VŠB - Technická univerzita Ostrava

Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Modelování magneto-optických jevů v tenkých planárních strukturách

2002 Martin Foldyna

Abstrakt

Tato práce je věnovaná studiu magneto-optických jevů na systémech ultratenkých planárních vrstev. První část uvádí čtenáře do teorie popisující danou problematiku. Jsou v ní položeny základy využívané v dalších částech jako definování polarizace světla, parametrů materiálů a jsou zde také vyjmenovány použité aproximace. Především jsou v této části uvedeny Yehův a Berremanův přístup, které ukazují jakým způsobem lze konkrétně úlohy magneto-optiky řešit. Druhá část práce je věnována analýze konkrétních případů lineárních a kvadratických konfigurací s důrazem na srovnávání velikostí daných jevů. Poslední část se zabývá analýzou hranolové vazby se zaměřením na konkrétní systém. Práce se orientuje na analýzu Kerrových parametrů (rotace a elipticity), dále pak výkonové odrazivosti a propustnosti. Výsledky jsou srovnávány vzhledem ke geometrii magnetizace, důraz je kladen na porovnávání velikostí jednotlivých parametrů při různých konfiguracích. Hranolová vazba je zde ukázána jako systém, který umožňuje navázat svazek laseru do vlnovodné struktury za pomoci totálního odrazu. Diskutována je také otázka vlivu šířky vzduchové mezery na magneto-optické jevy.

Klíčová slova

magnetooptika, planární struktura, rovinná vlna, maticový formalismus, lineární jevy, kvadratické jevy, Kerrovy parametry, hranolová vazba, vedené vlny

Abstract

The publication is focused on analysis of magneto-optical effects in the systems of ultrathin films. First part introduces reader into the theory, which describes magneto-optical applications. In this part, the basic principles of magneto-optics are described; the text is devoted to light polarization, permittivity and permeability tensors, and of course used approximations. Mainly, the reader should find Yeh and Berreman treatments here, which show how we can solve concrete problems in the magneto-optics. Second part is focused on analysis of concrete problems connected with the linear and quadratic configurations including the size comparison of this effects. In the last part we can find the prism coupling analysis, which is applied to particular problem. In this publication, Kerr paramaters (rotation and ellipticity) are mainly specified, but we also analyse wave reflectance and transmitance. The results are discussed with respect to orientation of magnetization vector in the structure. Prism coupling presented here can be used as for effective coupling of laser beam into the wave guiding film (with help of total reflection). The influence of air gap thickness on magneto-optical effects is discussed as well.

Keywords

magneto-optics, planar structure, plane wave, matrix formalism, linear effects, kvadratic effects, Kerr parameters, prism coupling, guided waves

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne __________________

Martin Foldyna

____

Rád bych poděkoval prof. Ing. Jaromíru Pištorovi, CSc. a RNDr. Daliboru Ciprianovi za vedení při práci na úkolech diplomové práce a za jejich odborné konzultace. Především bych chtěl poděkovat prof. Ing. Jaromíru Pištorovi, CSc. za možnost, alespoň letmo nahlédnout do tajů a krásy fyziky. Bez jeho zájmu o mé vzdělání v oblasti fyziky by tato práce zřejmě nikdy nevznikla. Také bych chtěl poděkovat Ing. Davidu Hrabovskému a Mgr. Kamilu Postavovi, PhD. za rady z oblasti fyziky, doc. RNDr. Jaroslavu Vlčkovi, CSc. a Mgr. Bohumilu Krajcovi, PhD. za inspirující připomínky týkající se především matematiky.

Tato práce je věnovaná Jaromíru Pištorovi a Bohumilu Krajcovi, kterým vděčím za mnohem více, než jen získané vědomosti z oblasti vědy.

Seznam použitých symbolů a zkratek

$\boldsymbol{\epsilon}$	tenzor permitivity prostředí
$\boldsymbol{\epsilon}_r$	tenzor relativní permitivity prostředí
ϵ_0	permitivita vakua
ϵ_1	druhá mocnina komplexního indexu lomu prostředí
$(\epsilon^0)_{ij}$	složky části tenzoru relativní permitivity nezávislé na magnetizaci
$(\epsilon_r)_{ij}$	složky tenzoru relativní permitivity
ε	elipticita polarizované vlny
Φ	fázový posun na rozhraní při odrazu vlny
χ	komplexní polarizační parametr
$\boldsymbol{\mu}$	tenzor permeability prostředí
$\boldsymbol{\mu}_0$	tenzor permeability vakua
μ_0	permeabilita vakua
ω	úhlová frekvence
θ	rotace polarizované vlny
$\Re$	reálná část komplexního čísla
$\Im$	imaginární část komplexního čísla
$\mathbb{A}$	diagonální matice vlastních čísel
$\boldsymbol{A}^{(n)}$	vektor amplitud prostředí (n)
$\boldsymbol{A}$	vektor amplitud
$A_i^{(n)}$	i-tá složka vektoru amplitud prostředí (n)
A_i	i-tá složka vektoru amplitud
$\boldsymbol{B}$	vektor amplitud
B_i	i-tá složka vektoru amplitud
$\mathbb{C}$	matice soustavy diferenciálních rovnic
$\mathbb{C}^{(n)}$	normovací matice prostředí (n)
c	rychlost světla ve vakuu
$\mathbb{D}^{(n)}$	dynamická matice prostředí (n)
D_{ij}	složky dynamické matice
$\boldsymbol{E}$	komplexní vektor intenzity elektrického pole
$\boldsymbol{E'}$	normalizovaný vektor intenzity elektrického pole
E_0	komplexní amplituda vektoru intenzity elektrického pole
E_x, E_y, E_z	složky vektoru intenzity elektrického pole
$\boldsymbol{e}$	vektor polarizace intenzity elektrického pole
e_x, e_y, e_z	složky vektoru polarizace intenzity elektrického pole
$\boldsymbol{f}$	vektor tečných složek elektromagnetického pole
f	kvadratická magneto-optická konstanta
$\boldsymbol{g}$	vektor amplitud elektromagnetického pole
$\boldsymbol{H}$	komplexní vektor intenzity magnetického pole
$\boldsymbol{H'}$	normalizovaný vektor intenzity magnetického pole
H_0	komplexní amplituda vektoru intenzity magnetického pole
$\boldsymbol{h}$	vektor polarizace intenzity magnetického pole
h_x, h_y, h_z	složky vektoru polarizace intenzity magnetického pole

$\mathbb{I}$	jednotková matice
$\boldsymbol{k}$	vlnový vektor
k_x, k_y, k_z	složky vlnového vektoru
k_0	velikost vlnového vektoru ve vakuu
$\mathbb{M}$	matice přechodu
$\boldsymbol{M}$	vektor magnetizace
M_i	složky vektoru magnetizace
M_{ij}	prvky matice přechodu
$\boldsymbol{N}$	vektor indexu lomu prostředí
$\boldsymbol{N}^{(n)}$	vektor indexu lomu prostředí (n)
N	komplexní index lomu izotropního prostředí
$N^{(n)}$	index lomu v izotropním prostředí (n)
N_x, N_y, N_z	složky vektoru indexu lomu
$\mathbb{P}^{(n)}$	propagační matice prostředí (n)
$\boldsymbol{Q}$	vektor lineárních magneto-optických parametrů
Q	velikost vektoru magneto-optických parametrů
Q_T, Q_L, Q_P	složky vektoru magneto-optických parametrů
R_{ij}	výkonová odrazivost na rozhraní
r_{ij}	reflexní koeficient
$\mathbb{S}^{(n)}$	reprezentační matice vrstvy (n)
$\mathbb{T}$	matice vlastních vektorů
T_{ij}	výkonová propustnost na rozhraní
t_{ij}	transmisní koeficient
$t^{(n)}$	tloušťka vrstvy (n)
$\mathbb{X}^{(n)}$	matice přechodu na rozhraní (n)

Obsah

Seznam obrázků

Kapitola 1

Úvod

Tenkým magneto-optickým vrstvám a periodickým strukturám je v dnešní době věnována velká pozornost. Je tomu tak především ze strany společností zabývajících se vývojem velkokapacitních paměťových médií jako jsou pevné disky, magnetooptické disky či technologie CD-ROM a DVD. Požadavky jsou kladeny nyní nejen na kapacitu paměťového média, ale také na neméně důležitou vlastnost - přístupovou rychlost k datům. Přestože se dnes objevují technologie, které jsou schopny dosáhnout obrovských hustot záznamu dat, tak přístupová doba, či rychlost čtení pro ně často bývají nemalým problémem.

Fyzika magnetoptických planárních struktur je spojována s oblastmi záznamových médií již od čtyřicátých let. První známou aplikací byla možnost záznamu na zvukové pásky, později i videokazety. Magnetické pevné disky byly používány jako médium pro hromadnou úschovu dat v počítačovém průmyslu již od roku 1957. Dalším úspěšným médiem byly pružné disky, jež jsou používány dodnes v oblastech, kde není důležitá rychlost záznamu ani velká kapacita záznamového média.

Trvalo téměř půl století vývoje, než se dominující magnetická záznamová média setkala s konkurencí v podobě technologie pro optický záznam. Jako u magnetických záznamových médií je hlavní oblast zájmu sekundární uchovávání informací v počítači. Hlavní výhodou optických disků je pak kombinace výhod pevných disků (rychlost, kapacita) s vlastnostmi výměnných disků (vyjímatelná média).

Čtení dat s využitím laserového paprsku, které je založeno právě na fyzice magneto-optických vrstev, je mnohdy rychlejší než čtení dat z média jiným způsobem. Čtení dat pomocí laserových paprsků, jak se dnes používá například u technologie CD-ROM, je ovšem relativně neefektivní, tedy rychlost čtení není tak velká, jak by mohla být. V tomto směru se jeví jako výhodnější využít ke čtení dat změnu polarizace, která nastává po odrazu paprsku od povrchu média. Tato odezva je rychlejší a teoreticky není problém se čtením více než jednoho bitu najednou.

Obdobným způsobem lze využít výše zmiňovaný efekt pro senzorové účely, neboť odezva systému je velmi rychlá.

Velmi významnou aplikací těchto teorií jsou vedené vlny v optických vláknech, která se dnes používají převážně v telekomunikačních technologiích. Komunikace pomocí optických vláken má oproti klasickému kovovému vedení několik výhod. Jednak tam nedochází k rušení vlivem vnějších zdrojů elektromagnetického záření, což může být vážný problém u kovových vedení, hlavně pro větší délky kabelů. Navíc nedochází k přeslechům, neboť různá vlákna se navzájem neovlivňují.

Šíření světla v optických vláknech je založeno na úplném odrazu vln na rozhraní mezi prostředím opticky hustším (vlákno - jádro) a opticky řidším (plášť vlákna, okolí). Čili je zřejmé, že optické vlákno musí být složeno z alespoň tří různých materiálů, kde prostřední materiál musí být optický hustší než materiály, které jej obklopují.

Dá se tedy říci, že toto odvětví fyziky má v budoucnu praktické využití, převážně pak, když jej rozšíříme o tenké periodické struktury - difrakční mřížky.

Kapitola 2

Fyzika tenkých vrstev

Počátky aplikace teorie elektromagnetického pole v systému tenkých planárních struktur, vrstev, lze datovat do padesátých let minulého století. Popis problému a ukázka řešení pro homogenní bezeztrátová prostředí nalezneme například již v knize [1]. Autoři zde předpokládají permitivitu a permeabilitu prostředí závislou pouze na souřadnici z (směr kolmý k vrstvám). Vychází se zde samozřejmě z Maxwellových rovnic, ze kterých je sestavena příslušná vlnová rovnice. Autoři předpokládají, že řešení lze separovat na dvě části, z nichž jedna je závislá pouze na souřadnici y (směr rovnoběžný jak s vrstvami, tak i s rovinou dopadu), druhá část je pouze funkcí z. Jednoduchou úvahou je dosaženo závěru, že řešení bude mít tvar exponenciálních funkcí (rovinných vln). Dále se již zabývají pouze amplitudami a z rovnic z nich sestavených oddělí diferenciální rovnice pro jednotlivé amplitudy vln. Ukazují zde, že podmínka konstantní fáze vede na zobecněný Snellův zákon. Volí partikulární řešení rovnic takovým způsobem, aby mohli zapsat vztah mezi amplitudami pomocí matic. Ukazují, že tyto matice reprezentují přechody přes jednotlivá rozhraní a naznačují způsob, jakým je lze skládat, abychom získali vztah mezi amplitudami vně systému vrstev. Uvedený postup aplikují na izotropní bezeztrátové prostředí.

V sedmdesátých letech se pozornost některých fyziků obrátila ke studiu hranolové vazby. Tien a Ulrich ve své práci [23] diskutovali hranolovou vazbu jako jeden z možných způsobů, jak efektivně navázat laserový paprsek do tenké vlnovodné struktury. Současně navrhli využít měření spektra vedených módů k určení indexu lomu a šířky dané vrstvy. Kombinací vlnové a paprskové optiky provedli analýzu módů ve vlnovodné struktuře, včetně vlivu hranolové vazby. Ukázali, jaké je příčné rozložení pole v dané vrstvě a odvodili podmínku pro optimální konfiguraci. Ulrichova práce [24] byla zajímavá analýzou hranolové vazby pomocí rozvoje do rovinných vln. Teorii úspěšně aplikoval na gaussovský svazek, což znamenalo analýzu obecnějších zdrojů světla.

