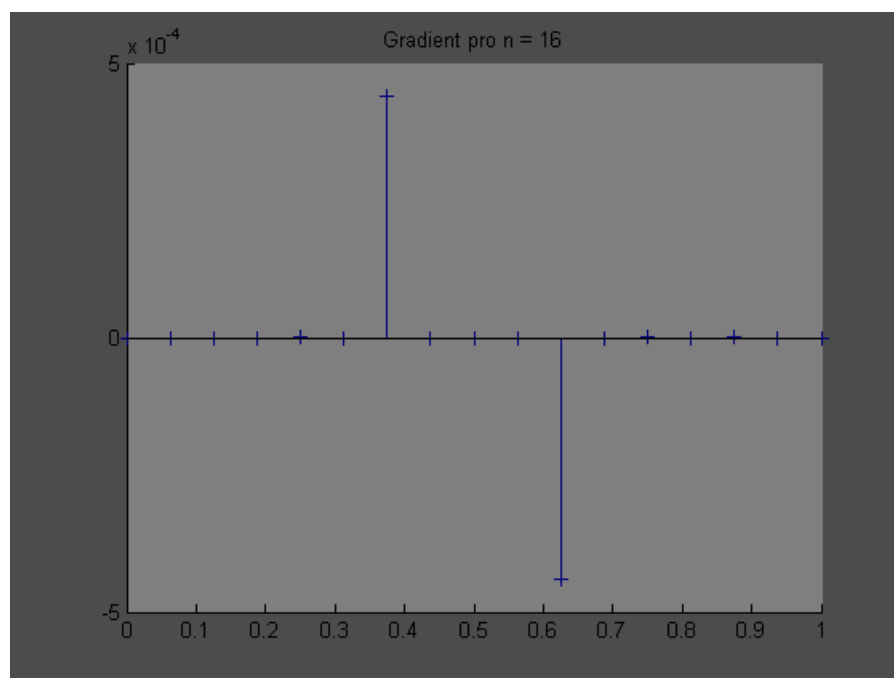
Tab.1 Kontrola výpočtu složek gradientu

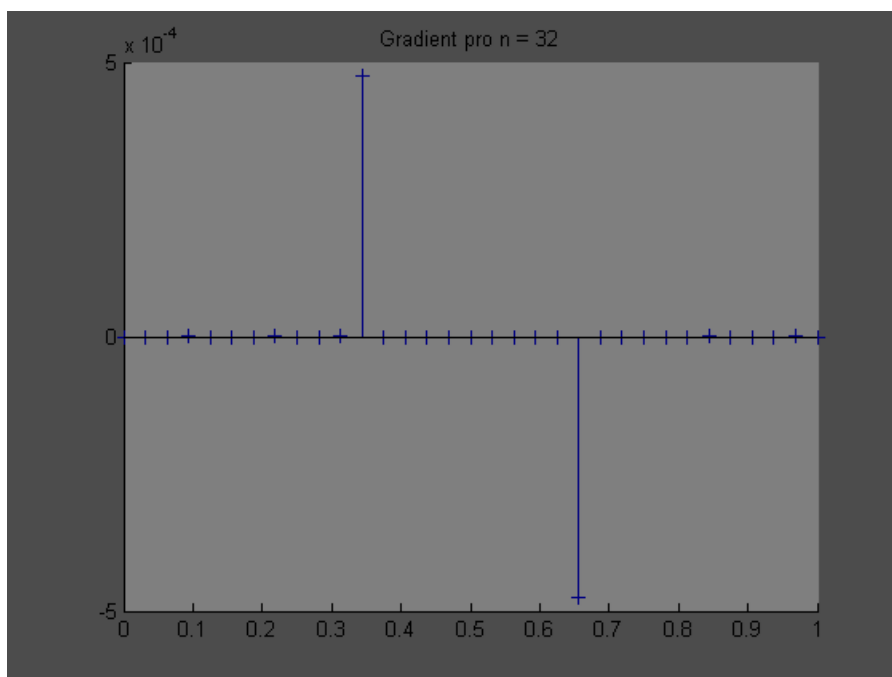
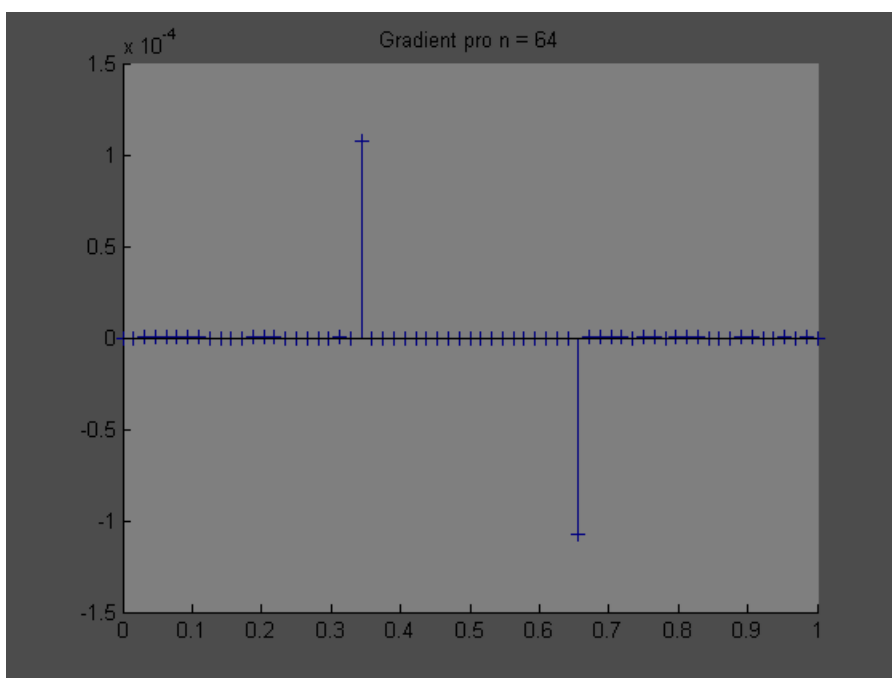
Nyní budu zkoumat, jaké jsou hodnoty složek gradientu pro zvětšující se počet dělení intervalu I . Postupně budu brát dělení na $n = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ a 1024 podintervalů.

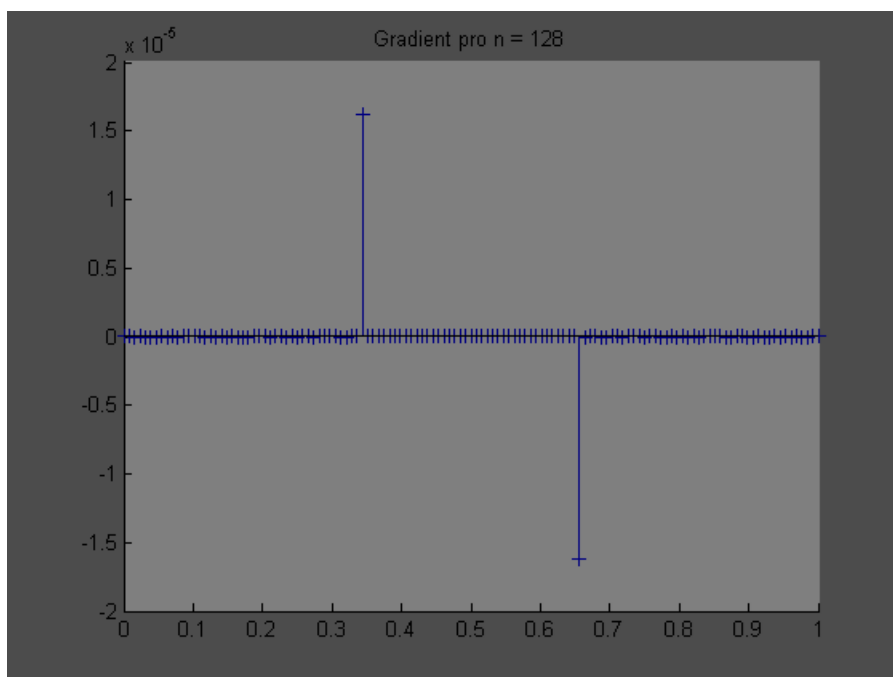
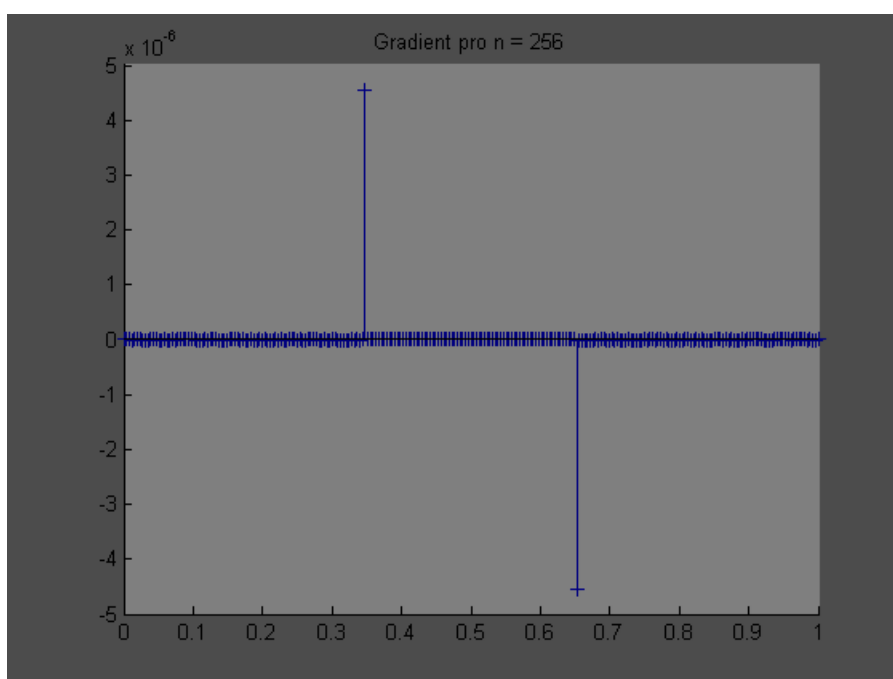
Z Tab.2 a Obr.2 - 9 je vidět, že pro všechna dělení jsou hodnoty derivace ve všech bodech nulové nebo téměř nulové mimo dvou bodů (jedná se o body, kde dojde ke změně na kontakt nebo zpět na nekontakt). Tyto hodnoty jsou symetrické. Absolutní hodnota největší složky gradientu se se zvětšujícím počtem bodů dělení zmenšuje.

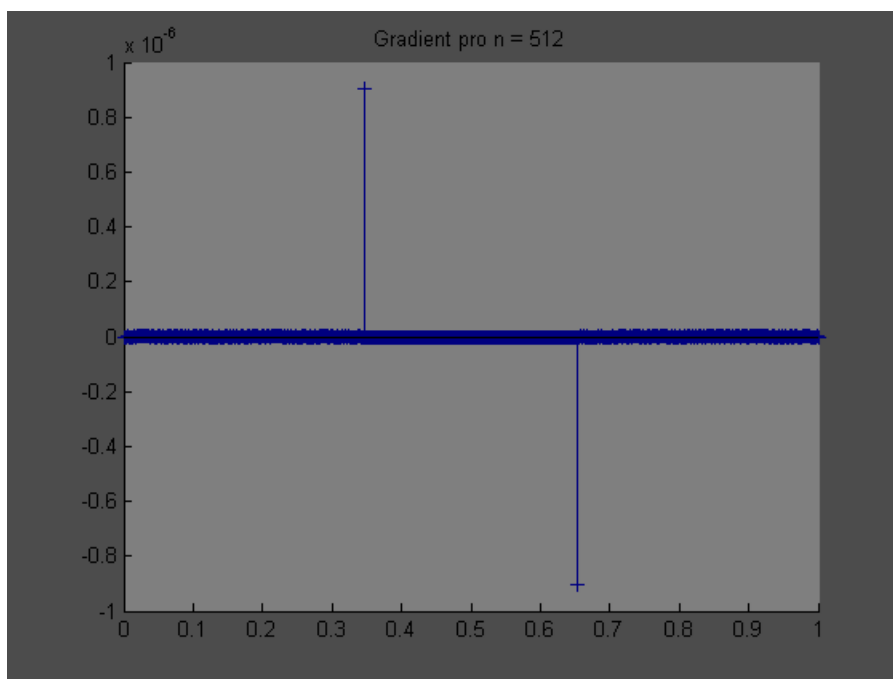
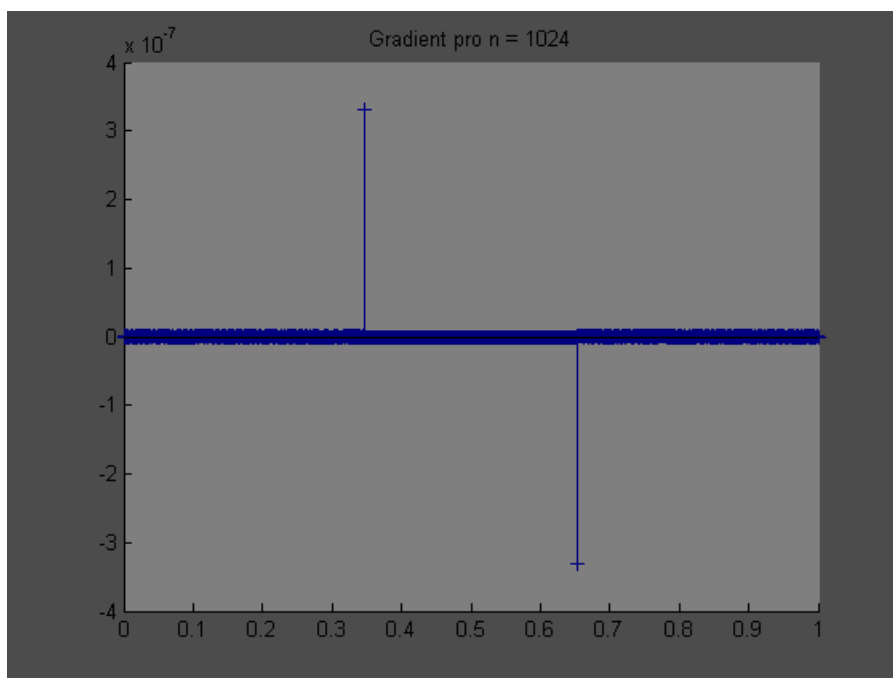
n	Největší složka gradientu	Nejmenší složka gradientu
8	6.30000e-3	- 6.30000e-3
16	4.40625e-4	- 4.40625e-4
32	4.74019e-4	- 4.74019e-4
64	1.07808e-4	- 1.07808e-4
128	1.62550e-5	- 1.62550e-5
256	4.53504e-6	- 4.53504e-6
512	9.05501e-7	- 9.05501e-7
1024	3.31661e-7	- 3.31661e-7

Tab.2

Obr.2 – hodnoty složek gradientu pro dělení na 8 podintervalů I Obr.3 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 16 podintervalů

Obr.4 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 32 podintervalůObr.5 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 64 podintervalů

Obr.6 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 128 podintervalůObr.7 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 256 podintervalů

Obr.8 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 512 podintervalůObr.9 – hodnoty složek gradientu pro dělení I na 1024 podintervalů

Jako “přesné” řešení jsem zvolila řešení na velmi jemné ekvidistantní síti, konkrétně dělení I na 1024 podintervalů. Provedu srovnání přibližných řešení pro pravidelné dělení I na 128, 256 a 512 podintervalů s řešením “přesným”. Budu zkoumat:

- hodnotu cenového funkcionálu J ;
- kontaktní část získaného řešení ;
- hodnotu složek gradientu v bodech změny;
- globální a lokální chybu mezi přibližným a “přesným” řešením;
- hodnotu Lagrangeova multiplikátoru u uzlu, kde dojde ke kontaktu struny s překážkou.

ad a)

Hodnotu cenového funkcionálu jsem počítala dle vztahu:

$$J(\vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{x}(\vec{a}), A(\vec{a})\vec{x}(\vec{a})) - (\vec{f}(\vec{a}), \vec{x}(\vec{a})), \quad (5.4)$$

kde $\vec{x}(\vec{a})$ je řešení algebraické variační nerovnice, $A(\vec{a})$ matice tuhosti a $\vec{f}(\vec{a})$ vektor vnějších sil. Výsledné hodnoty jsou shrnuty v Tab.3.

n	hodnota $J(\vec{a})$
128	- 0.12914173
256	- 0.12914698
512	- 0.12914831
1024	- 0.12914864

Tab.3

ad b)

Zde budu zkoumat, v jakém intervalu je struna po deformaci v kontaktu s překážkou, velikost kontaktní části a její odchylku (v absolutní hodnotě) od velikosti kontaktní části “přesného” řešení. Vše je shrnuto v Tab.4.

n	kontaktní část	velikost kont.části	odchylka
128	[0.343750 , 0.656250]	0.312500	0.005859
256	[0.347656 , 0.652344]	0.304688	0.001953
512	[0.345703 , 0.654297]	0.308594	0.001953
1024	[0.346679 , 0.653320]	0.306641	0

Tab.4

ad c)

Z Tab.2 a Obr.6 – 9 je vidět, že v právě v krajních bodech intervalu kontaktní části je hodnota složky gradientu v absolutní hodnotě o hodně větší než v bodech ostatních. Také je patrné, že pro větší počet uzlů se maximální hodnota těchto složek zmenšuje.