V osmdesátých letech se část fyziků začala zajímat o periodické planární struktury - mřížky. Byla to především skupina fyziků z okolí profesora Petita, která použila spočetných Fourierových bází k rozvoji do Floquetových módů. Tato metoda se ukázala zajímavou především pro mřížky, jejichž povrch byl popsatelný spojitě diferencovatelnou funkcí, neboť pak lze dosáhnout relativně rychlé konvergence této metody. Ovšem později došlo k potřebě počítat magneto-optické jevy také u obecnějších tvarů na periodě mřížky. Navíc se začala rozvíjet snaha o popis více dimenzionálních periodických planárních struktur. Tento trend byl rozvíjen v devadesátých letech především Nevierem, Petitem, Yasumotem a Rokushimou [27], [28], [29], [30], [31]. Vývoj se v tomto ohledu nezastavil, neboť použití Fourierových bází se samo o sobě ukázalo jako nedostačující, vzhledem k špatným konvergenčním vlastnostem při některých tvarech mřížek. V práci [32] Lifeng Li diskutuje tzv. metodu R-matic, která využívá výhodnějšího uspořádání vektorů. Tato metoda vykazuje vyšší numerickou stabilitu pro větší třídu úloh. Významným zlepšením konvergence je metoda použitá v práci [33], kdy je násobení řad upraveno takovým způsobem, že v některých bodech nespojitosti lze docílit stejnoměrné, namísto bodové, konvergence k řešení úlohy. V práci [34] Lifeng Li diskutuje rozdíly mezi metodou R-matic a metodou S-matic. Přestože cílem obou metod je zbavit se exponenciálních faktorů při násobení a inverzi jednotlivých matic, tak metoda S-matic je považována za numericky efektivnější. V teorii tenkých planárních periodických struktur se ovšem objevují také tendence vyhnout se Fourierovým bázím a použít jiných formalismů. Ze stoupenců jmenujme například Morfa [35].

Tato práce bude věnovaná tenkým vrstevnatým strukturám, což bude znamenat využití prací D.W. Berremana [14] a P. Yeha [3]. Aplikace těchto formalismů na hranolovou vazbu se bude mírně lišit od postupu uvedeného v pracech [23], [24].

U nás se fyzikou tenkých planárních struktur již dlouhou dobu zabývá profesor Višňovský. Uveďme si přehled jeho některých prací, přičemž zde opomeneme nejnovější práce věnované mřížkovým strukturám.

V práci [15] se profesor Višňovský zabýval optickou odezvou vrstevnaté struktury složené ze ztrátových anizotropních materiálů, kde bylo uvažováno různé magnetické uspořádání. Systém magnetických planárních struktur byl reprezentován Yehovými maticemi, které vyjadřují amplitudu pole izotropních poloprostorů na obou stranách systému vrstev. Každá vrstva byla charakterizována komplexním tenzorem permitivity, permeabilitu předpokládal rovnu μ_0. Vychází se z toho, že elektromagnetické pole ve vrstvě lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace čtyř základních vln (vlastních módů), jež jsou pochopitelně řešením vlnové rovnice ve vrstvě. Dále se předpokládá, že tečné složky na rozhraní dvou prostředí jsou si rovny. To mu umožňuje určit rozložení pole v systému magneto-optických planárních vrstev. Ukazuje se, že v každém z izotropních poloprostorů mohou být specifikovány dvě vůči sobě ortogonálně polarizované amplitudy vln. Podrobně je zde popsán případ, kdy má vrstva polárně orientovaný vektor magnetizace vynucený vnějším polem.

Další práce [16] byla věnována možným aplikacím v oblasti návrhu optimálních parametrů substrátů s nanesenými tenkými filmy. Ty se používají jako materiály pro magneto-optická zařízení a pro optické měření povrchových efektů v magnetických materiálech. Řeší v ní problém odrazu pro libovolný úhel dopadu na systému sestávajícího z izotropního prostředí, magnetické vrstvy a tlustého magnetického substrátu. Vektor magnetizace ve vrstvě i v substrátu předpokládá ve směru normálovém vůči rozhraní. Výsledky jsou vyjádřeny pomocí matice reflexních koeficientů, která má přímou souvislost k experimentálně měřitelným veličinám, jako elipsometrický poměr, či magneto-optická rotace a elipticita. Současně je ukázán tvar obecné podmínky vlnovedení v tomto systému. Teorii pak autor aplikoval na speciální případy kolmého dopadu, pro libovolný úhel dopadu na systém film-substrát a obecný dopad na celém systému za určitých podmínek. Předpokládal stejné diagonální elementy a odpovídající mimo diagonální členy malé ve srovnání s diagonálními.

Studiu elektromagnetických interakcí v systému vrstev s longitudinálním a polárním vektorem magnetizace a obecným úhlem dopadu je věnována práce [17]. Opět se zde používá formalismus Yehových matic rozměru 4×4 s tím, že se omezuje pouze na lineární magneto-optické jevy. Za těchto podmínek jsou vyjádřeny charakteristické matice pro magnetické vrstvy. Ukazuje se, že se výrazy mohou výrazně zjednodušit, pokud uvažujeme tloušťku vrstvy za velmi tenkou (ultratenké vrstvy), tzn., když je tloušťka mnohem menší než vlnová délka dopadajícího světla. Z těchto úvah a výpočtů pak vycházejí jednoduché formule, které jsou výhodné pro vyjádření magneto-optických jevů v ultratenkých magnetických systémech.

Kapitola 3

Úkoly diplomové práce

Úkolem diplomové práce je aplikace formalismů při analýze elektromagnetických vln v prostředí s obecnou orientací magnetizace. Především se jedná o tyto konkrétní body:

- stanovení reflexních a transmisních koeficientů na rozhraní anizotropního a izotropního prostředí při transverzálním, longitudinálním a polárním uspořádání
- specifikace vlivu kvadratického členu na reflexní a transmisní koeficienty na uvedeném rozhraní
- určení vlivu rotace vektoru magnetizace v rovině vrstvy na magnetooptické jevy
- analýza transverzálně-polárního a longitudinálně-polárního jevu
- matematické řešení optického tunelového efektu mezi hranolem a vlnovodnou strukturou s magnetickým uspořádáním

Kapitola 4

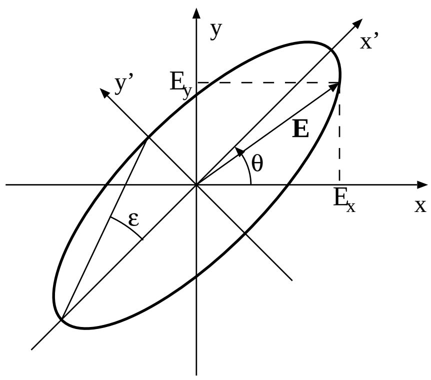
Úvod do optiky tenkých vrstev

4.1 Polarizace světla

Rovinná vlny je určena vektory elektrické a magnetické intenzity, svázanými Maxwellovými rovnicemi (4.13) a (4.14). Vektory intenzity elektrického a magnetického pole rovinné elektromagnetické vlny zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= E_0 \boldsymbol{e} \exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right], \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) &= H_0 \boldsymbol{h} \exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Rovinnou vlnu tedy charakterizujeme následujícími parametry: komplexními amplitudami E_0, H_0, vlnovým vektorem $\boldsymbol{k}$ a vektory polarizace $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$. Vzhledem ke vztahu (4.15) mezi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ se nadále budeme zabývat pouze popisem elektrické intenzity, neboť pro magnetickou intenzitu je to obdobné. Reálná část vlnového vektoru reprezentuje směr směr šíření vlny, imaginární část pak souvisí s útlumem vlny. Posledním parametrem je vektor polarizace $\boldsymbol{e}$ (resp. $\boldsymbol{h}$) . Vektor $\boldsymbol{e}$ obecně odpovídá elipticky polarizovanou vlně, což znamená, že koncový bod vektoru $\boldsymbol{E}$ opisuje v čase elipsu v daném bodě roviny, kolmé na vlnový vektor. Zvolíme-li tedy souřadnou soustavu tak, že kladná část osy z bude ležet ve směru vlnového vektoru $\boldsymbol{k}$, elipsa bude ležet v rovině xy (obr. 4.1). Rotace θ je úhel natočení hlavní osy elipsy vůči



Obrázek 4.1: Obecná eliptická polarizace vlny.

vztažné ose, význam elipticity ε je patrný z obrázku 4.1: $\tan|\varepsilon|$ udává poměr velikostí vedlejší a hlavní poloosy elipsy. Znaménko elipticity určuje směr pohybu vektoru $\boldsymbol{E}$. Mezi e_x, e_y a θ, ε platí následující vztah:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varepsilon - i\sin\theta\sin\varepsilon \\ \sin\theta\cos\varepsilon + i\cos\theta\sin\varepsilon \end{bmatrix}$$

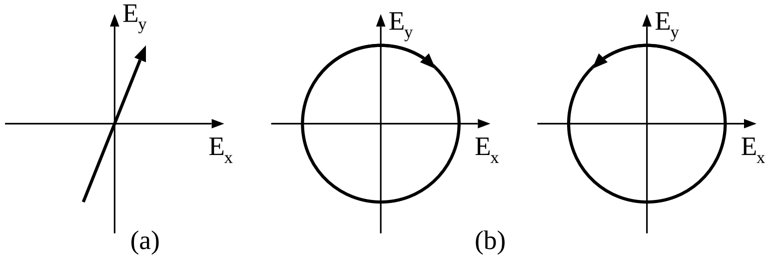
Rotace a elipticita jsou elipsometrické parametry z rozsahu $\theta \in \langle -\pi, \pi \rangle$ a $\varepsilon \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$. Polarizaci vlny lze vyjádřit pomocí komplexního parametru

$$\chi = \frac{e_y}{e_x} = \frac{\tan\theta + i\tan\varepsilon}{1 - i\tan\theta\tan\varepsilon}.^{1} \tag{4.2}$$

Z tohoto vztahu je pak možné zpětně vyjádřit parametry ε, θ:

$$\tan 2\theta = \frac{2\Re(\chi)}{1 - |\chi|^2} \qquad \sin 2\varepsilon = \frac{2\Im(\chi)}{1 + |\chi|^2}, \tag{4.3}$$

kde $\Re(\chi)$ a $\Im(\chi)$ jsou reálná a komplexní část χ. Navíc, jsou-li ε a θ velmi malé, můžeme psát $\chi = \theta + i\varepsilon$. Je-li $\varepsilon = 0$, tak nazýváme polarizaci vlny lineární, je-li $\varepsilon = \pm\frac{\pi}{4}$ jedná se o polarizaci kruhovou (viz obr. 4.2b). Rotaci a elipticitu uvádíme v radiánech, při experimentech dosahují



Obrázek 4.2: Speciální případy polarizace: (a) lineární polarizace, (b) kruhová polarizace

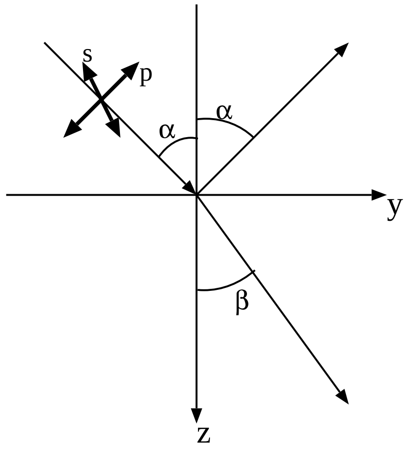
obvykle řádu miliradiánů (ovšem existují materiály, které tvoří výjimku).

Necháme-li dopadat vlnu v izotropním bezeztrátovém materiálu na nějaké rozhraní, jsou materiálové parametry konstantní, nezávislé na směru. To tedy znamená, že vektory $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{k}$ tvoří ortogonální systém. Zvolíme-li tedy směr $\boldsymbol{E}$ resp. $\boldsymbol{H}$ kolmý na rovinu dopadu, můžeme mluvit o s-polarizaci (TE -Transversal Electric, tzn. $\boldsymbol{e}$ kolmý na rovinu dopadu), resp. o p-polarizaci (TM-Transversal Magnetic, $\boldsymbol{e}$ v rovině dopadu) jako na obrázku (obr. 4.3). Libovolnou vlnu, šířící se takovým materiálem, lze vyjádřit jako lineární kombinaci TE a TM vln.

4.2 Materiálové parametry

V Maxwellových rovnicích (4.13), (4.14) se vyskytují parametry $\boldsymbol{\epsilon}$ a $\boldsymbol{\mu}$. Tyto parametry nazýváme permitivitou prostředí a permeabilitou prostředí. Odpovídají odezvě materiálu na elektrické a magnetické pole. Hodnotu $\boldsymbol{\mu}$ považujeme, pro vlnové délky v oblasti viditelného světla (350-700 nm), za stejnou jako ve vakuu, tedy $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$. Důvodem je, že v obvyklých případech je magnetická interakce mezi polem vlny a materiálu velmi malá. Permitivitu

[1] Pokud je parametr θ roven $\pm\pi/2$, řeší se takový případ zvlášť.



Obrázek 4.3: Polarizační vektory pro s a p polarizací vln.