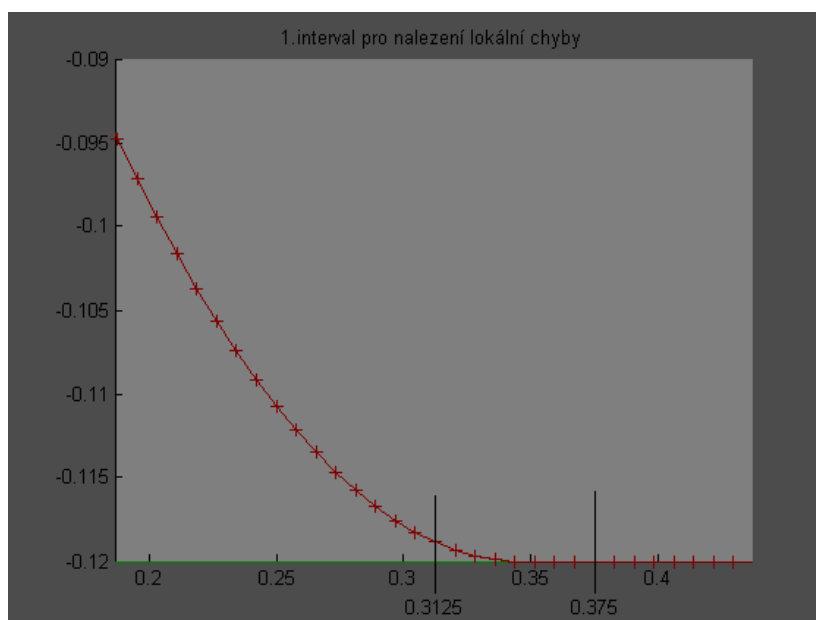
ad d)

Pro určení chyby mezi přibližným a “přesným” řešením jsem využila H1 normu:

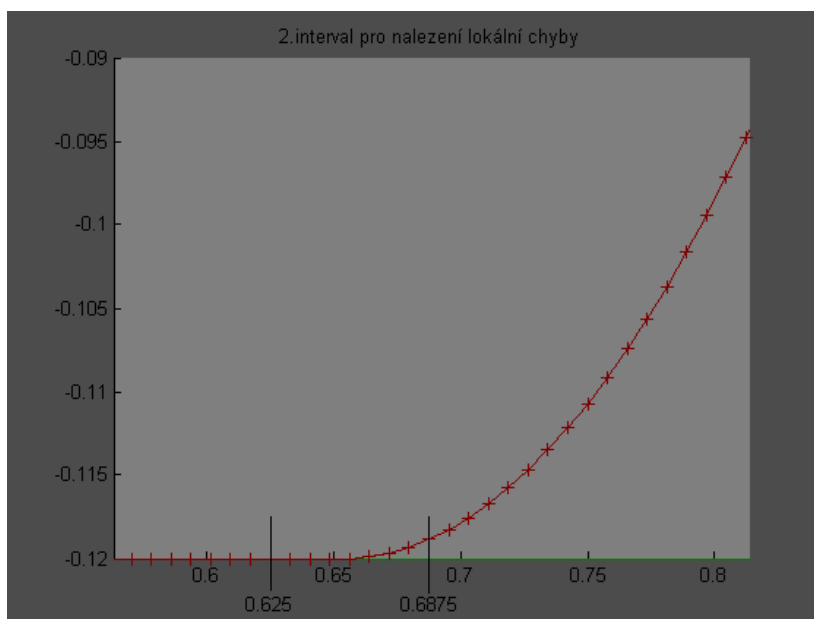
$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} = \left(\int_G (u - u_h)^2 dx + \int_G (u' - u_h')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.5)$$

kde u je “přesné” řešení, u_h přibližné řešení postupně pro dělení I na 128, 256 nebo 512 podintervalů. K výpočtům integrálů nutných pro určení H1 normy jsem použila složené Newton-Cotesovy vzorce.

Globální chyba odpovídá volbě $G = I$. Lokální chybu jsem počítala na intervalech kolem bodů, kde nastala změna. Konkrétně jsem brala $G = [0.3125, 0.375]$ a $G = [0.625, 0.6875]$ (Obr.10a,b).



Obr.10a – Interval $G = [0.3125, 0.375]$ pro nalezení lokální chyby

Obr.10b – Interval $G = [0.625, 0.6875]$ pro nalezení lokální chyby

V Tab.5 jsou vypočtené globální a lokální chyby mezi “přesným” řešením a řešením pro dělení I na 128, 256 a 512 podintervalů. Pro zjištění, jak se do globální chyby projeví chyba derivace řešení, vypočítám seminormu na I .

$$\|u' - u'_h\|_{L^2(I)} = (\int_I (u' - u'_h)^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

n	globální chyba	seminorma	lokální chyba
128	3.775080e-6	1.659011e-6	2.409131e-6
256	8.429038e-7	4.628558e-7	5.846667e-7
512	2.164708e-7	6.534892e-8	1.255130e-7

Tab.5

Globální chyba se zmenšuje pro zjemňující se dělení

ad e)

Hodnota Lagrangeova multiplikátoru λ_i v uzlech α_i ležících mimo kontaktní část řešení se rovná nule. Zajímá mě, jak vypadá λ_i v uzlu, kde došlo ke kontaktu struny s překážkou.

n	hodnota λ_i u uzlu změny na kontakt
128	0.0024716
256	0.0063940
512	0.0005376
1024	0.0001515

Tab.6

Hodnota Lagrangeova multiplikátoru je shodná v obou krajních bodech intervalu kontaktní části. U uzlů ležících uvnitř kontaktní části je hodnota multiplikátoru větší než v uzlech změny.

Shrnutí: Z Tab.2-5 je vidět, že se zjemňujícím se dělením se největší složka gradientu a hodnota cenového funkcionálu zmenšuje. Odchylka velikosti kontaktní části od velikosti kontaktní části “přesného” řešení a globální chyba se pro zjemňující dělení také zmenšila.

5.3 Řešení na lokálně zjemněné síti

V této části se budu zabývat nalezením optimální sítě pro dělení I na 128, 256 a 512 podintervalů. Opět budu výsledky srovnávat s “přesným” řešením.

Použiji strategii (1) z předchozí kapitoly. Kolem uzlů, kde jsem zjistila v absolutní hodnotě největší složky $\nabla_{\vec{a}} J(\vec{a})$ pro dělení I na 128, 256 a 512 podintervalů, přidám 2 uzly, jeden o $\frac{h}{2}$ doleva a jeden o $\frac{h}{2}$ doprava, kde postupně $h = \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}$.

Dělení I na 128 podintervalů

Z Tab.2 a 4 a Obr.6 vidím, že největší složka (v absolutní hodnotě) gradientu je ve dvou bodech $\alpha_{44} = 0.34375$ a $\alpha_{84} = 0.65625$. Přidám tedy celkem 4 uzly $\alpha_{44} \pm \frac{h}{2}$ a $\alpha_{84} \pm \frac{h}{2}$. Dostávám dělení I na 132 podintervalů.

Z řešení pro zjemněnou síť vyšla kontaktní část v intervalu $[0.347656, 0.652344]$, kde krajní body intervalu jsou právě přidané uzly.

Pomocí vztahu (5.3) vypočítám gradient a zjistím, jak vypadají složky gradientu okolo bodů změn na zjemněné síti oproti složkám gradientu na síti pravidelné.

Na Obr.11a,c jsou v absolutní hodnotě největší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 132 podintervalů a na Obr.11b,d pro dělení pravidelné na 128 podintervalů.

Dělení I na 256 podintervalů

Z Tab.2 a 4 a Obr.7 je vidět, že největší složka (v absolutní hodnotě) gradientu je opět ve dvou bodech $\alpha_{89} = 0.347656$ a $\alpha_{167} = 0.652344$. Přidám celkem 4 uzly $\alpha_{89} \pm \frac{h}{2}$ a $\alpha_{167} \pm \frac{h}{2}$. Dostávám dělení na 260 podintervalů.

Pro dělení na 260 podintervalů je kontaktní část: $[0.345703, 0.654297]$. Pomocí vztahu (5.3) určím gradient J .

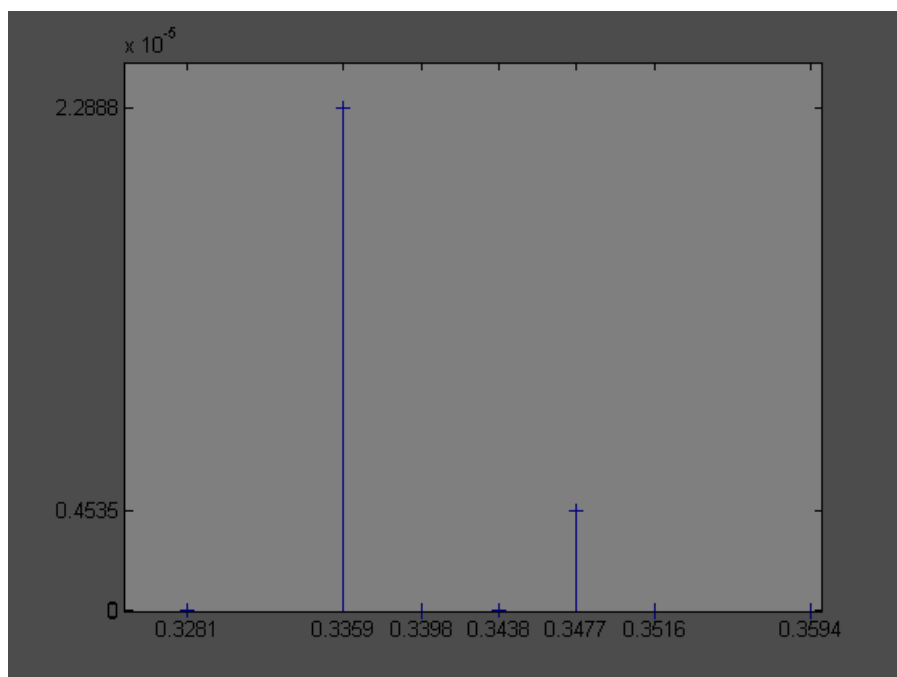
Lokální srovnání složek gradientu na zjemněné síti oproti pravidelné síti je na Obr.12a-d. Na Obr.12a,c jsou největší složky gradientu (v absolutní hodnotě) pro optimalizované dělení I na 260 podintervalů a na Obr.12b,d pro dělení pravidelné na 256 podintervalů.

Dělení I na 512 podintervalů

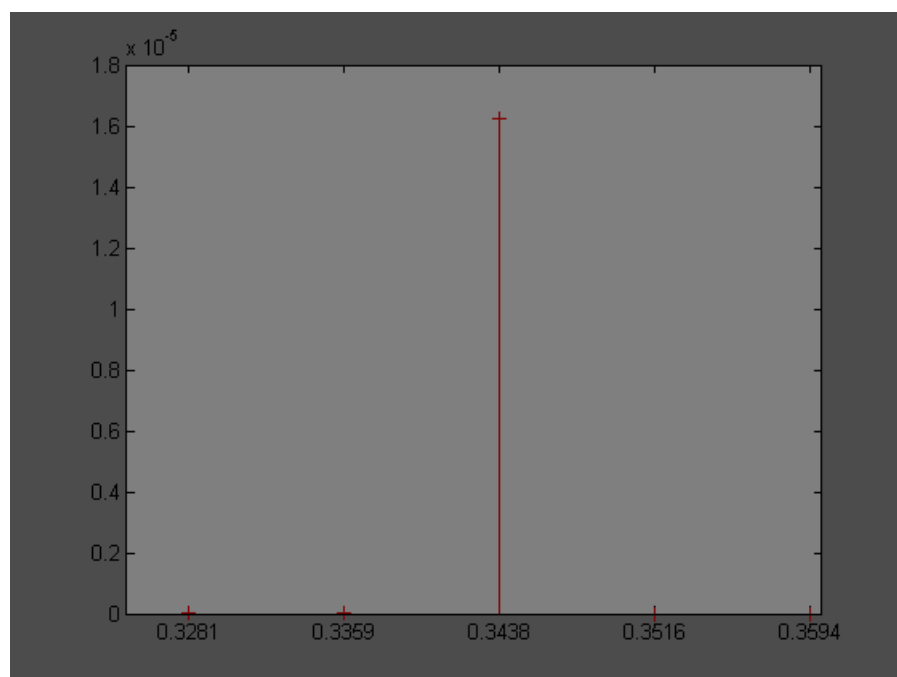
Z Tab.2 a 4 a Obr.8 vidím, že největší složka (v absolutní hodnotě) gradientu je v bodech $\alpha_{177} = 0.345703$ a $\alpha_{335} = 0.654297$. Znovu přidám 4 uzly $\alpha_{177} \pm \frac{h}{2}$ a $\alpha_{335} \pm \frac{h}{2}$. Dostanu zjemněné dělení I na 516 podintervalů.

Pro řešení na zjemněné síti na 516 podintervalů je kontaktní část: $[0.346680, 0.653320]$. Zjistím gradient J (pomocí (5.3)).

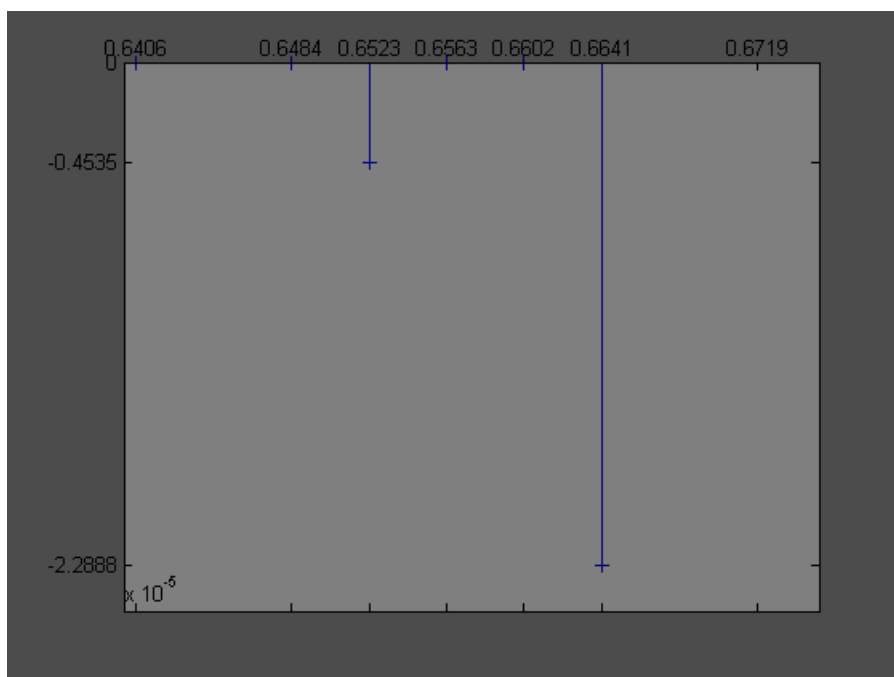
Na Obr.13a,c jsou největší složky, v absolutní hodnotě, gradientu pro optimalizované dělení I na 516 podintervalů a na Obr.13b,d pro dělení pravidelné na 512 podintervalů.



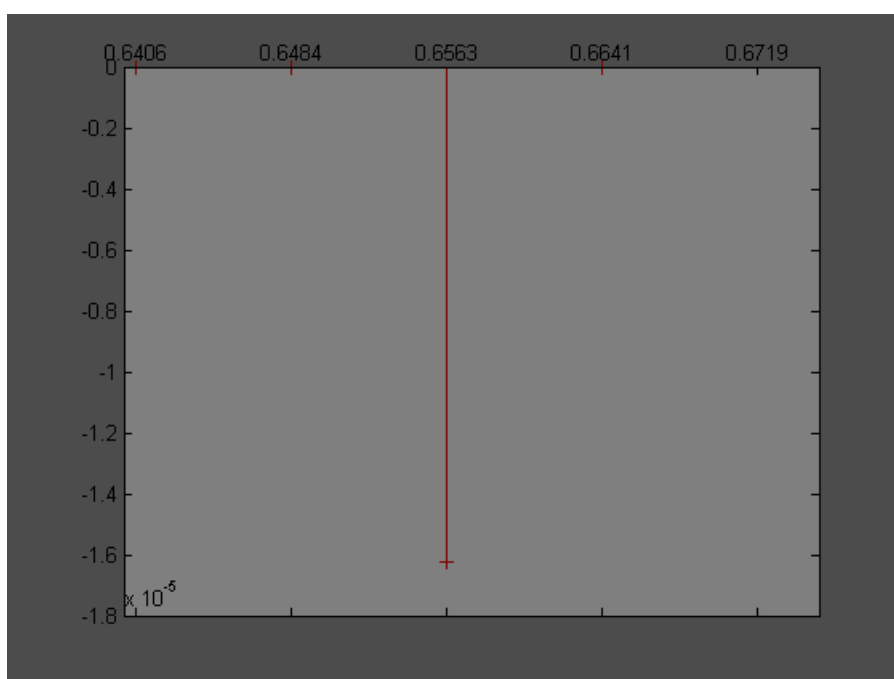
Obr.11a - největší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 132 podintervalů (změna na kontakt 0.3477)



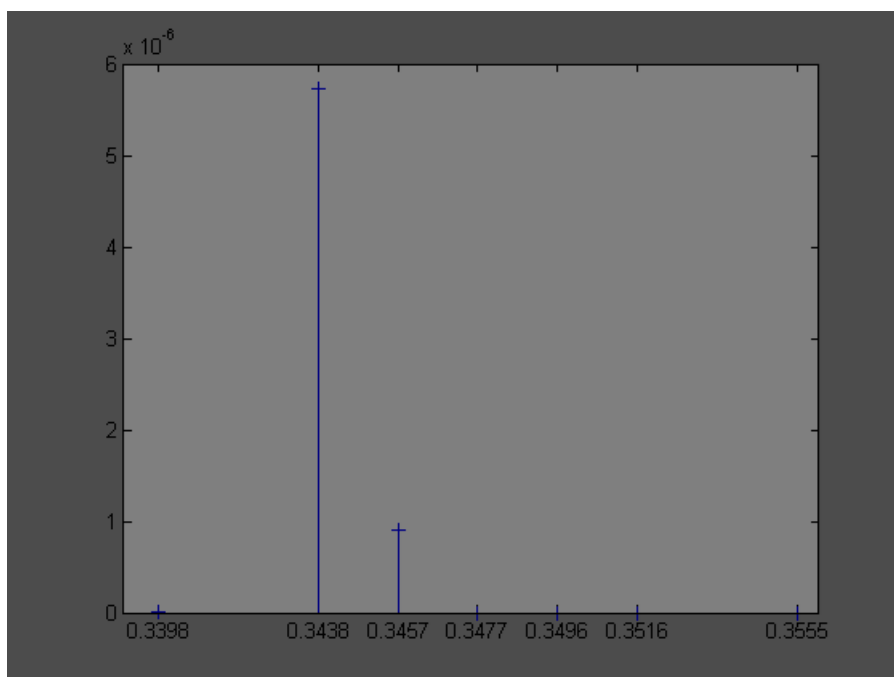
Obr.11b - největší složky gradientu pro pravidelné dělení I na 128 podintervalů (změna na kontakt 0.3438)