$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}_r$ (přesněji kvadratickou aproximaci tenzoru permitivity) obvykle považujeme za komplexní tenzor druhého řádu, přičemž předpokládáme, že závisí na vnějším magnetickém poli, ale nezávisí na elektromagnetickém poli samotné vlny. Pomocí Einsteinovy sumační konvence můžeme tenzor relativní permitivity napsat ve tvaru

$$(\epsilon_r)_{ij}(\boldsymbol{M}) = (\epsilon^0)_{ij} + K_{ijk} M_k + G_{ijkl} M_k M_l, \tag{4.4}$$

kde $(\epsilon^0)_{ij}$ jsou složky části tenzoru relativní permitivity nezávislé na magnetizaci (vynucené vnějším magnetickým polem) a indexy $(\epsilon_r)_{ij}$ reprezentují projekce do jednotlivých souřadných os. Vektor magnetizace $\boldsymbol{M}$ vyjadřuje působení vnějšího magnetického pole na materiál, M_i jsou složky vektoru magnetizace. Komponenty K_{ijk} a G_{ijkl} jsou členy lineárních a kvadratických magneto-optických tenzorů. Konkrétní tvary K_{ijk}, G_{ijkl} jsou obecně různé pro různé typy materiálu a jsou odvozovány na základě Onsagerova principu, jehož důsledkem jsou určité symetrie. Pro nás je podstatná nezávislost relativní permitivity prostředí na orientaci vektoru magnetizace:

$$(\epsilon_r)_{ij}(\boldsymbol{M}) = (\epsilon_r)_{ji}(-\boldsymbol{M}).$$

Často tenzor relativní permitivity prostředí označujeme takto:

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

Tenzor $\boldsymbol{\epsilon}_r$ můžeme rozepsat mnohem konkrétněji, zavedeme-li parametry Q a f (lineární a kvadratickou magneto-optickou konstantu) dle vztahů

$$\begin{aligned} iQ\epsilon_1 &= -K_{123} M, \\ fQ^2\epsilon_1 &= (G_{12} - G_{11}) M^2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde M je velikost vektoru magnetizace $\boldsymbol{M}$ a $\epsilon_1 = N^2$ (N je komplexní index lomu prostředí). Položme současně

$$\begin{aligned} Q_P &= Q \cos\phi, \\ Q_L &= Q \sin\phi \cos\alpha, \\ Q_T &= Q \sin\phi \sin\alpha, \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde ϕ je úhel vektoru magnetizace vůči ose z, α je úhel vůči ose y. Pak můžeme tenzor relativní permitivity prostředí zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 + f(Q_P^2 + Q_L^2) & -iQ_P - fQ_LQ_T & iQ_L - fQ_PQ_T \\ iQ_P - fQ_LQ_T & 1 + f(Q_P^2 + Q_T^2) & -iQ_T - fQ_PQ_L \\ -iQ_L - fQ_PQ_T & iQ_T - fQ_PQ_L & 1 + f(Q_L^2 + Q_T^2) \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Ne vždy je ovšem nutné uvažovat kvadratickou aproximaci tenzoru permitivity, neboť rozdíl oproti lineární aproximaci je malý. Chceme-li dosáhnout tvaru tenzoru závislého pouze na lineárních členech vektoru magnetizace, tak položíme $f = 0$ a v důsledku budeme uvažovat speciální konfigurace tak, aby nedocházelo k míchání různých složek vektoru magnetizace. To znamená, že nenulový bude pouze jeden z členů Q_P, Q_T, Q_L (jinak řečeno, vektor magnetizace bude mít směr jedné ze souřadných os). Pro polární konfiguraci $(Q_P \neq 0, Q_L = 0, Q_T = 0)$ bude mít lineární tenzor permitivity tvar

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & -iQ_P & 0 \\ iQ_P & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Lineární tenzor permitivity v longitudinální konfiguraci $(Q_P = 0, Q_L \neq 0, Q_T = 0)$ bude mít obdobný tvar

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & iQ_L \\ 0 & 1 & 0 \\ -iQ_L & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Pro tenzor permitivity v transverzální konfiguraci $(Q_P = 0, Q_L = 0, Q_T \neq 0)$ platí

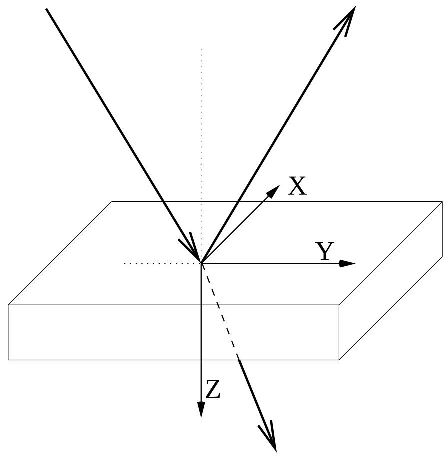
$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -iQ_T \\ 0 & iQ_T & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

4.3 Předpoklady

Pro naše výpočty a vymezení oblasti platnosti zde uváděných výsledků jsou velmi důležité předpoklady, za kterých budeme fyzikální jevy modelovat. Asi nejpodstatnější je podmínka planárnosti vrstev. Znamená to, že každé dva sousední materiály jsou odděleny rozhraním, jež tvoří rovinu. Dále vyžadujeme, aby hodnota materiálových parametrů v rovině rovnoběžné s rozhraním, byla konstantní. To nám umožňuje mluvit o vrstvách a navíc s podmínkou homogenity prostředí a volby souřadnic dle obrázku (4.4) nás to zbavuje potřeby řešit problém ve více dimenzích. Z obrázku je ihned vidět, co tyto předpoklady znamenají. Při vhodné volbě souřadnic jsou materiálové parametry nezávislé na souřadnicích x a y. Homogenita je důležitá především v rovině xy, ovšem my se budeme zabývat pouze případy, kdy jsou parametry jednoho prostředí nezávislé na souřadnicích.

Výpočty vycházejí z Maxwellových rovnic popisujících klasickým způsobem vztahy mezi elektrickým a magnetickým polem. Abychom mohli získat popis systému jako celku je třeba dodat další podmínky. V našem případě použijeme podmínku kontinuity tečných složek pole na rozhraní. Podstatné ovšem je, aby na rozhraní mezi prostředími nebyly žádné volné náboje. Aplikací této podmínky získáme vztah mezi elektromagnetickým polem nad a pod systémem vrstev.

Abychom se vyhnuli interpretačním problémům a dosáhli shody s experimentem, budeme předpokládat, že náš systém se skládá ze dvou izotropních homogenních poloprostorů, mezi kterými mohou být libovolné planární vrstvy. Víme, že rovina dopadu a odrazu vlny bude totožná. Zvolíme tedy souřadnicový systém tak, aby rovina yz odpovídala rovině dopadu vlny. Volme x-ovou souřadnici rovnu nule. Tato volba nebude mít vliv na obecnost našich výpočtů, neboť můžeme posunout souřadný systém tak, aby x-ová souřadnice byla vždy nulová, protože víme, že se tečné složky na rozhraní zachovávají a tedy jedna souřadnice může být vždy konstantní. Osa z bude odpovídat směru kolmém na vrstvy (viz obr. 4.4).



Obrázek 4.4: Volba směru souřadnicových os.

Vlny dopadající z jednoho z poloprostorů budeme považovat za rovinné a budeme je psát ve tvaru (stejně jako v 4.1)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\boldsymbol{e}\exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right], \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = H_0\boldsymbol{h}\exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right], \tag{4.12}$$

s tím že $\omega = 2\pi\lambda^{-1}$, kde λ je vlnová délka dopadající rovinné vlny. Vektory budeme značit tučným písmem. Symbolem $\boldsymbol{E}$ označujeme vektor intenzity elektrického pole a symbolem $\boldsymbol{H}$ vektor intenzity magnetického pole. Budeme uvažovat lineární prostředí, bez volných nábojů na rozhraních mezi prostředími. Maxwellovy rovnice pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{\epsilon}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} && (4.13)\\
\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\boldsymbol{\mu}\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} && (4.14)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 0\\
\nabla\cdot\boldsymbol{H} &= 0,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon_0\boldsymbol{\epsilon}_r\\
\boldsymbol{\mu} &= \mu_0\boldsymbol{\mu}_r\\
c^2 &= \left(\mu_0\epsilon_0\right)^{-1}. && (4.15)
\end{aligned}$$

V běžných experimentech pracujeme se zdrojem světla s vlnovou délkou nacházející se v oblasti viditelného světla. Pak běžně považujeme hodnotu permeability prostředí za stejnou jako ve vakuu (tedy $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, jak bylo již uvedeno dříve).

Zde se pak výpočet rozdělí podle způsobu, kterým budeme přistupovat k rovnicím a jejich řešením. Lze použít různých metod výpočtu, přičemž zde budou prezentovány jen postupy popsané v pracích P. Yeha [3] a D.W. Berremana [14]. Yehův postup použijeme k získání přesných analytických výrazů, vhodných pro jednoduché systémy (často s jednou vrstvou a se speciálně orientovanou anizotropií, vynucenou vnějším elektromagnetickým polem). Veškeré numerické výpočty budou realizovány výhradně algoritmy založenými na postupu Berremana. Tyto rozdílné postupy použijeme k získání parametrů charakterizujících jednotlivá prostředí, následně budeme aplikovat okrajové podmínky naprosto shodným způsobem. Důvodem použití dvou postupů je přílišná náročnost prvního a malá průhlednost druhého přístupu.

4.4 Yehův přístup

Po dosazení výrazů (4.11) a (4.12) do rovnic (4.13), (4.14) a vyjádřením rovnice pro $\boldsymbol{E}$ získáme následující výraz

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = -\omega^2 \boldsymbol{\epsilon\mu E}. \tag{4.16}$$

Podobný výraz pro $\boldsymbol{H}$ získáme buď obdobným způsobem anebo s výhodou použijeme rovnici

$$c\boldsymbol{\mu H} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{E},$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a $\boldsymbol{N} = \omega^{-1} c\boldsymbol{k}$ je vektor indexu lomu prostředí, nebo také normalizovaný vlnový vektor. Rovnice (4.16) přechází po rozepsání a jednoduchých úpravách do tvaru

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - N_y^2 - N_z^2 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} - N_z^2 & \epsilon_{yz} + N_y N_z \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} + N_y N_z & \epsilon_{zz} - N_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{4.17}$$

kde jsme složky vektoru $\boldsymbol{e}$ označili e_x, e_y, e_z, složky tenzoru $\boldsymbol{\epsilon}_r$ jsme označili ϵ_{ij} $(i, j \in \{x, y, z\})$. Je zřejmé, že rovnice (4.17) bude mít netriviální řešení, bude-li determinant matice roven nule. Hledáme tedy kořeny polynomu čtvrtého stupně (4.26), což nám dá čtyři hodnoty z-ové složky N_{zi} (tečné složky $\boldsymbol{N}$ jsou známé). Ke každé hodnotě $\boldsymbol{N}_i$ pak nalezneme vektor $\boldsymbol{e}_i$, vyhovující rovnici (4.17).

Čtyři řešení odpovídají tzv. vlastním módům šíření v daném prostředí, což znamená, že se během šíření v dané vrstvě nemění jejich polarizační stav. Libovolnou rovinnou vlnu, která se může šířit materiálem, lze vyjádřit pomocí lineárních kombinací těchto čtyřech vlastních módů materiálu.

4.4.1 Izotropní prostředí

Předpokládáme-li, že prostředí je izotropní, můžeme reprezentovat tenzor relativní permitivity diagonálním tenzorem druhého řádu

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \end{bmatrix},$$

kde $\epsilon_1 = N^2$. Soustava rovnic (4.17) se zjednoduší na tvar

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 - N_y^2 - N_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 - N_z^2 & N_y N_z \\ 0 & N_y N_z & \epsilon_1 - N_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{4.18}$$

Položíme-li determinant roven nule, získáme po úpravách výraz

$$\epsilon_1(\epsilon_1 - N_y^2 - N_z^2)^2 = 0.$$

To znamená, že hledané hodnoty normálové složky indexu lomu (N_{zi}) mohou nabývat hodnot

$$N_{z1,3} = \sqrt{\epsilon_1 - N_y^2}, \quad N_{z2,4} = -\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2}.$$

Těmto hodnotám a rovnici (4.18) odpovídají následující vektory lineárně polarizovaných vln:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{b}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ N_{z1} \\ -N_y \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{e}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ N_{z2} \\ -N_y \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 0 \\ N_{z1} \\ -N_y \end{bmatrix}, & \boldsymbol{b}_3 &= \begin{bmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{e}_4 &= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 0 \\ -N_{z2} \\ N_y \end{bmatrix}, & \boldsymbol{b}_4 &= \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Z tečných složek těchto vektorů sestavíme matici 4×4, která bude mnohem kompaktnějším zápisem. Později bude sloužit k realizaci podmínky rovnosti tečných složek na rozhraní.

$$\mathbb{D}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\epsilon_1 - N_y^2} & -\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{-1}\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2} & N^{-1}\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2} \\ 0 & 0 & -N & N \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

4.4.2 Polární konfigurace

Zde budeme předpokládat, že vnější magnetické pole působí ve směru kolmém na rovinu vrstvy. Budeme teď uvažovat, že tenzor permitivity závisí na vektoru magnetizace $\boldsymbol{M}$ pouze lineárně a nabývá tvaru (4.8). Takto vzniklé fyzikální podmínky nazýváme polární konfigurací. Rovnice (4.17) přejde na tvar

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 - N_y^2 - N_z^2 & -i\epsilon_1 Q_P & 0 \\ i\epsilon_1 Q_P & \epsilon_1 - N_z^2 & N_y N_z \\ 0 & N_y N_z & \epsilon_1 - N_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{4.20}$$

Z podmínky nulového determinantu soustavy dostaneme

$$N_{z1,3} = -N_{z2,4} = \sqrt{\epsilon_1 - N_y^2 \pm Q_P\sqrt{\epsilon_1(\epsilon_1 - N_y^2)}}.$$

Řešení soustavy rovnic budou odpovídat obecným elipticky polarizovaným vlnám, přičemž matice tečných složek vektorů intenzit bude mít tvar

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{(n)} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} & D_{11} & D_{11} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}, \\
D_{11} &= \epsilon_1 Q_P \left(\epsilon_1 - N_y^2\right), \\
D_{2j} &= \epsilon_1 Q_P N_{zj} \left(\epsilon_1 - N_y^2\right), \\
D_{3j} &= iN_y N_{zj} \left(\epsilon_1 - N_y^2 - N_{zj}^2\right), \\
D_{4j} &= iN_y N_{zj}^4 - iN_y \epsilon_1^2 + 2i\epsilon_1 N_y^3 - iN_y^5.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.4.3 Longitudinální konfigurace

Za longitudinální konfiguraci považujeme stav, kdy je vektor magnetizace $\boldsymbol{M}$ rovnoběžný s rovinou vrstvy a současně leží v rovině dopadu. Jelikož budeme opět uvažovat pouze lineární závislost na vektoru magnetizace, bude tenzor permitivity odpovídat tvaru (4.9). Rovnice (4.17) se opět výrazně zjednoduší na tvar

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 - N_y^2 - N_z^2 & 0 & i\epsilon_1 Q_L \\ 0 & \epsilon_1 - N_z^2 & N_y N_z \\ -i\epsilon_1 Q_L & N_y N_z & \epsilon_1 - N_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{4.22}$$

přičemž hledané kořeny budou

$$N_{z1,3} = -N_{z2,4} = \sqrt{\epsilon_1 - N_y^2 - \frac{1}{2}\epsilon_1 Q_L^2 \pm \frac{1}{2} Q_L \sqrt{\epsilon_1^2 Q_L^2 + 4\epsilon_1 N_y^2}}.$$

Matice sestavená z tečných složek vektorů intenzity elektrického a magnetického pole bude mít následující tvar:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{(n)} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}, \\
D_{1j} &= i\epsilon_1 N_y Q_L N_{zj}, \\
D_{2j} &= i\epsilon_1 N_y Q_L N_{zj}^2, \\
D_{3j} &= -N_y N_{zj} \left(\epsilon_1 - N_y^2 - N_{zj}^2\right), \\
D_{4j} &= N_y \epsilon_1^2 - 2\epsilon_1 N_y^3 + N_y^5 - N_y \epsilon_1^2 Q_L^2 - N_y N_{zj}^4.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.4.4 Transverzální konfigurace

Budeme uvažovat lineární závislost tenzoru permitivity na vektoru magnetizace, který je rovnoběžný s rovinou vrstvy a současně kolmý na rovinu dopadu. Tenzor bude mít tvar dle (4.10), rovnice (4.17) přejde na tvar

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 - N_y^2 - N_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 - N_z^2 & -i\epsilon_1 Q_T + N_y N_z \\ 0 & i\epsilon_1 Q_T + N_y N_z & \epsilon_1 - N_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{4.24}$$

hledané řešení budou mít tvar

$$N_{z1,2} = \pm\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2}, \qquad N_{z3,4} = \pm\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2 - \epsilon_1 Q_T^2}.$$

Sestavíme-li matici tečných složek pole, tak uvidíme její velmi jednoduchou strukturu, velmi podobnou izotropnímu případu (4.19)

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{(n)} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11} & 0 & 0 \\ D_{21} & -D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{33} \\ 0 & 0 & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}, \\ D_{11} &= 1, \\ D_{21} &= \sqrt{\epsilon_1 - N_y^2}, \\ D_{33} &= \epsilon_1 - N_y^2, \\ D_{43} &= -i\epsilon_1 N_y Q_T - \epsilon_1\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2 - \epsilon_1 Q_T^2}, \\ D_{44} &= -i\epsilon_1 N_y Q_T + \epsilon_1\sqrt{\epsilon_1 - N_y^2 - \epsilon_1 Q_T^2}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.4.5 Obecné vztahy

Jak je vidět z předchozích odstavců, řešení speciálních případů, zvláště pak pro lineární případy, není složité. Bohužel, stačí když přejdeme ke kombinacím těchto jevů a jednoduchá struktura se vytratí. Tyto případy bývají efektivně řešeny pro kolmé úhly dopadu, kde se výrazy výrazně zjednoduší. Následně budou uvedeny obecnější výrazy, z kterých se dají určit potřebné relace, které však jen zřídka řešíme analyticky. Při řešení soustavy (4.17) se dostáváme k následujícímu vztahu (tzv. charakteristická rovnice), pro hledání hodnot normálové složky vektoru indexu lomu:

$$\begin{aligned} &\epsilon_{zz} N_z^4 + (\epsilon_{yz} + \epsilon_{zy}) N_y N_z^3 + \\ &-[\epsilon_{yy}(\epsilon_{zz} - N_y^2) + \epsilon_{zz}(\epsilon_{xx} - N_y^2) - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yz}\epsilon_{zy}] N_z^2 + \\ &-[(\epsilon_{xx} - N_y^2)(\epsilon_{yz} + \epsilon_{zy}) - \epsilon_{xy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yx}\epsilon_{xz}] N_y N_z + \\ &+\epsilon_{yy}[(\epsilon_{xx} - N_y^2)(\epsilon_{zz} - N_y^2) - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx}] - \epsilon_{xy}\epsilon_{yx}(\epsilon_{zz} - N_y^2) + \\ &-\epsilon_{yz}\epsilon_{zy}(\epsilon_{xx} - N_y^2) + \epsilon_{xy}\epsilon_{zx}\epsilon_{yz} + \epsilon_{yx}\epsilon_{xz}\epsilon_{xy} = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

V nejobecnějších případech je třeba tedy řešit obecný polynom čtvrtého řádu, což znamená nepříjemné komplikace při pokusu o analytické vyjádření. Obecně a relativně snadno lze ovšem vyjádřit hledaný vektor polarizace intenzity elektrického pole. Jedno z možných vyjádření vypadá takto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_j &= C_j \begin{bmatrix} -\epsilon_{xy}(\epsilon_{zz} - N_y^2) + \epsilon_{xz}(\epsilon_{zy} - N_y N_{zj}) \\ (\epsilon_{zz} - N_y^2)(\epsilon_{xx} - N_y^2 - N_{zj}^2) - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx} \\ -(\epsilon_{zy} + N_y N_{zj})(\epsilon_{xx} - N_y^2 - N_{zj}^2) + \epsilon_{zx}\epsilon_{xy} \end{bmatrix}, \\ C_j &= (-\epsilon_{xy}(\epsilon_{zz} - N_y^2) + \epsilon_{xz}(\epsilon_{zy} - N_y N_{zj}))^{-1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ovšem tento výraz je platný, pouze pokud má smysl, tedy pokud jmenovatel koeficientu C_j není roven nule. To není splněno například pro izotropní případ, ani pro čistě transverzální konfiguraci. V takových případech je třeba zvolit jiný postup při výpočtu. Pro tyto speciální případy se ovšem výpočet výrazně zjednoduší. Obecný tvar matice tečných složek (někdy také nazývané dynamická matice) v n-tém prostředí vypadá takto:

$$\mathbb{D}^{(n)} = \begin{bmatrix} e_{1,x}^{(n)} & e_{2,x}^{(n)} & e_{3,x}^{(n)} & e_{4,x}^{(n)} \\ h_{1,y}^{(n)} & h_{2,y}^{(n)} & h_{3,y}^{(n)} & h_{4,y}^{(n)} \\ e_{1,y}^{(n)} & e_{2,y}^{(n)} & e_{3,y}^{(n)} & e_{4,y}^{(n)} \\ h_{1,x}^{(n)} & h_{2,x}^{(n)} & h_{3,x}^{(n)} & h_{4,x}^{(n)} \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

4.5 Berremanův přístup

Přístup dle Berremana je založen na jiných předpokladech. Nesnaží se převést Maxwellovy rovnice na rovnici Helmholtzovu (rovnice druhého řádu), ale řeší soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. Vyjdeme z rovnic (4.13) a (4.14), které si napíšeme v tzv. normalizovaném tvaru

$$\nabla \times \boldsymbol{E'} = -ik_0 \boldsymbol{\mu}_r \boldsymbol{H'} \tag{4.29}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H'} = ik_0 \boldsymbol{\epsilon}_r \boldsymbol{E'}, \tag{4.30}$$

kde $\boldsymbol{E'} = \sqrt[4]{\mu_0^{-1}\epsilon_0}\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H'} = \sqrt[4]{\epsilon_0^{-1}\mu_0}\boldsymbol{H}, k_0 = c^{-1}\omega$. Napíšeme-li vektory $\boldsymbol{E'}$ a $\boldsymbol{H'}$ ve tvaru $\boldsymbol{E'} = [e_x, e_y, e_z]^T, \boldsymbol{H'} = [h_x, h_y, h_z]^T$, získáme (po rozepsání rovnic (4.29) a (4.30)) soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = ik_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_{xx} & -\mu_{xy} & -\mu_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_{yx} & -\mu_{yy} & -\mu_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_{zx} & -\mu_{zy} & -\mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Vzhledem k tomu, že derivace ve směru tečných složek (obr. 4.4) jsou konstantní, tvoří soustavu čtyři obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty a dvě algebraické rovnice. Položíme-li jako v předchozích případech $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \mathbb{I}, k_x = 0$, přejde rovnice (4.31) na tvar

$$\begin{bmatrix} -ik_0\epsilon_{xx} & -ik_0\epsilon_{xy} & -ik_0\epsilon_{xz} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & ik_y \\ -ik_0\epsilon_{yx} & -ik_0\epsilon_{yy} & -ik_0\epsilon_{yz} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ -ik_0\epsilon_{zx} & -ik_0\epsilon_{zy} & -ik_0\epsilon_{zz} & -ik_y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & ik_y & ik_0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & ik_0 & 0 \\ -ik_y & 0 & 0 & 0 & 0 & ik_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.32}$$

Vyjádříme-li z algebraických rovnic normálové složky a dosadíme do ostatních, získáme soustavu čtyřech obyčejných diferenciálních rovnic. Soustavu pak můžeme formálně vyjádřit takto:

$$\frac{\partial}{\partial z}\, \boldsymbol{f} = -ik_0\ \mathbb{C}\ \boldsymbol{f}, \tag{4.33}$$

kde $\mathbb{C}$ je matice 4×4, $\boldsymbol{f} = [e_x, h_y, e_y, h_x]^T$. Konkrétní tvar matice $\mathbb{C}$ pro gyroelektrické prostředí se zavedenou soustavou souřadnic (obr. 4.4) je následující:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_{xx} - N_y^2 - \epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{xz}\epsilon_{zx} & 0 & \epsilon_{xy} - \epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{xz}\epsilon_{zy} & N_y\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{xz} \\ -N_y\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{zx} & 0 & -N_y\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{zy} & N_y^2\epsilon_{zz}^{-1} - 1 \\ \epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} - \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{yz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{yy} & -N_y\epsilon_{zz}^{-1}\epsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

Matice $\mathbb{C}$ je pro všechny fyzikálně korektní úlohy regulární. Je třeba nalézt matici složenou z vlastních vektorů, které jsou lineárně nezávislé. Pokud má matice násobná vlastní čísla, je třeba volit vlastní vektory tak, aby splňovaly tuto podmínku. Nalezneme-li takové vektory, můžeme psát

$$\boldsymbol{f} = \mathbb{T}\ \boldsymbol{g},$$

kde $\mathbb{T}$ je matice vlastních vektorů matice $\mathbb{C}$. Rovnici (4.33) můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial z}\, \boldsymbol{g} = -ik_0\ \mathbb{T}^{-1}\ \mathbb{C}\ \mathbb{T}\ \boldsymbol{g} = -ik_0\ \mathbb{A}\ \boldsymbol{g}, \tag{4.34}$$

kde $\mathbb{A}$ je diagonální matice s vlastními čísly matice $\mathbb{C}$ na diagonále. Vlastní čísla matice $\mathbb{C}$ odpovídají hodnotám $N_{z,i}$, vlastní vektory pak tečným složkám vektorů $\boldsymbol{e}_i$ (viz 4.27) a $\boldsymbol{h}_i$. Přechod k vektoru $\boldsymbol{g}$ znamená přechod od složek pole k amplitudám. Vektor $\boldsymbol{f}$ nám reprezentuje velikost tečných složek pole, ve kterých byla zahrnuta jak amplituda, tak vektor polarizace. Oproti tomu je $\boldsymbol{g}$ vektor amplitud a matice $\mathbb{T}$, pomocí které můžeme (přenásobením vektoru $\boldsymbol{g}$) získat opět úplný popis složek pole, reprezentuje vektory polarizace.

4.6 Hraniční podmínky

Dosavadním způsobem jsme schopni úplně popsat šíření elektromagnetických rovinných vln v libovolném materiálu (se známými parametry) v libovolném místě a čase. Zde se zaměříme na popis časově stacionárních případů, tzn. že časový vývoj funkcí pro nás nebude podstatný. Ukázali jsme, jak lze získat parametry, které jsou klíčové pro popis v rámci daného prostředí, tedy hodnoty složek vlnového vektoru a vektory polarizace odpovídající jednotlivým vlastním módům.

Nyní se budeme zabývat chováním vln v systému s různými materiály (prostředími). Tato oblast je ovšem příliš rozsáhlá na to, aby se dala snadným způsobem popsat, proto si vybereme speciální případ. Jak již bylo řečeno dříve budeme se zabývat systémy složenými ze dvou poloprostorů, které jsou odděleny konečným počtem planárních vrstev. Přestože používaná teorie je použitelná pro všechny druhy fyzikálně přípustných materiálů (pochopitelně popsatelných konkrétními parametry), my se zaměříme na systémy, kde budou oba poloprostory izotropní a bezeztrátové (permitivitu lze reprezentovat reálným číslem). Důvod je velmi prostý. Vlastní módy šířící se takovými materiály jsou zřejmé, dobře známé a snadno interpretovatelné. Šíření v jiných materiálech je sice stejným způsobem popsatelné, ovšem někdy je velmi problematické interpretovat vlastní módy, odvozené parametry atd. Mnohem důležitější je ovšem korelace s experimentem. Ty obvykle probíhají v bezeztrátovém prostředí (například vzduch) a tedy nikoho nepřekvapí index lomu jen o málo větší než jedna, navíc reálný. V případě podložky by tomu občas mohlo být jinak, ovšem tyto případy zde budou uvažovány jen zřídka.

Je zřejmé, že nyní budeme potřebovat popsat pole nejen uvnitř materiálů, ale také na jejich rozhraních. K tomu použijeme okrajovou podmínku obvyklou v teorii pole. Považujeme za přirozenou podmínku spojitosti fáze vlny, která se šíří skrz celý systém. To zřejmě u rovinných vln znamená, že v každém bodě a čase musí být zachována spojitost fáze vlny. Uvnitř materiálu je toto splněno (viz (4.11), (4.12)), ovšem je nutné to zaručit i na rozhraní dvou prostředí. Z integrálního tvaru Maxwellových rovnic plyne, že na rozhraní mezi prostředími se zachovávají tečné složky pole, což využijeme dále.