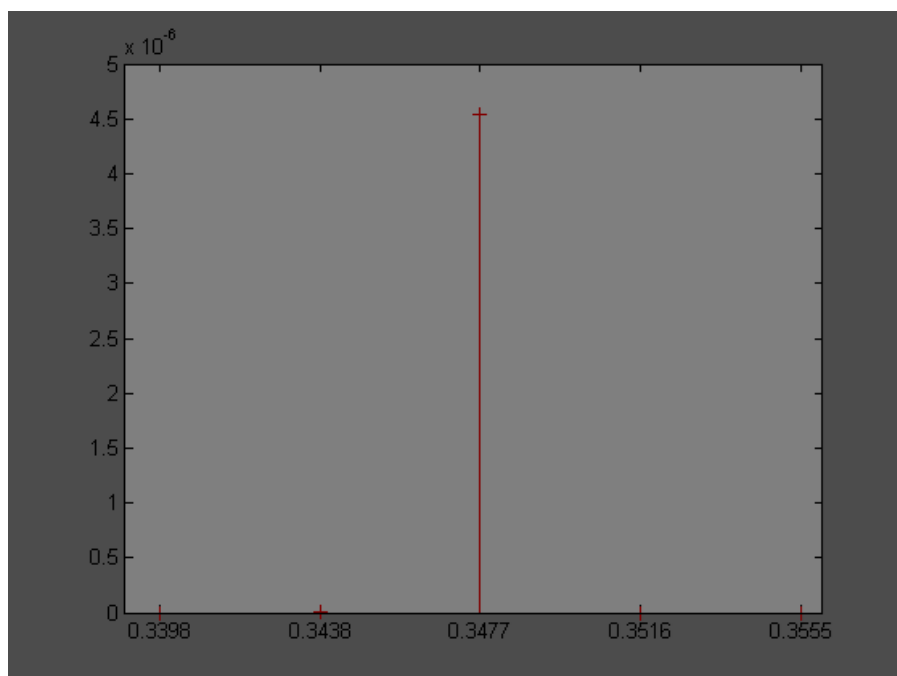
Obr.11c - nejmenší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 132 podintervalů (změna z kontaktu 0.6523)



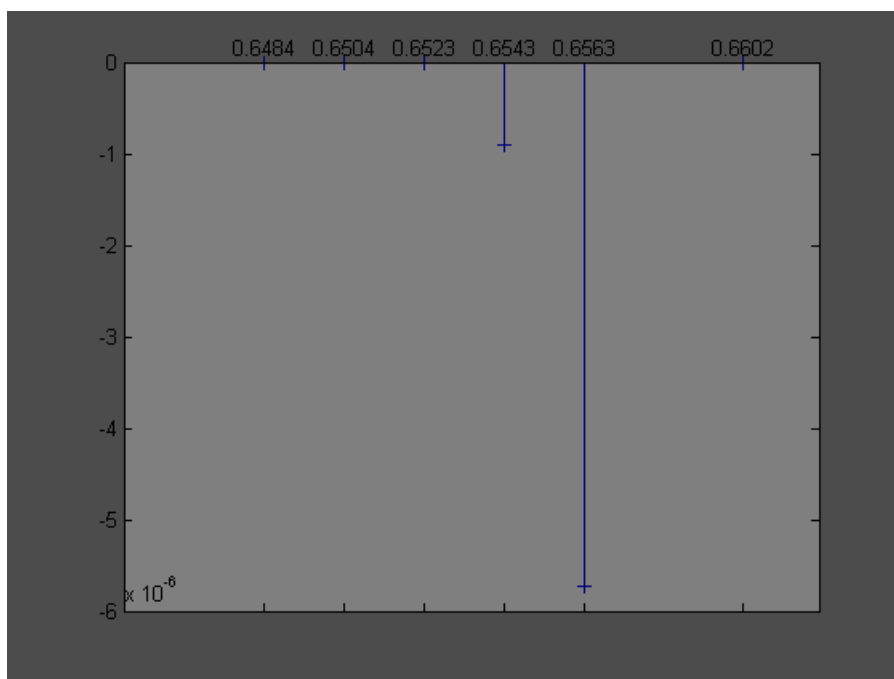
Obr.11d - nejmenší složky gradientu pro pravidelné dělení I na 128 podintervalů (změna z kontaktu 0.6563)



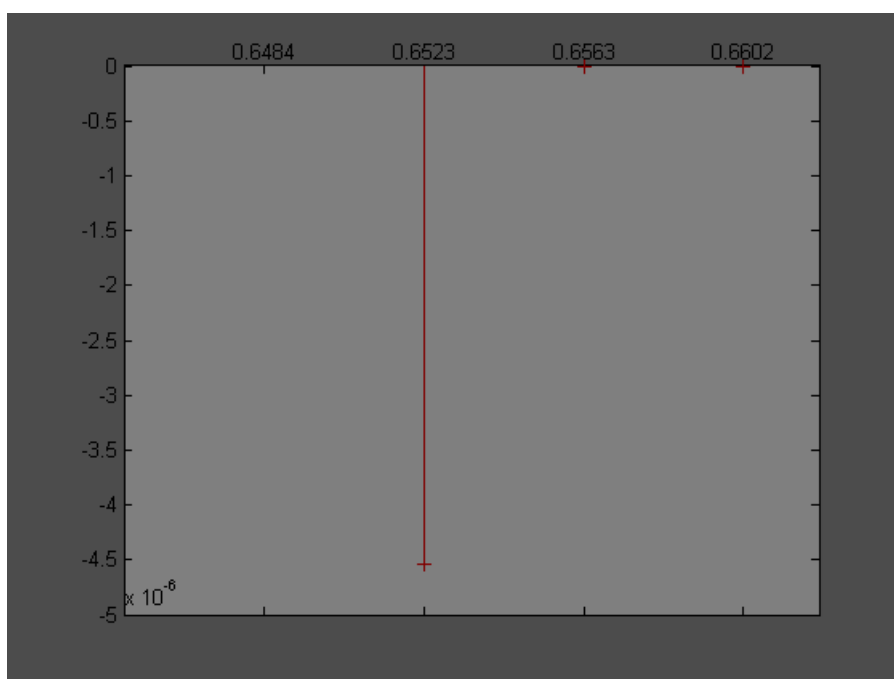
Obr.12a - největší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 260 podintervalů (změna na kontakt 0.3457)



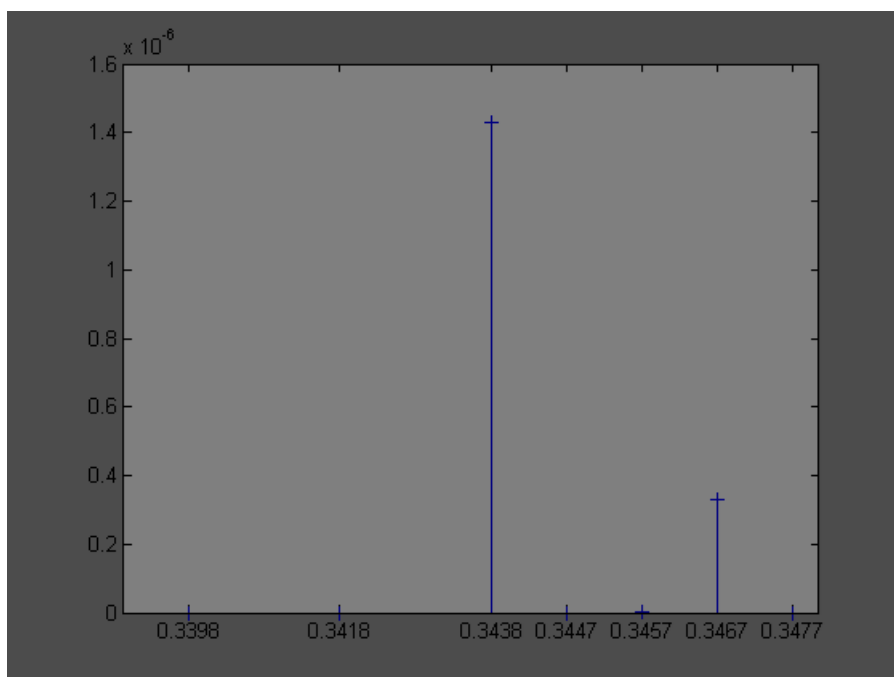
Obr.12b - největší složky gradientu pro pravidelné dělení I na 256 podintervalů (změna na kontakt 0.3477)



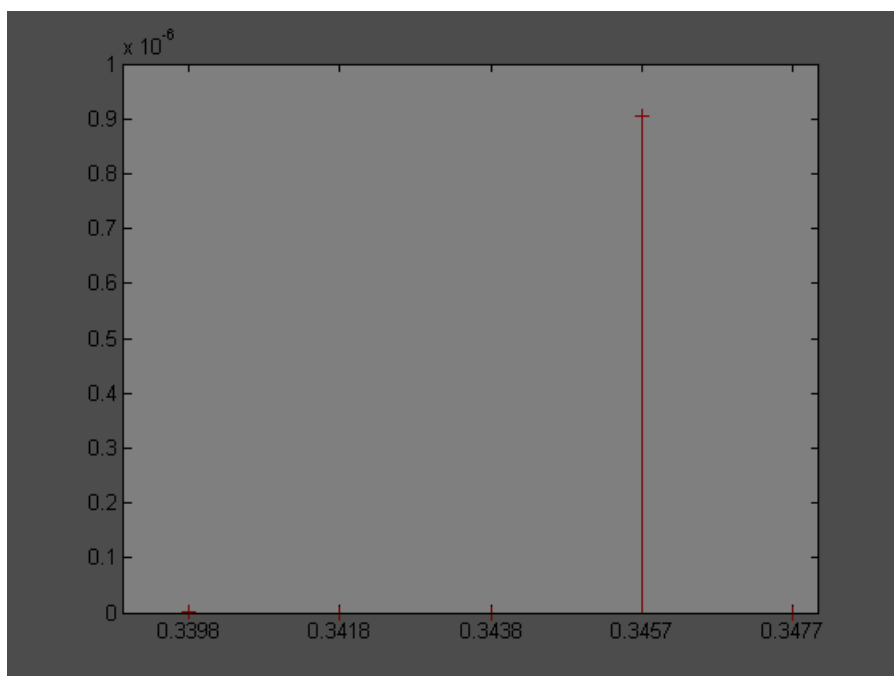
Obr.12c - nejmenší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 260 podintervalů (změna z kontaktu 0.6543)



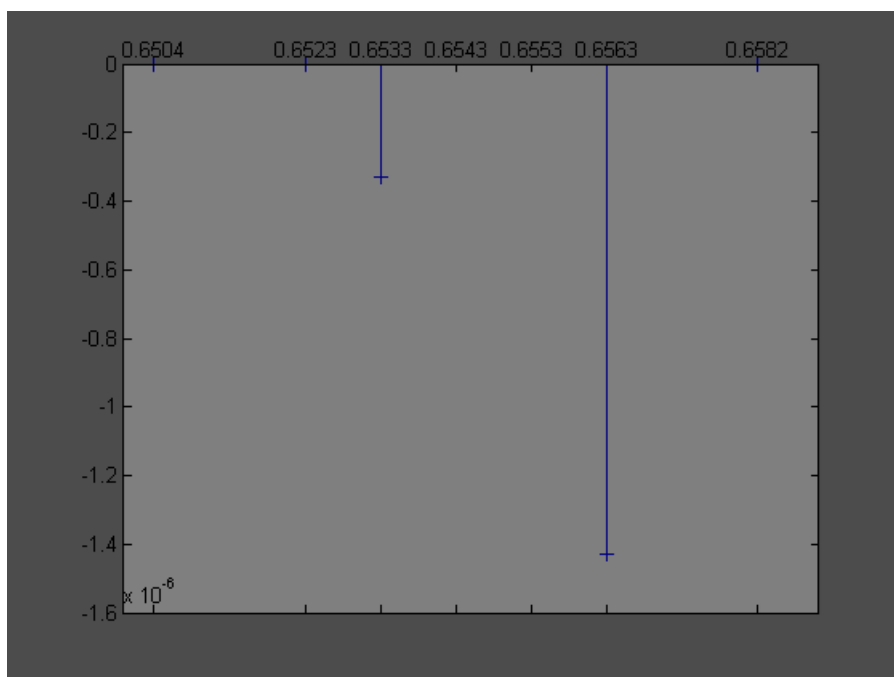
Obr.12d - nejmenší složky gradientu pro pravidelné dělení na 256 podintervalů (změna z kontaktu 0.6523)



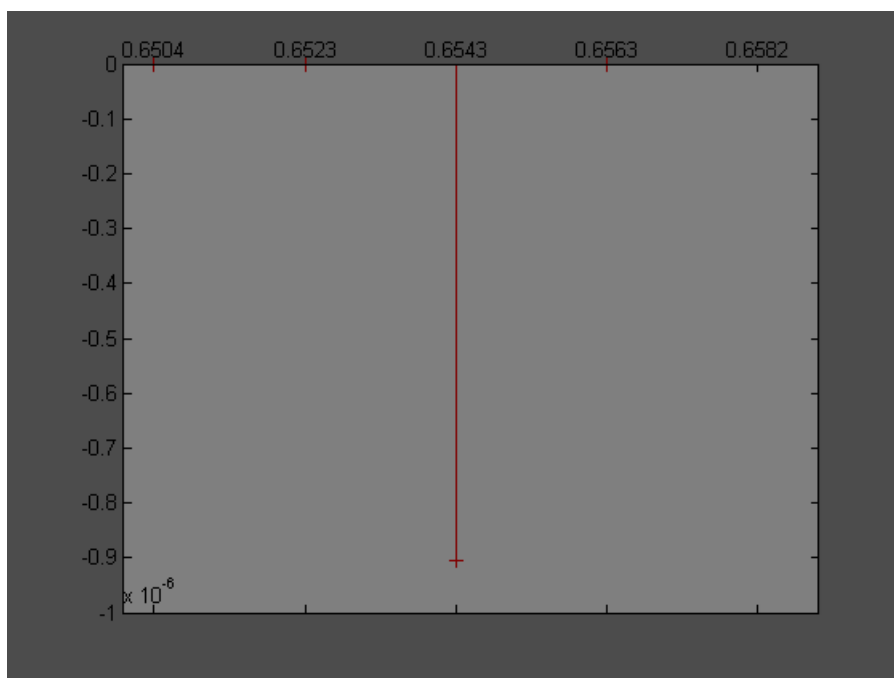
Obr.13a - největší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 516 podintervalů (změna na kontakt 0.3467)



Obr.13b - největší složky gradientu pro pravidelné dělení I na 512 podintervalů (změna na kontakt 0.3457)



Obr.13c - nejmenší složky gradientu pro optimalizované dělení I na 516 podintervalů (změna z kontaktu 0.6533)



Obr.13d - nejmenší složky gradientu pro pravidelné dělení I na 512 podintervalů (změna z kontaktu 0.6543)

U řešení na lokálně zjemněné síti (optimalizované řešení) budu zkoumat stejné veličiny jako u řešení na síti pravidelné (viz část 5.2). Navíc budu zkoumat, jestli došlo k nějakému zlepšení. Výsledky pro původní řešení porovnáám s výsledky pro řešení optimalizované.

a) hodnota cenového funkcionálu

V Tab.7 je srovnání hodnot cenového funkcionálu J pro pravidelnou síť a pro síť optimalizovanou vypočtených dle (5.4). Ve všech případech se pro optimalizovanou síť hodnota J minimalizovala nebo zůstala stejná.

n	hodnota J pro pravidelnou síť	hodnota J pro optimalizovanou síť	n
128	-0.12914173	-0.12914186	132
256	-0.12914698	-0.12914700	260
512	-0.12914831	-0.12914831	516

Tab.7

b) kontaktní část nalezeného řešení

V Tab.8-10 jsou shrnuty výsledky a provedeno srovnání. Pro řešení na zjemněné síti se krajní body intervalu kontaktní části posunuly do přidanych bodů a tím došlo ke zmenšení odchylky velikosti kontaktní části od velikosti kontaktní pro “přesné” řešení. Dokonce pro optimalizované dělení na 516 podintervalů je interval kontaktní části stejný jako pro řešení “přesné”.

n	kontaktní část před optimalizací sítě	kontaktní část po optimalizaci sítě	n
128	[0.343750 , 0.656250]	[0.347656 , 0.652344]	132
256	[0.347656 , 0.652344]	[0.345703 , 0.654297]	260
512	[0.345703 , 0.654297]	[0.346679 , 0.653320]	516

Tab.8

n	velikost kontaktní části před optimalizací sítě	velikost kontaktní části po optimalizaci sítě	n
128	0.312500	0.304688	132
256	0.304688	0.308594	260
512	0.308594	0.306641	516

Tab.9

n	odchylka před optimalizací sítě	odchylka po optimalizaci sítě	n
128	0.005860	0.001953	132
256	0.001953	0.001953	260
512	0.001953	0	516

Tab.10

c) největší složka gradientu J

Z Obr.11-13(a-d) a Tab.11a,b je vidět, že pro řešení na optimalizované síti se hodnota složky gradientu J u uzlů, kde došlo ke změně, zmenšila oproti řešení na pravidelné síti, ale největší složka gradientu pro zjemněnou síť nepatrně vzrostla. Z důvodu přidání dvou uzlů kolem bodu změny na kontakt dojde k různým vzdálenostem mezi sousedními uzly, například pro dělení I na 132 podintervalů mezi uzly α_{42} , α_{43} a α_{43} , α_{44} , což vidím jako důvod mírného zvětšení složky gradientu řešení u uzlu α_{43} .

n	největší složka gradientu před optimalizací sítě	největší složka gradientu po optimalizaci sítě	n
128	1.62550e-5	2.28880e-5	132
256	4.53504e-6	5.72200e-6	260
512	9.05501e-7	1.43050e-6	516

Tab.11a

n	složka gradientu u uzlu změny před optimalizací sítě	složka gradientu u uzlu změny po optimalizaci sítě	n
128	1.62550e-5	4.53504e-6	132
256	4.53504e-6	9.05501e-7	260
512	9.05501e-7	3.31661e-7	516

Tab.11b

d) globální a lokální chyba mezi přibližným a “přesným” řešením

V Tab.12 jsou srovnány velikosti globální chyby (podle vztahu (5.5)) řešení pro pravidelnou síť a optimalizovanou síť s “přesným” řešením. Pro všechna optimalizovaná řešení došlo ke zmenšení globální chyby. Lokální chybu (Tab.14) jsem počítala na stejných intervalech G jako v části 5.2 (Obr.10a,b). Je zajímavé si všimnout, že pro optimalizované dělení I na 516 podintervalů je globální chyba shodná s chybou lokální a dokonce i se seminormou $\|u' - u'_h\|_{L^2(I)}$ (Tab.13).

n	globální chyba před optimalizací sítě	globální chyba po optimalizaci sítě	n
128	3.775080e-6	3.378722e-6	132
256	8.429038e-7	4.608719e-7	260
512	2.164708e-7	7.300050e-8	516

Tab.12

n	seminorma před optimalizací sítě	seminorma po optimalizaci sítě	n
128	1.659011e-6	3.303625e-6	132
256	4.628558e-7	4.129531e-7	260
512	6.534892e-8	7.300050e-8	516

Tab.13

n	lokální chyba před optimalizací sítě	lokální chyba po optimalizaci sítě	n
128	2.409131e-6	3.323720e-6	132
256	5.846667e-7	4.257896e-7	260
512	1.255130e-7	7.300050e-8	516

Tab.14

ad e) hodnota Lagrangeova multiplikátoru u uzlu změny na kontakt

Z hodnot Lagrangeova multiplikátoru na optimalizované síti vidíme, že složka odpovídající uzlu změny na kontakt pro dělení l na 260 a 516 podintervalů se výrazně zmenšila.

n	λ_i u uzlu změny na kontakt před optimalizací sítě	λ_i u uzlu změny na kontakt po optimalizaci sítě	n
128	0.0024716	0.0063940	132
256	0.0063940	0.0005376	260
512	0.0005376	0.0001515	516

Tab.15

Shrnutí: Ze získaných výsledků vidím, že pro všechny nalezené optimální sítě došlo ke snížení hodnoty cenového funkcionálu i globální chyby. Odchylka velikosti kontaktní části nalezených řešení od velikosti kontaktní části "přesného" řešení se také zmenšila, dokonce pro optimální síť na 516 uzlů je odchylka nulová.