Nyní jsme schopni vyjádřit celkové pole v daném (n-tém) prostředí ve tvaru

$$\boldsymbol{E'}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} A_j^{(n)} \boldsymbol{e}_j^{(n)} \exp\left(i\omega t - i\boldsymbol{k}_j^{(n)} \cdot \boldsymbol{r}\right),$$

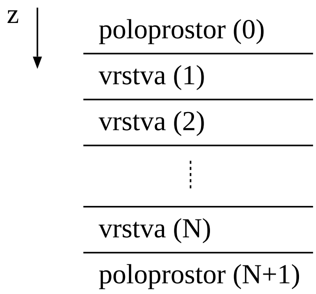
$$\boldsymbol{H'}^{(n)} = \sum_{j=1}^{4} A_j^{(n)} \boldsymbol{h}_j^{(n)} \exp\left(i\omega t - i\boldsymbol{k}_j^{(n)} \cdot \boldsymbol{r}\right).$$

Aplikujeme-li podmínku rovnosti tečných složek na rozhraní prostředí (n), $(n+1)$, získáme (po zkrácení nenulových exponenciálních faktorů) následující rovnice pro tečné složky pole:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} A_j^{(n)} \boldsymbol{e}_{j,m}^{(n)} &= \sum_{j=1}^{4} A_j^{(n+1)} \boldsymbol{e}_{j,m}^{(n+1)} \\ \sum_{j=1}^{4} A_j^{(n)} \boldsymbol{h}_{j,m}^{(n)} &= \sum_{j=1}^{4} A_j^{(n+1)} \boldsymbol{h}_{j,m}^{(n+1)} \quad , m \in \{x, y\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Mějme nyní systém složený z n vrstev a dvou poloprostorů, tak jako na obrázku 4.5. Pole na rozhraní mezi prostředím (n) a $(n+1)$ můžeme napsat jako soustavu (4.35). Chceme-li popsat přechod na rozhraní prostředí $(n-1)$ a (n), tak k výrazu (4.35) přidáme exponenciální faktor odpovídající šíření ve vrstvě (n). Mnohem lépe to ukážeme, využijeme-li maticového formalismu. Z definice tvaru matice $\mathbb{D}$ ve výrazu (4.28) vidíme, že lze soustavu rovnic (4.35) zapsat v maticovém tvaru takto:

$$\mathbb{D}^{(n)} \boldsymbol{A}^{(n)} = \mathbb{D}^{(n+1)} \boldsymbol{A}^{(n+1)},$$



Obrázek 4.5: Systém poloprostor-N vrstev-poloprostor.

kde $\boldsymbol{A}^{(n)}$ jsme označili vektor amplitud v n-tém prostředí. Amplitudy $\boldsymbol{A}^{(n)}$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \left(\mathbb{D}^{(n)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(n+1)} \boldsymbol{A}^{(n+1)}.$$

Na dalším rozhraní dosadíme na pravou stranu vektor $\boldsymbol{A}^{(n)}$ přenásobený diagonální maticí šíření

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathrm{diag}\left\{\exp\left(ik_0 N_{z,j}^{(n)} t^{(n)}\right)\right\},\ j = 1 \ldots 4.$$

Opačné znaménko v exponentu má význam šíření v záporném směru osy z, $t^{(n)}$ je šířka dané vrstvy. Získáme vztah mezi amplitudami na rozhraní prostředí $(n-1)$ a (n) ve tvaru

$$\mathbb{D}^{(n-1)} \boldsymbol{A}^{(n-1)} = \mathbb{D}^{(n)} \mathbb{P}^{(n)} \boldsymbol{A}^{(n)},$$

který přepíšeme na tvar

$$\boldsymbol{A}^{(n-1)} = \left(\mathbb{D}^{(n-1)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(n)} \mathbb{P}^{(n)} \left(\mathbb{D}^{(n)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(n+1)} \boldsymbol{A}^{(n+1)}.$$

Rekurzivním opakováním těchto kroků se dostaneme až k výrazu

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = \left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{N} \mathbb{S}^{(j)}\right) \mathbb{D}^{(N+1)} \boldsymbol{A}^{(N+1)} = \mathbb{M} \boldsymbol{A}^{(N+1)}, \tag{4.36}$$ [2]

$$\mathbb{S}^{(j)} = \mathbb{D}^{(j)} \mathbb{P}^{(j)} \left(\mathbb{D}^{(j)}\right)^{-1}.$$

Výraz (4.36) reprezentuje souvislost mezi polem nad a pod systémem vrstev. Snadno nahlédneme, že matice $\mathbb{S}^{(j)}$ reprezentuje úplným způsobem j-tou vrstvu, takže přidání další vrstvy do systému odpovídá přidání další matice $\mathbb{S}$ do součinu. Nyní je již vidět jednoduchost a přehlednost tohoto zápisu, který umožňuje popsat jevy, ke kterým dochází na systémech tenkých planárních vrstev.

Za zmínku stojí také matice přechodu $\mathbb{M}$, neboť ta reprezentuje naši „ znalost systému“. Je jednoznačným prvek, který svazuje pole v obou poloprostorech, a který budeme často používat k vyjádření některých odvozených hodnot. Většina našich výpočtů bude tedy směřována právě k určení matice $\mathbb{M}$.

[2] Tento výraz lze získat také jinak, například postupem uvedeným v příloze na straně 57.

Na závěr této kapitoly je nutné uvést ještě jednu věc, která byla kvůli jednoduchosti z předchozích výrazů vypuštěna. Rovnice budou fungovat, jestliže při podmínce rovnosti tečných složek budeme používat matice tečných složek složené výhradně ze složek normovaných vektorů. To znamená, že bychom měli vlastně všude místo matice $\mathbb{D}^{(n)}$ používat součin matic $\mathbb{D}^{(n)}\mathbb{C}^{(n)}$, kde $\mathbb{C}^{(n)}$ je diagonální matice, jež nám normuje složky vektorů v matici $\mathbb{D}^{(n)}$. Ovšem snadno uvidíme v rovnici (4.36), že se všechny matice $\mathbb{C}^{(n)}$ vykrátí až na ty, které jsou přímo u vektorů amplitud. Rovnice (4.36) by tedy měla vypadat takto:

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = \left(\mathbb{C}^{(0)}\right)^{-1} \left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} \left(\prod_{j=1}^{N} \mathbb{S}^{(j)}\right) \mathbb{D}^{(N+1)}\mathbb{C}^{(N+1)}\boldsymbol{A}^{(N+1)}$$

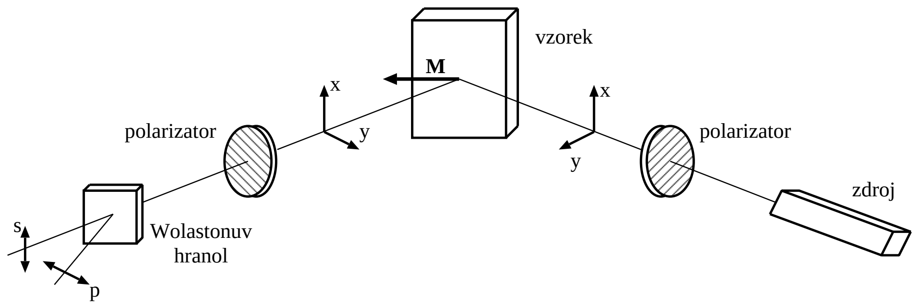
Ovšem, jak již bylo dříve řečeno, většina obklopujících prostředí bývá izotropní. Matice $\mathbb{D}^{(0)}$ a $\mathbb{D}^{(N+1)}$ pak obvykle mají tvar (4.19), který odpovídá matici sestavené z tečných složek normovaných vektorů polarizace vlastních módů. V takových případech nemusíme matice $\mathbb{C}^{(n)}$ explicitně uvádět.

Kapitola 5

Modelování magneto-optických jevů

V této kapitole se budeme zabývat využitím teorie optiky tenkých vrstev ke konkrétním výpočtům. Abychom mohli mnohem lépe pochopit proč děláme některé výpočty, nastíníme zde alespoň hrubě, jak probíhají experimenty, s kterými se budeme snažit výsledky porovnávat.

Během experimentu používáme pokud možno koherentní, monochromatický zdroj jako plynný laser nebo laserovou diodu. Abychom dosáhli definované počáteční polarizace, prochází tento svazek polarizačním filtrem, který jej lineárně polarizuje v požadovaném směru (obvykle s nebo p polarizace). Poté jej necháme dopadat na vzorek pod definovaným úhlem. Vzorek se obvykle nachází v magnetickém poli, kterým takto ovlivňujeme anizotropii vzorku. Směr pole musí být také co nejpřesněji specifikován, neboť má pro výpočty, které provádíme, klíčový význam. Pole bývá orientováno do směru některé z os. Po odrazu od vzorku prochází svazek Wolastonovým hranolem, který zajistí rozdělení světla dle polarizace na s a p složky. Konkrétně se pak měří rozdíl intenzit polarizovaného světla. Schéma takového experimentu je na obrázku 5.1. Podrobnosti jako třeba jak rychle a jak přesně jsme schopni měření provést, či které další přístroje se k měření používají zde nebudou uvedeny. Vzhledem k následujícím výpočtům jsou tyto detaily nepodstatné.



Obrázek 5.1: Schema rozmístění experimentálních zařízení.

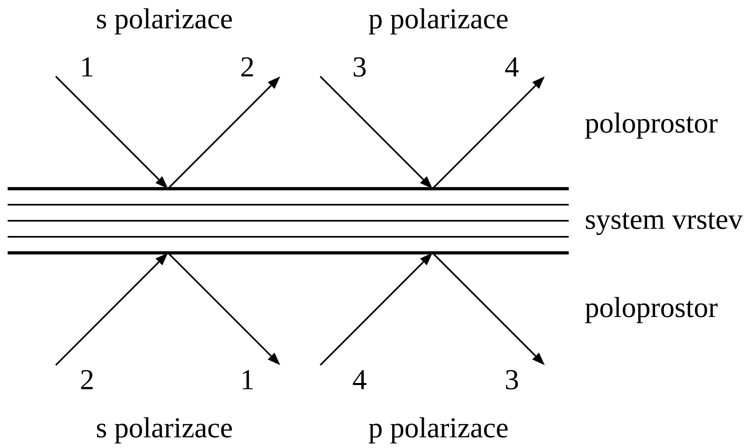
Nyní si můžeme ukázat, které parametry jsou pro nás zajímavé, a které budeme chtít ověřit také výpočty. Jak vyplývá z obrázku 5.1, zajímají nás intenzity svazků přicházejících z Wolastonova hranolu, které odpovídají odrazivostem jednotlivých polarizací. Jejich velikosti jsou pro nás důležité především proto, abychom byli schopni předem určit, zda jsme dané intenzity vůbec schopni naměřit (zda nejsou příliš malé). Navíc nás zajímají také jejich rozdíly, neboť ty obvykle měříme. Poměry amplitud odražených vln jsou reprezentovány Kerrovými parametry, což jsou právě rotace a elipticita (viz obr. 4.1). Z těchto důvodů se v následujících podkapitolách budeme věnovat právě těmto veličinám.

5.1 Izotropní prostředí

V předchozí kapitole jsme si výrazem (4.36) popsali vztah mezi polem nad a pod systémem vrstev. Pojďme si jej nyní rozebrat podrobněji. Označme kvůli jednoduššímu zápisu podložku (druhý poloprostor) indexem N. Rozepišme si nyní vztah (4.36) následujícím způsobem:

$$\begin{bmatrix} A_1^{(0)} \\ A_2^{(0)} \\ A_3^{(0)} \\ A_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{(N)} \\ A_2^{(N)} \\ A_3^{(N)} \\ A_4^{(N)} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Zde jsou komplexní amplitudy v n-tém prostředí $A_i^{(n)}$ rozděleny podle směru šíření dané vlny na amplitudy vln dopadajících na rozhraní (indexy 1, 3) a na amplitudy vln, které se odrazí (indexy 2, 4). Přesněji to lze vidět na obrázku 5.2. Jelikož obvykle pracujeme s bezeztrátovými



Obrázek 5.2: Označení vln šířících se nad a pod systémem vrstev.

izotropními poloprostory, tak čísly 1, 2 označujeme s polarizaci a čísly 3, 4 pak p polarizaci.

Nyní si vezměme reálný fyzikální případ. Řekněme, že použijeme experimentální zařízení dle obrázku 5.1. Potom můžeme předpokládat, že z N-tého prostředí nedopadá žádné světlo. To znamená, že amplitudy $A_2^{(N)}$, $A_4^{(N)}$ jsou nulové. Dále můžeme předpokládat, že známe polarizační stav světla dopadajícího z 0-tého prostředí (známe zdroj). Pak vztah (5.1) představuje soustavu čtyřech rovnic o čtyřech neznámých. Řešení tedy bude jednoznačné (neboť matice nebude singulární).