5.4 Relokační metoda

V této metodě budu postupovat podle strategie (2), zmíněné v kapitole 4. Budu numericky minimizovat cenový funkcionál J . Potřebuji najít optimální dělení $\vec{\alpha}$ s pevným počtem uzlů. Necht' $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ je poloha referenční sítě. Kolem každého uzlu α_i budu uvažovat okolí $\delta > 0$, tj. interval $[\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta]$, ve kterém se mohou uzly pohybovat. Ukáži, že minimizace funkcionálu umožňuje minimalizovat globální chybu mezi přibližným a “přesným” řešením.

K minimizaci J a nalezení optimálního $\vec{\alpha}$ jsem využila funkci z Matlabu 6.5, konkrétně funkci *fmincon.m*, která řeší problém tvaru:

$$\min_{\vec{\alpha}} F(\vec{\alpha}) \text{ za podmínky, že } \text{lb} \leq \vec{\alpha} \leq \text{ub},$$

kde lb je množina dolních a ub množina horních mezí návrhových proměnných α_i .

Podmínka omezení $\text{lb} \leq \vec{\alpha} \leq \text{ub}$ v našem případě znamená:

$$\bar{\alpha}_i - \frac{h}{4} \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i + \frac{h}{4}, i = 1, \dots, n-1, \quad (5.6)$$

kde $\bar{\alpha}_i$ je i -tý referenční uzel. Tato podmínka udává bezpečnou vzdálenost mezi dvěma sousedními uzly, aby nemohlo dojít ke splynutí dvou uzlů, nebo výměně pořadí sousedních uzlů.

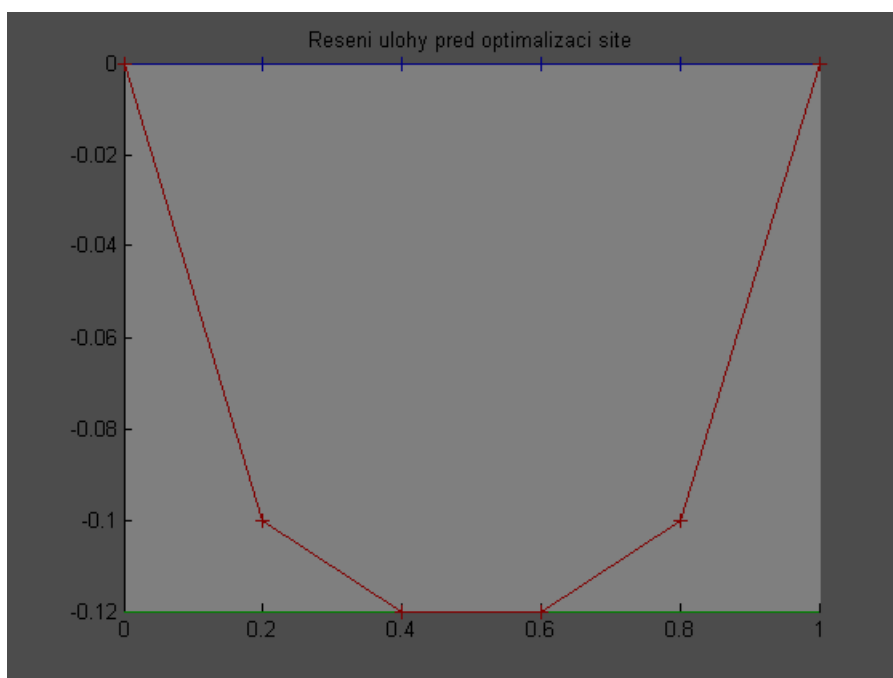
Funkci *fmincon.m* voláme takto:

$$\alpha = \text{fmincon}(\text{fun}, \alpha_0, A, B, \text{Aeq}, \text{Beq}, \text{lb}, \text{ub}, \text{NONLCON}, \text{options}).$$

Jelikož k minimizaci nepotřebuji typ omezení daných pomocí A , B , Aeq , Beq a NONLCON nastavím $A, B, \text{Aeq}, \text{Beq}, \text{NONLCON} = []$.

Funkce “fun” má za vstup α a vrací funkční hodnotu F parametru α (v našem případě jde o cenový funkcionál spočtený dle (5.4)). U options je nutno nastavit: `GradObj,'on'`, tímto specifikuji, že “fun” také vrací jako druhý výstupní argument G (složky gradientu určené dle (5.3)) v α . Za počáteční iteraci α_0 vezmu pravidelné dělení. lb a ub jsou definovány v (5.6).

Pro kontrolu správného pohybu uzlů (tzn. zda je pro všechny uzly dělení splněna podmínka omezení) po skončení minimizačního programu jsem provedla nalezení optimální sítě pro hrubé dělení, např. dělení I na 5 podintervalů.



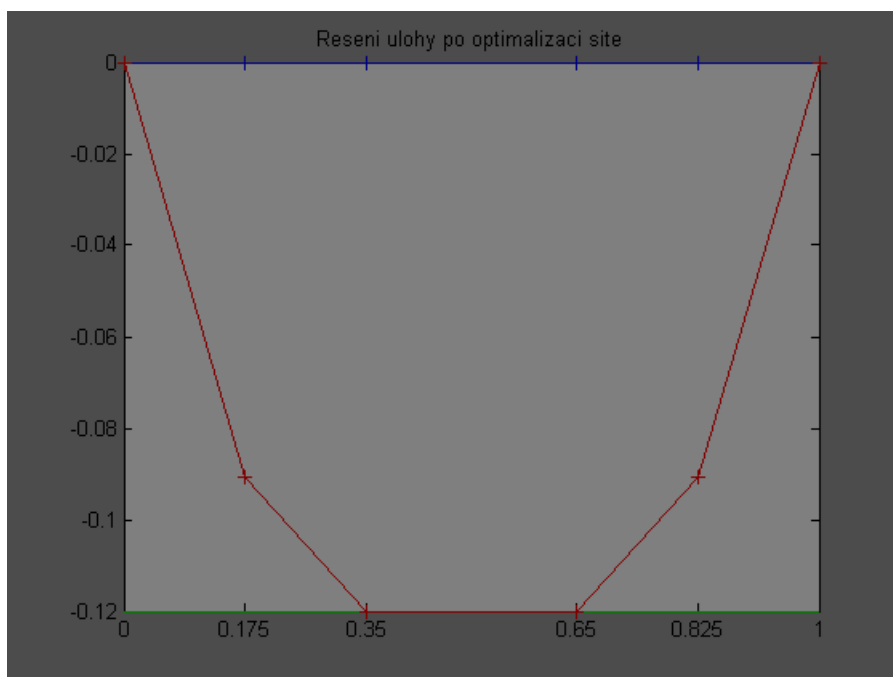
Obr.14 – Řešení úlohy před optimalizací sítě pro dělení I na 5 podintervalů

Za počáteční iteraci v minimizačním programu zvolím $\alpha_0 = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$ - pravidelné dělení I na 5 podintervalů.

Podmínka omezení je dána v (5.6), pro zkoumané dělení je $h = \frac{1}{5} = 0.2 \Rightarrow \frac{h}{4} = 0.05$ a proto:

$$lb = [0, 0.15, 0.35, 0.55, 0.75, 1] \text{ a } ub = [0, 0.25, 0.45, 0.65, 0.85, 1],$$

tzn., že např. pro uzel α_1 vypadá podmínka omezení takto: $0.15 \leq \alpha_1 \leq 0.25$, uzly α_0 a α_n , kde $n = 5$, jsou fixovány.

Obr.14 – Řešení úlohy po optimalizaci sítě pro dělení I na 5 podintervalů

Nalezené optimální dělení $\vec{\alpha}$ vypadá takto : $\vec{\alpha} = [0, 0.175, 0.35, 0.65, 0.825, 1]$.

Došlo k pohybu všech vnitřních uzlů α_i , $i = 1, \dots, 4$, dokonce se dvě vazby staly aktivními a to pro uzel α_2 a α_3 (jedná se o uzly vymezující kontaktní část), tzn., že $\alpha_2 = lb_2$ a $\alpha_3 = ub_3$.

Ještě zkontroluji hodnotu cenového funkcionálu J před a po optimalizaci sítě.

n	hodnota J pro pravidelnou síť	hodnota J pro optimalizovanou síť
5	-0.124000	-0.125576

Hodnota J se minimalizovala, u všech uzlů je splněna podmínka omezení. Tím je provedena kontrola správnosti fungování minimalizačního programu.

Po minimizaci J a nalezení optimálního dělení I na 128, 256 i 512 podintervalů se žádné vazby nestaly aktivními, tzn., že všechny uzly α_i ležely v intervalu $(\bar{\alpha}_i - \delta, \bar{\alpha}_i + \delta)$, kde $\delta = \frac{h}{4}$ a postupně $h = \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$ a $\frac{1}{512}$. Došlo k posunutí uzlů nacházejících se mimo kontaktní část, uvnitř kontaktní části k žádnému pohybu uzlů nedošlo.

Opět mě budou zajímat stejné veličiny jako v části 5.2 a 5.3.

a) Jelikož hlavním kritériem této metody optimalizace sítě je minimalizace cenového funkcionálu, po provedení relokační metody se opravdu hodnota cenového funkcionálu J zmenšila, jak je zřejmé z Tab.16.

n	hodnota J pro pravidelnou síť	hodnota J pro optimalizovanou síť
128	-0.129141729459	-0.129141743203
256	-0.129146982617	-0.129146982658
512	-0.129148308259	-0.129148308261

Tab.16

b) Srovnáním intervalů kontaktní části nalezeného řešení na optimalizované síti a řešení na pravidelné síti je vidět (z Tab.17-19), že výrazněji se interval kontaktní části změnil pro řidší dělení I ($n=128$), ale odchylka od velikosti kontaktní části “přesného” řešení naopak vzrostla. K přiblížení velikosti kontaktní části “přesného” řešení došlo u dělení I na 256 podintervalů, pro husté dělení na 512 podintervalů zůstala kontaktní část po optimalizaci téměř shodná.

n	kontaktní část před optimalizací sítě	kontaktní část po optimalizaci sítě
128	[0.343750 , 0.656250]	[0.342928 , 0.657072]
256	[0.347656 , 0.652344]	[0.347652 , 0.652348]
512	[0.345703 , 0.654297]	[0.345702 , 0.654298]

Tab.17

n	velikost kontaktní části před optimalizací sítě	velikost kontaktní části po optimalizaci sítě
128	0.312500	0.314144
256	0.304688	0.304696
512	0.308594	0.308596

Tab.18

n	odchylka před optimalizací sítě	odchylka po optimalizaci sítě
128	0.005859	0.007503
256	0.001953	0.001945
512	0.001953	0.001955

Tab.19

c) Gradient J jsem počítala dle (5.3). Největší složka (v absolutní hodnotě) gradientu J na nalezené optimální síti je, stejně jako u dělení pravidelného, u uzlů, kde došlo ke změně na kontakt s překážkou, nebo ke změně z kontaktu na nekontakt s překážkou (symetrické hodnoty).

n	největší složka gradientu před optimalizací sítě	největší složka gradientu po optimalizaci sítě
128	1.62550e-5	5.902682e-6
256	4.53504e-6	4.539780e-6
512	9.05501e-7	9.011631e-7

Tab.20

d) Globální chybu jsem počítala podle vztahu (5.5). Lokální chybu jsem určila pro stejné intervaly G jako v části 5.2. Globální a lokální chyba mezi “přesným” řešením a řešením na optimální síti pro dělení I na 256 a 512 podintervalů se snížila oproti globální a lokální chybě před optimalizací sítě, v případě dělení na 128 podintervalů se lokální chyba pro optimalizované řešení nepatrně zvýšila (Tab.21, Tab.23), ale globální chyba se také zmenšila, tzn. optimalizací sítě došlo k minimalizaci globální chyby, jak jsem předpokládala v úvodu části 5.4.

n	globální chyba před optimalizací sítě	globální chyba po optimalizaci sítě
128	3.775080e-6	3.021507e-6
256	8.429038e-7	6.649760e-7
512	2.164708e-7	1.347717e-7

Tab.21

n	seminorma před optimalizací sítě	seminorma po optimalizaci sítě
128	1.659011e-6	1.019778e-6
256	4.628558e-7	5.674726e-7
512	6.534892e-8	7.980875e-8

Tab.22

n	lokální chyba před optimalizací sítě	lokální chyba po optimalizaci sítě
128	2.409131e-6	2.844215e-6
256	5.846667e-7	3.469760e-7
512	1.255130e-7	1.086000e-7

Tab.23

e) Jako poslední kritérium pro srovnání pravidelné sítě a nalezené optimální sítě jsem vzala hodnotu Lagrangeova multiplikátoru λ_i v uzlu α_i , kde došlo ke kontaktu s překážkou, vypočtenou při řešení úlohy. Hodnota λ_i je rovna 0 pro α_i , které nepatří do intervalu kontaktní části. Potřebuji docílit toho, aby hodnota λ_i byla v bodě α_i , kde došlo ke změně na kontakt, blízko 0. Jak je vidět z Tab.24 při řešení na optimální síti se hodnota λ_i v bodě změny opravdu zmenšila oproti hodnotě λ_i na síti pravidelné.

n	Hodnota λ_i před optimalizací sítě	Hodnota λ_i po optimalizaci sítě
128	0.0024716	0.0016435
256	0.0063940	0.0063895
512	0.0005376	0.0005367

Tab.24

Shrnutí: Jelikož tato metoda spočívá v minimizaci funkcionálu, pro všechna nalezená řešení došlo ke zmenšení hodnoty J . U optimálního dělení na 128 a 512 podintervalů došlo i ke zmenšení největší složky gradientu, pro dělení na 256 podintervalů naopak k mírnému zvětšení. Globální chyba se zmenšila pro všechna dělení.

6. Závěr

Ze získaných výsledků zkoumaných veličin úlohy s překážkou $c = -0.12$ vyvozují tyto závěry. Pro rostoucí n na pravidelné síti se zmenšuje hodnota cenového funkcionálu i největší složka gradientu J . Ta je vždy u uzlu, kde dojde ke kontaktu struny s překážkou. Další veličiny přibližných řešení je potřeba zkoumat v závislosti na zvoleném “přesném” řešení, které je řešením na jemné ekvidistantní síti – konkrétně dělení I na 1024 podintervalů. Odchylka velikosti kontaktní části přibližných řešení od velikosti kontaktní části “přesného” řešení i globální chyba mezi přibližným a “přesným” řešením se pro zjemňující dělení zmenšuje. Pro zjištění, která optimalizační metoda je vhodnější k nalezení optimální sítě, jsem porovnávala výsledné hodnoty všech zkoumaných veličin pro řešení na optimalizované síti s výsledky na síti pravidelné.

Při použití strategie (2) - relokační metoda, se pro všechna zkoumaná dělení hodnota cenového funkcionálu zmenšila. Pro dělení $n = 128,512$ se odchylka velikosti kontaktní části řešení na optimalizované síti zvětšila, ale největší složka gradientu se zmenšila oproti výsledkům před optimalizací sítě, pro $n = 256$ tomu je naopak. Největší složka gradientu je jako v případě pravidelné sítě u uzlu, ve kterém došlo ke kontaktu struny s překážkou. Ve všech případech došlo ke zmenšení hodnoty Lagrangeova multiplikátoru u uzlu, kde došlo ke kontaktu struny s překážkou, globální chyby a pro $n = 128$ i seminormy.

Při použití strategie (1) – lokální zjemnění sítě, je vidět, že pouhým přidáním dvou uzlů kolem uzlů, kde složka gradientu byla v absolutní hodnotě největší, dostáváme výsledky jako pro pravidelnou síť, ale s počtem dělení na $2n$ podintervalů. Například pro dělení na $n = 128$ přidáním 4 uzlů dostaneme optimalizovanou síť na 132 podintervalů. Po řešení úlohy na nalezené síti se krajní body intervalu kontaktní části posunuly do přidáných uzlů – dostáváme stejný interval kontaktní části jako pro řešení na pravidelné síti na $n = 256$ podintervalů, z toho plyne i stejná odchylka, stejná složka gradientu i hodnota Lagrangeova multiplikátoru v uzlu změny na kontakt. Na rozdíl od pravidelného dělení a optimalizovaného dělení pomocí relokační metody není největší složka gradientu u uzlu, kde dojde ke změně na kontaktní část nebo zpátky na nekontakt.

Z předcházejících úvah a závěrů je zřejmé, že pro zkoumané nejhustší dělení, tj. $n = 512$ je jistě lepší použití strategie (1), jelikož výsledky zkoumaných veličin (kromě hodnoty cenového funkcionálu a globální chyby) jsou shodné s výsledky veličin pro “přesné” řešení – odchylka

velikosti kontaktní části je rovna nule. Použití relokační metody k nalezení optimální sítě pro řešení úlohy je vhodné pro všechna zkoumaná dělení na n podintervalů (nejméně pro $n = 128$).

Literatura

[HMO3] - J.Haslinger, R.Makinen: *Introduction to shape optimization: Theory, Approximation and Computation*, SIAM 2003

[H83] – J.Haslinger: *Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic*, Státní pedagogické nakladatelství Praha 1983

J.Haslinger, P.Neittaanmäki: *Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design*, J.Wiley&Sons, Chichester 1997

WCSMO-1 *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Germany 28.5.-2.6.1995