Dále definujme reflexní koeficienty a transmisní koeficienty, které jsou dány poměrem amplitud odražené (prošlé) a dopadající vlny. Obecně to tedy jsou komplexní čísla. Budeme je značit indexy podle polarizace dopadající a odražené (resp. prošlé) vlny. Například reflexní koeficient na rozhraní mezi prostředími 0 a 1, pro dopadající vlnu s číslem 1 a odraženou s číslem 4 budeme značit

$$r_{14}^{01} = \frac{A_4^{(0)}}{A_1^{(0)}}.$$

V prostředí, která jsou izotropní a bezeztrátové, zavedeme značení

$$r_{sp}^{01} = \frac{A_4^{(0)}}{A_1^{(0)}}.$$

Obdobně transmisní koeficient na stejném rozhraní mezi dopadající s vlnou a prošlou p vlnou bude mít tvar

$$t_{13}^{01} = t_{sp}^{01} = \frac{A_3^{(1)}}{A_1^{(0)}}.$$

Odvoďme si nyní výrazy pro některé reflexní a transmisní koeficienty pro celý systém vrstev. Vyjdeme ze soustavy rovnic (5.1) a budeme předpokládat následující:

Počítáme-li reflexní koeficient r_{ij}^{lk} nebo transmisní koeficient t_{ij}^{lk}, pak platí:

- $A_2^{(k)} = 0$, $A_4^{(k)} = 0$
- amplituda vlny dopadající z prostředí l na rozhraní lk, která má číslo různé od i, je nulová (tedy nedopadá jiná vlna než ta s indexem i)
- hodnota amplitudy $A_i^{(l)}$ je známá a nenulová
- $r_{ij}^{lk} = \frac{A_j^{(l)}}{A_i^{(l)}}$, $t_{ij}^{lk} = \frac{A_j^{(k)}}{A_i^{(l)}}$, kde indexy i, j musí být voleny tak, aby označení r a t dávalo smysl

Uveďme si nyní tvary reflexních a transmisních koeficientů, odvozených ze soustavy rovnic (5.1) a předchozích podmínek:

$$r_{12}^{1N} = \frac{M_{21}M_{33} - M_{23}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$r_{14}^{1N} = \frac{M_{41}M_{33} - M_{43}M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$r_{32}^{1N} = \frac{M_{11}M_{23} - M_{21}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$r_{34}^{1N} = \frac{M_{11}M_{43} - M_{41}M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$t_{11}^{1N} = \frac{M_{33}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$t_{13}^{1N} = \frac{-M_{31}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$t_{31}^{1N} = \frac{-M_{13}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

$$t_{33}^{1N} = \frac{M_{11}}{M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31}}$$

Určeme nyní tyto koeficienty pro rozhraní mezi dvěma izotropními poloprostory. Z předchozí kapitoly vyplývá, že matice $\mathbb{M}$ bude tvořena součinem matic ve tvaru

$$\mathbb{M} = \left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(1)}, \tag{5.2}$$

kde matice tečných složek a jejich inverze budou mít tvar

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} &= \frac{1}{2N_z^{(0)}} \begin{bmatrix} N_z^{(0)} & 1 & 0 & 0 \\ N_z^{(0)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & -\cos\phi_0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & \cos\phi_0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{D}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ N_z^{(1)} & -N_z^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi_1 & \cos\phi_1 \\ 0 & 0 & -N^{(1)} & N^{(1)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} N_z^{(0)} &= \sqrt{\epsilon_1^{(0)} - N_y^2}, \quad \cos\phi_0 = \left(N^{(0)}\right)^{-1} N_z^{(0)}, \\ N_z^{(1)} &= \sqrt{\epsilon_1^{(1)} - N_y^2}, \quad \cos\phi_1 = \left(N^{(1)}\right)^{-1} N_z^{(1)}. \end{aligned}$$

Úhel dopadu jsme označili ϕ_0 a je roven úhlu odrazu, úhel lomu je označen ϕ_1. Snellův zákon (5.8) určuje vztah mezi úhlem dopadu a úhlem lomu. Jelikož jsou obě matice $\left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1}$ a $\mathbb{D}^{(1)}$ blokově diagonální, bude i jejich součin blokově diagonální matice. Okamžitě je zřejmé, že koeficienty $r_{14}^{01}, r_{32}^{01}, t_{13}^{01}, t_{31}^{01}$ budou, vzhledem k této vlastnosti matice $\mathbb{M}$, nulové. Pokud matice vynásobíme a dosadíme do vztahů pro reflexní a transmisní koeficienty, dostaneme vztahy:

$$r_{12}^{01} = r_{ss}^{01} = \frac{N_z^{(0)} - N_z^{(1)}}{N_z^{(0)} + N_z^{(1)}} = \frac{N^{(0)}\cos\phi_0 - N^{(1)}\cos\phi_1}{N^{(0)}\cos\phi_0 + N^{(1)}\cos\phi_1} \tag{5.4}$$

$$r_{34}^{01} = r_{pp}^{01} = \frac{N^{(0)}\cos\phi_1 - N^{(1)}\cos\phi_0}{N^{(0)}\cos\phi_1 + N^{(1)}\cos\phi_0} \tag{5.5}$$

$$t_{12}^{01} = t_{ss}^{01} = \frac{2N_z^{(0)}}{N_z^{(0)} + N_z^{(1)}} = \frac{2N^{(0)}\cos\phi_0}{N^{(0)}\cos\phi_0 + N^{(1)}\cos\phi_1}$$

$$t_{34}^{01} = t_{pp}^{01} = \frac{2N^{(0)}\cos\phi_0}{N^{(0)}\cos\phi_1 + N^{(1)}\cos\phi_0}$$

Tyto výrazy odpovídají všeobecně známým Fresnelovým vztahům, které lze je nalézt (často odvozené jiným způsobem) téměř ve všech učebnicích optiky.

Ukažme si nyní vztahy pro Kerrovy parametry. Ve vztazích (4.3), (4.2) lze vidět jakým způsobem je můžeme odvodit. Chceme-li tedy získat vztah pro dopadající s-polarizaci, který vyjadřuje Kerrovu rotaci či elipticitu, musíme ve vztahu (4.2) dosadit za proměnnou χ hodnotu

$$\chi = \chi_s = -\frac{r_{sp}}{r_{ss}}. \tag{5.6}$$

V případě, že nás zajímají Kerrovy parametry pro dopadající p-polarizaci vlny, dosadíme

$$\chi = \chi_p = \frac{r_{ps}}{r_{pp}}. \tag{5.7}$$

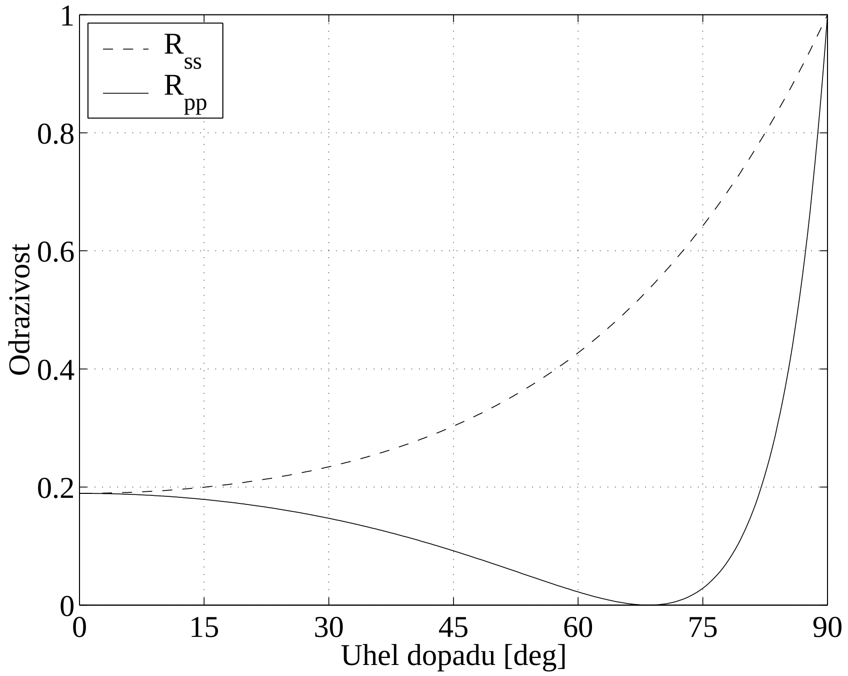
Pokud uvažujeme aproximaci pro malé hodnoty $\chi = \theta + i\varepsilon$, tak můžeme s pomocí předchozích vztahů odvodit:

$$\begin{aligned}
\theta_s &\doteq \Re(\chi_s) = -\Re\left(\frac{M_{41}M_{33} - M_{43}M_{31}}{M_{21}M_{33} - M_{23}M_{31}}\right)\\
\varepsilon_s &\doteq \Im(\chi_s) = -\Im\left(\frac{M_{41}M_{33} - M_{43}M_{31}}{M_{21}M_{33} - M_{23}M_{31}}\right)\\
\theta_p &\doteq \Re(\chi_p) = \Re\left(\frac{M_{11}M_{23} - M_{21}M_{13}}{M_{11}M_{43} - M_{41}M_{13}}\right)\\
\varepsilon_p &\doteq \Im(\chi_p) = \Im\left(\frac{M_{11}M_{23} - M_{21}M_{13}}{M_{11}M_{43} - M_{41}M_{13}}\right)
\end{aligned}$$

Z těchto výrazů je zřejmé, že pro izotropní prostředí budou všechny Kerrovy parametry nulové. Důvodem je, že reflexní koeficienty r_{sp}, r_{ps} jsou nulové. Zaveďme si nyní odrazivost R a propustnost T relacemi

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= |r_{ij}|^2,\\
T_{ij} &= \frac{N^{(1)}\cos\phi_1}{N^{(0)}\cos\phi_0}|t_{ij}|^2, \qquad i,j \in \{s,p\}.
\end{aligned}$$

Vztah pro propustnost budeme používat jen pro izotropní případ. Ukažme si nyní na grafech, jak vypadají jednotlivé veličiny pro izotropní bezeztrátový případ, řekněme $N^{(0)} = 1$, $N^{(1)} = 2.54$ (rozhraní vzduch-hranol). Odrazivost pro dopadající s i p polarizaci můžeme v závislosti na úhlu dopadu vidět na obrázku 5.3. Jak je vidět na obrázku, je $R_{ss} \geq R_{pp}$, což potvrzuje



Obrázek 5.3: Odrazivost na rozhraní dvou izotropních bezeztrátových prostředí pro dopadající s a p polarizaci vlny.

vztahy (5.4) a (5.5). Navíc je vidět úhel dopadu, pro který má koeficient R_{pp} (a tedy i r_{pp}) nulovou hodnotu (obecně to lze splnit pouze pro bezeztrátové prostředí). To zřejmě odpovídá vztahu

$$N^{(0)} \cos \phi_1 = N^{(1)} \cos \phi_0,$$

který po přidání Snellova zákona ve tvaru

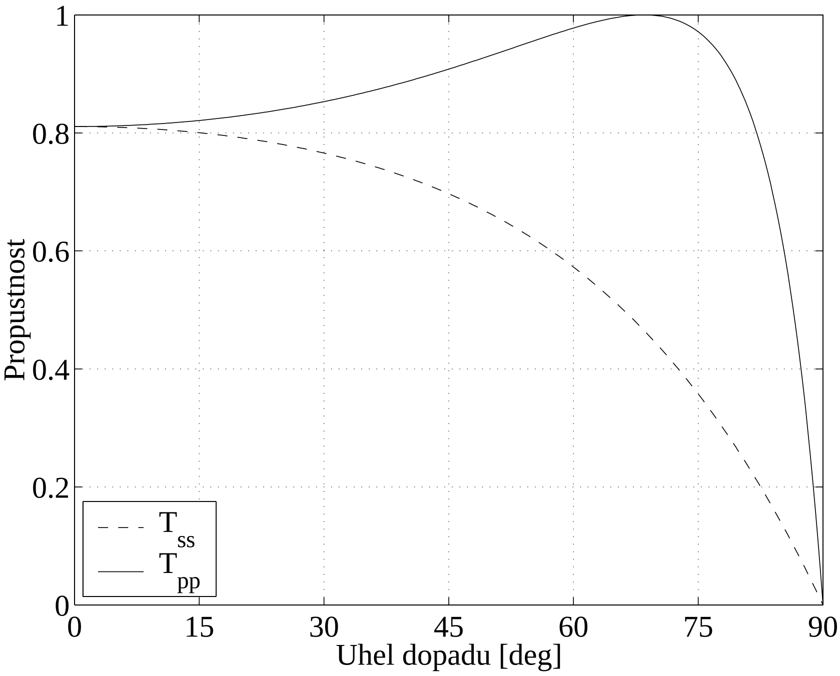
$$N^{(0)} \sin \phi_0 = N^{(1)} \sin \phi_1 \tag{5.8}$$

umožní získat úhel, pro který je r_{pp} nulový. Tento úhel dopadu je nazýván Brewsterovým úhlem a je určen vztahem

$$\phi = \arctan \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}}.$$

Při Brewsterově úhlu se odráží pouze světlo polarizované kolmo vůči rovině dopadu, čehož lze využít například při nastavování polohy polarizátorů.

Na závěr této podkapitoly si uveďme pro úplnost také tvar křivek popisujících závislost propustnosti na úhlu dopadu (obrázek 5.4). Pro izotropní bezeztrátové prostředí (také tento případ) platí, že součet koeficientů odrazivosti a propustnosti $R_{ii} + T_{ii} = 1$, $i \in \{s, p\}$.



Obrázek 5.4: Propustnost na rozhraní dvou izotropních bezeztrátových prostředí pro dopadající s a p polarizaci vlny.

5.2 Lineární jevy

Nyní si rozeberme lineární jevy, ke kterým dochází na rozhraní dvou prostředí. Předpokládejme opět, že jedno prostředí je vzduch. Druhé prostředí je zadáno relativním tenzorem permitivity, který obecně není diagonální. Nediagonální členy samozřejmě souvisí s magneto-optickými jevy, jelikož však mají tyto členy malou hodnotu vůči diagonálním, jejich vliv bude malý. Grafy vyjadřující závislost magneto-optických parametrů na úhlu dopadu jsou výrazně podobné těm pro izotropní případ, proto dále budeme prezentovat pouze rozdíly oproti izotropnímu případu. Lineární jevy lze realizovat pouze pro speciální orientace vektoru magnetizace (orientace do směru některé z os), neboť jinak dochází ke kombinaci jevů. V této kombinaci jsou zastoupeny i kvadratické jevy, jak bude ukázáno později.

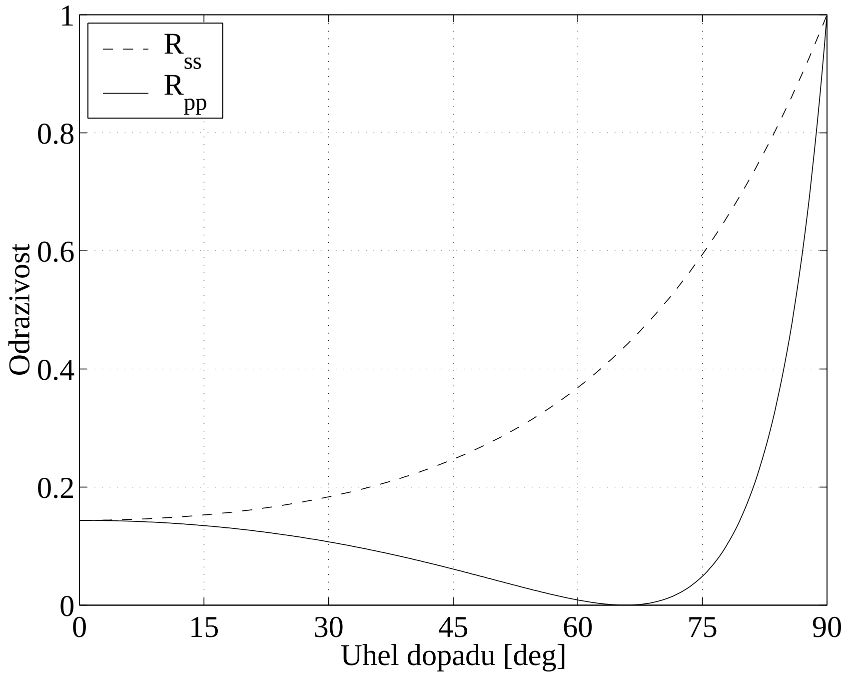
5.2.1 Transverzální konfigurace

Vezměme si nejprve nejjednodušší případ, kdy tenzor permitivity odpovídá transverzální konfiguraci (4.10). Budeme zkoumat rozhraní vzduch-vlnovodná struktura, kde $N^{(0)} = 1$, $N^{(1)} = 2.22 - 0.02i$ a $Q_T = 0.001$. Matici $\left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1}$ tedy použijeme stejně jako v izotropním případě ve tvaru (5.3). Matice tečných složek pro tento případ bude blokově diagonální (4.25), stejně jako u izotropního případu (4.19). Matice $\mathbb{M}$ bude mít tvar (5.2). To znamená, že pro koeficienty platí $r_{14} = r_{32} = t_{14} = t_{32} = 0$. Je zřejmé, že rotace a elipticita bude v takovém případě také nulová.

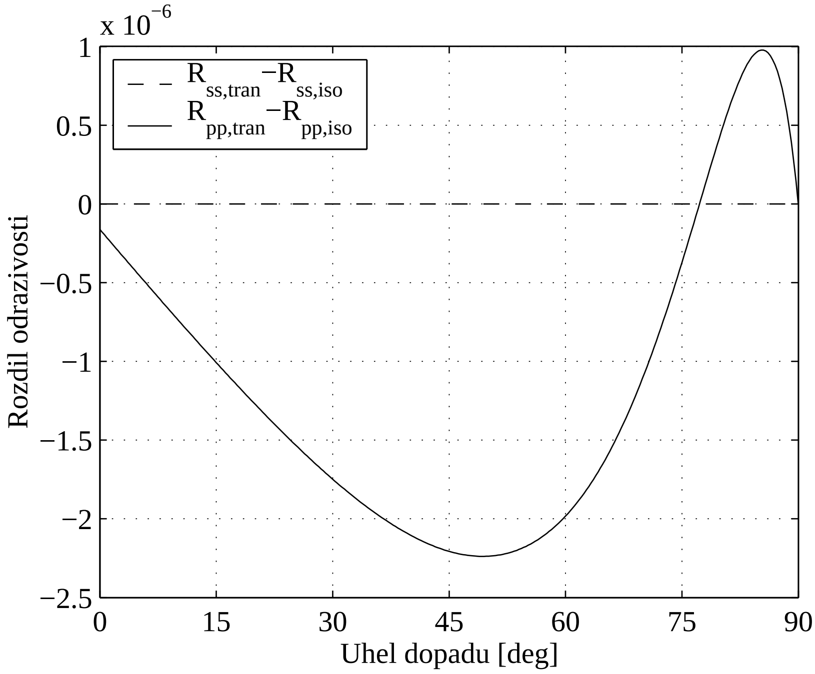
Na obrázku 5.5 můžeme vidět, jak vypadá graf znázorňující velikost odrazivosti na daném rozhraní. Aby byl mnohem lépe vidět vliv nediagonálních členů tenzoru permitivity (vliv vnějšího pole), je na obrázku 5.6 vykreslen graf rozdílu odrazivosti pro transverzální a izotropní případ. Jak lze vidět na obrázku je odrazivost R_{ss} pro transverzální případ stejná jako pro izotropní případ. Odrazivost R_{pp} je naopak rozdílná. Navíc existuje úhel dopadu, pro který je transverzální vliv nulový. Je dobré si uvědomit, že nás z hlediska měření zajímají pouze veličiny spjaté s odrazem vln (neboť prošlou vlnu neměříme), takže jsme mohli zanedbat veškeré normovací koeficienty. Důvodem je skutečnost, že reflexní koeficienty jsou definovány výrazy, ve kterých se všechny normovací členy zkrátí. Pokud by nás zajímaly také transmisní koeficienty, pak bychom museli na daném rozhraní dodržet následující pravidla:

- matice tečných složek je třeba sestavit z normovaných vektorů
- je třeba dbát na pořadí vektorů, především pak na směr šíření vlny reprezentované daným módem (vzhledem k ose z)

Zatímco první podmínku lze splnit relativně snadno, druhá nás přivede do nemalých nesnází, pokud budeme trvat na přísném rozlišování vlastních módů. Směr šíření lze snadno určit z reálné části z-ové souřadnice vlnového vektoru, ovšem horší je rozlišitelnost jednotlivých modů (šířících se stejným směrem). Jelikož ne vždy máme k dispozici úplné analytické vyjádření těchto vektorů (především při numerickém výpočtu), lze obecně jen stěží identifikovat který mód je který. V jednoduchých konkrétních případech (například speciální směr vektoru magnetizace) to problémy nečiní, ovšem pro obecnější případy materiálů, jejichž tenzory relativní permitivity nabývají složitějšího tvaru, to není vždy možné. Tento problém nenastává pro reflexní koeficienty (a veličiny z nich odvozené), pokud identifikujeme dopředné a zpětné vlny (vůči ose z). Dá se ukázat, že záměnou dvou dopředných (či dvou zpětných) vln v druhém prostředí, se reflexní koeficienty nemění.



Obrázek 5.5: Odrazivost pro transverzální konfiguraci.

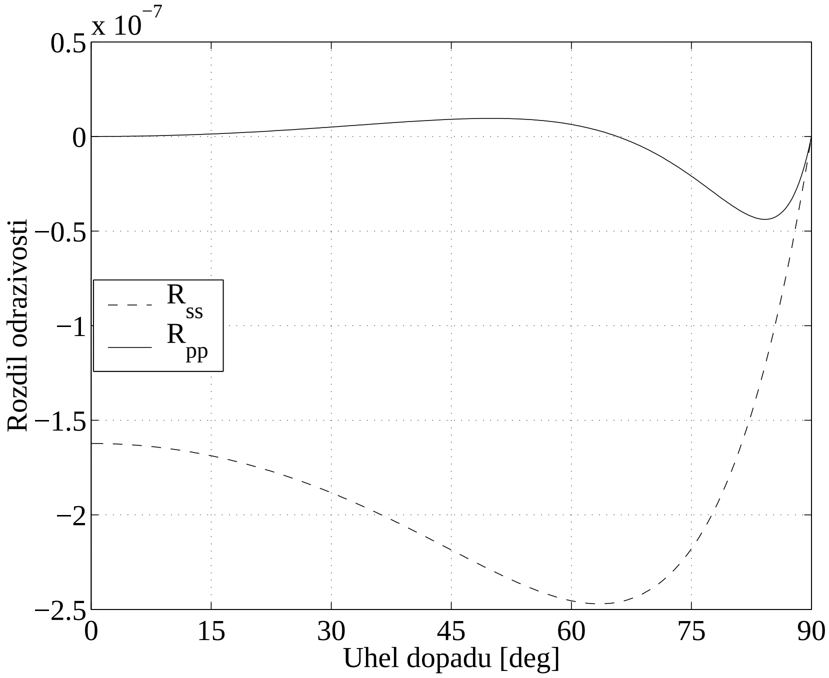


Obrázek 5.6: Rozdíly v odrazivosti mezi transverzálním a izotropním případem.

5.2.2 Longitudinální konfigurace

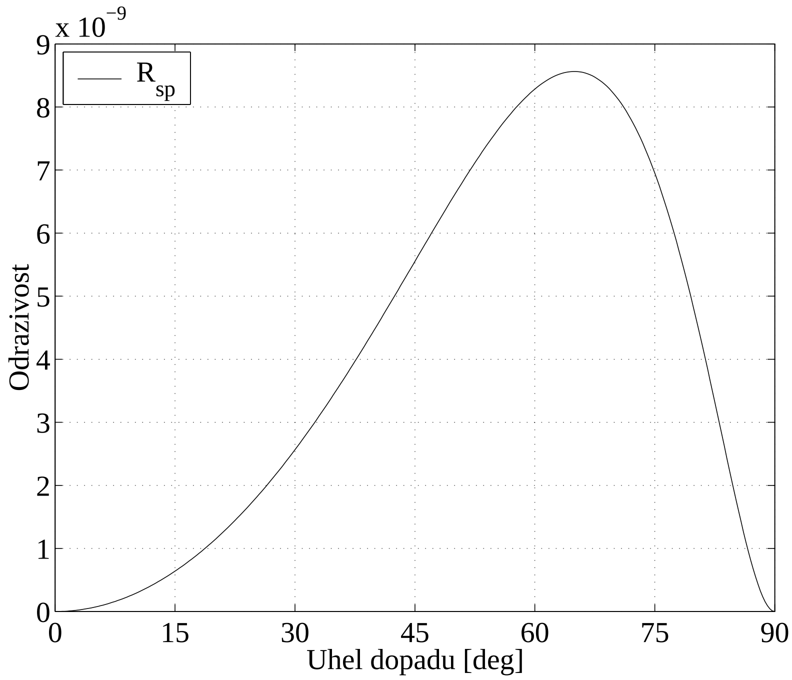
Vezměme nyní jiný případ, kdy je vektor magnetizace rovnoběžný s osou y, tedy lineární longitudinální konfiguraci. Ukážeme si, že její některé vlastnosti jsou výrazně odlišné od předchozích případů. Ponechme všechny parametry stejné jako v předchozím případě až na Q_L, které nyní bude rovno Q_T z předchozího případu, tedy $Q_L = 0.001$. Výpočet bude prakticky totožný, akorát budeme dosazovat za tenzor permitivity výraz (4.9) a matice $\mathbb{D}^{(1)}$ bude ve tvaru (4.23). Matice $\mathbb{M}$ zůstane stejným součinem jako v (5.2), ovšem s jinou maticí $\mathbb{D}^{(1)}$.

Vliv longitudinálního členu tenzoru permitivity na odrazivost je rozpoznatelný na obrázku 5.7. Zde je vidět, že vliv na tyto parametry je malý, pro p polarizaci dokonce o řád nižší než u transverzální konfigurace (toho se někdy využívá, neboť je vliv lineárních členů na R_{pp} nejvyšší právě pro transverzální případ). Není zde uveden obrázek hodnot parametrů pro longitudinální případ, neboť je k nerozeznání od obrázku 5.5. Zajímavější jsou ovšem

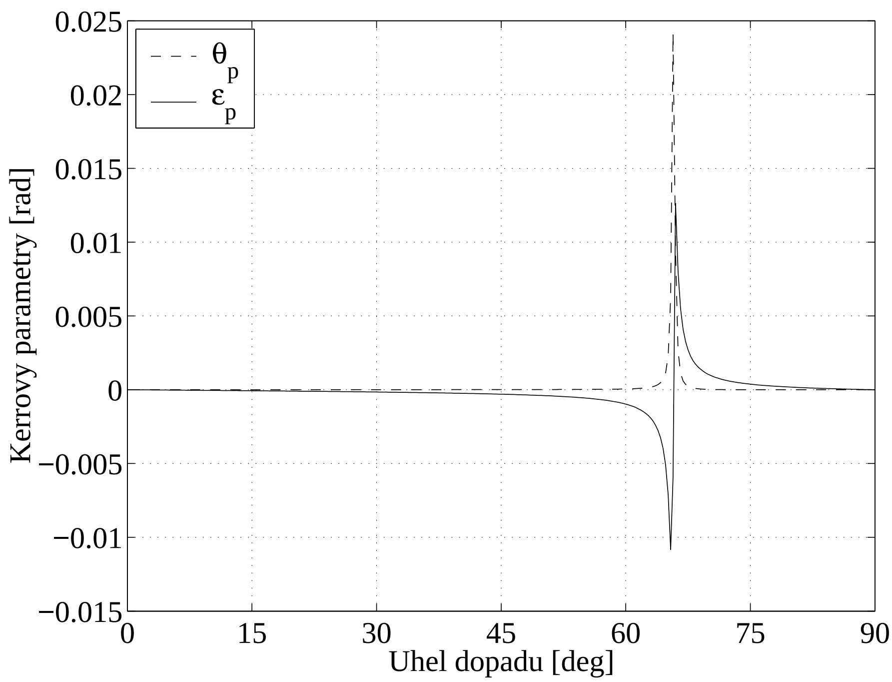


Obrázek 5.7: Rozdíly v odrazivosti mezi longitudinální a izotropní konfigurací.

odrazivosti R_{sp} a R_{ps}, které mají stejnou velikost, ovšem narozdíl od transverzálního případu jsou nenulové. Velikost a tvar těchto parametrů lze vidět na obrázku 5.8. Na něm si všimněme, že tyto parametry jsou nulové pro kolmý úhel dopadu a klouzavý dopad. Nejvyšších hodnot dosahují v oblasti, kde se odrazivost R_{pp} blíží k nule (případně může být rovna nule), viz obr. 5.5. Tyto vlastnosti se ukazují podstatnými při určování dalších magneto-optických parametrů, Kerrovy rotace a elipticity. Ihned je to zřejmé, když se podíváme na obrázek 5.9. Na grafu vidíme vysoké hodnoty právě v oblasti, kde je R_{pp} blízké nule. Navíc zde vidíme radikální změnu hodnot elipticity ϵ_p, vzhledem ke změně znaménka dominantní reálné části odrazivosti R_{pp}. Hodnoty v jiných oblastech grafu jsou vůči těmto prakticky bezvýznamné. Tento poněkud zvláštní charakter Kerrových parametrů je dán malou imaginární částí (ztrátovou složkou) indexu lomu druhého prostředí. Oproti tomu mají Kerrovy parametry pro s polarizaci mnohem obvyklejší charakter, jak je vidět na obrázku 5.10. Zde je jasně vidět, že

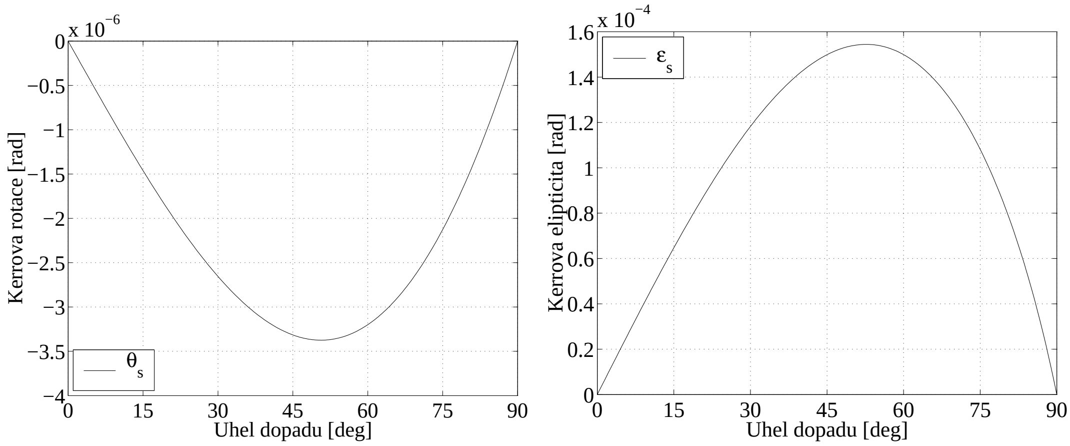


Obrázek 5.8: Odrazivosti pro longitudinální konfiguraci ($R_{ps} = R_{sp}$).



Obrázek 5.9: Rotace a elipticita pro p polarizaci, longitudinální konfigurace.

tyto parametry nemění znaménko a pro kolmý a klouzavý dopad mají oba nulovou hodnotu. V zásadě jejich charakter odpovídá charakteru odrazivosti R_{sp} (resp. R_{ps}).

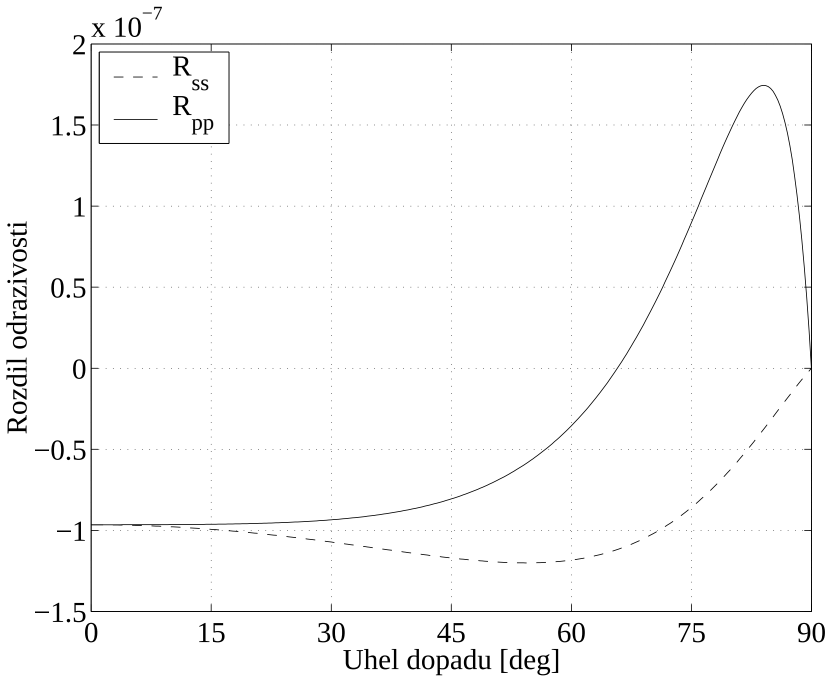


Obrázek 5.10: Rotace a elipticita pro s polarizaci, longitudinální konfigurace.

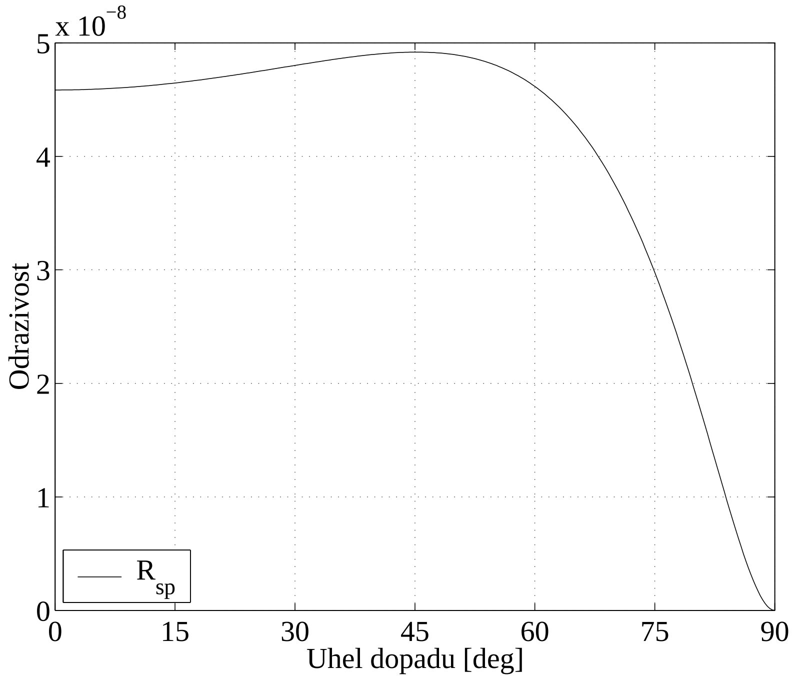
5.2.3 Polární konfigurace

Použijme opět všechny konstanty stejné až na nediagonální členy, které nyní charakterizujme hodnotami $Q_T = Q_L = 0, Q_P = 0.001$, což znamená použít tenzor relativní permitivity ve tvaru (4.8). Matice $\mathbb{M}$ má tvar shodný s (5.2), přičemž matice $\mathbb{D}^{(1)}$ je definována výrazem (4.21).

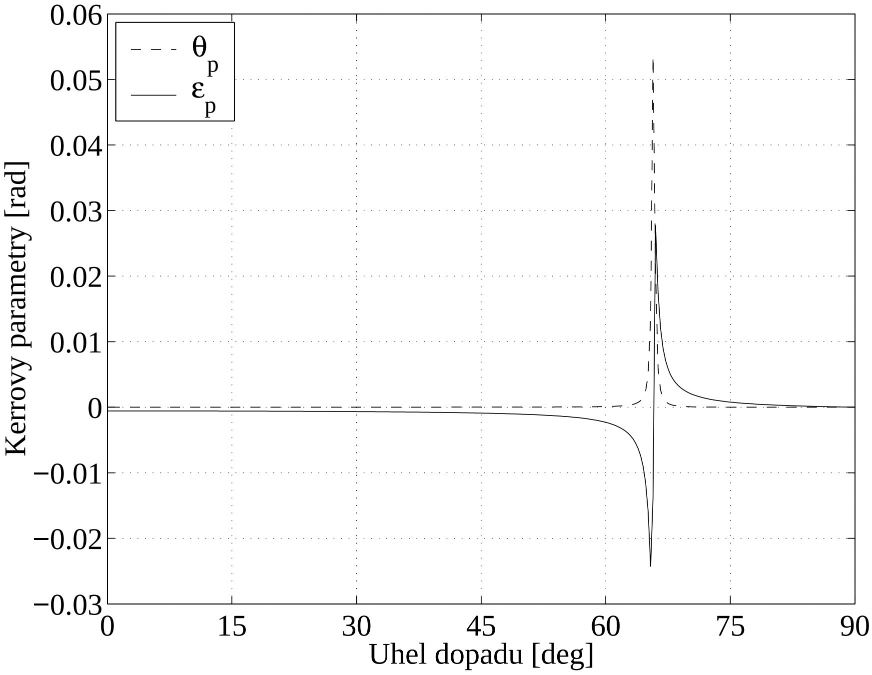
Na obrázku 5.11 můžeme vidět vliv lineárních členů polární konfigurace. Graf je zajímavý tvarem křivky parametru R_{pp}. Nejvyšší hodnoty má pro úhly vyšší než pseudo-Brewsterův úhel (úhel kdy je R_{pp} nejblíže nule, zavádíme ho i pro ztrátová prostředí), ovšem když se začneme blížit ke klouzavému dopadu, opět klesá k nule. Rozdíly oproti izotropnímu případu jsou velmi malé, podobně jako v případě longitudinální konfigurace. Odrazivost R_{sp} je rovna R_{ps}, což je stejné jako longitudinálního případu. Ukážeme si některé rysy, které jsou pro polární a longitudinální konfiguraci společné, nebo v kterých se liší. Na grafu R_{sp} (obr. 5.12) je vidět, že odrazivost je mnohem vyšší než v longitudinálním případě. Navíc není R_{sp} pro polární konfiguraci při kolmém dopadu nulová. Můžeme si všimnout, že hodnoty prakticky všech parametrů jsou ze všech předchozích konfigurací největší. Snad nejvýrazněji je to vidět na grafu 5.13(a), kde dosahují hodnoty rotace téměř 60 mrad a hodnoty elipticity téměř 30 mrad.



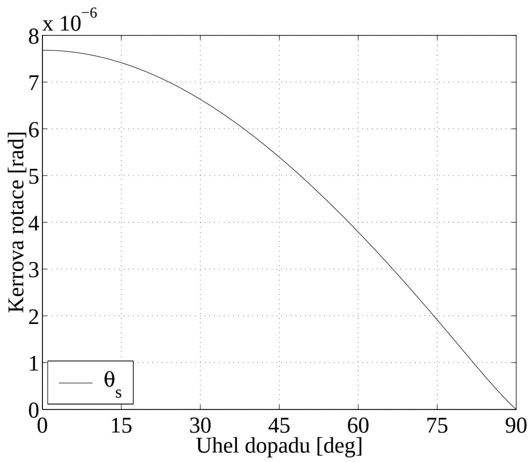
Obrázek 5.11: Rozdíly v odrazivosti mezi polární a izotropní konfigurací.



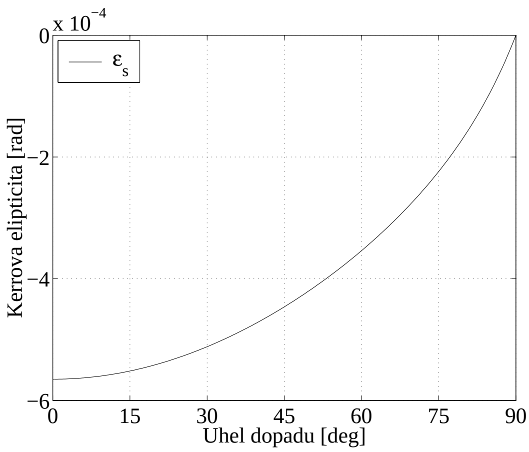
Obrázek 5.12: Odrazivost při polární konfiguraci ($R_{sp} = R_{ps}$).



(a) rotace a elipticita, p polarizace



(b) rotace, s polarizace



(c) elipticita, s polarizace

Obrázek 5.13: Rotace a elipticita pro polární konfiguraci.

5.3 Kvadratické jevy

Ačkoliv se zdá, že předchozí kapitola vystihuje podstatu všech významných jevů, není to tak docela pravda. Problémy nastanou, pokud se pokusíme pracovat s prostředím, ve kterém vynutíme vnějším polem směr magnetizace takový, že nebude odpovídat žádné ze speciálních konfigurací. V takovém případě dojde k míchání jevů speciálních konfigurací a navíc se přidají složky odpovídající kvadrátům složek vektoru magnetizace. Situaci nastíní výraz vyjadřující obecný tvar relativní permitivity prostředí (4.7) (v aproximaci do druhého řádu vzhledem k magnetizaci), kdy vztah k vektoru magnetizace naznačují výrazy (4.5) a (4.6). Snadno nahlédneme, že diagonální členy tenzoru permitivity se zvětší o kvadráty složek vektoru magnetizace přenásobené kvadratickou magneto-optickou konstantou f. Tyto členy jak se později ukáže nebudou příliš významné, neboť pouze zvětší velikost některých počítaných parametrů. Významnější ovšem budou vlivy míchání různých složek vektoru magnetizace (či přeneseně složek vektoru $\boldsymbol{Q} = [Q_T, Q_L, Q_P]^T$).

V této práci se budeme soustředit pouze na jevy, ve kterých je alespoň jedna složka vektoru magnetizaci (čili i $\boldsymbol{Q}$) nulová. Navíc budeme upřednostňovat LT jevy ($\boldsymbol{Q} = [Q^T, Q^L, 0]^T$) kvůli experimentálnímu uspořádaní, neboť pozice magnetu dovoluje ovlivňovat pole (a tedy i magnetizaci) pouze v rovině vrstvy. Jelikož jsou všechny analytické vyjádření kvadratických jevů příliš složité (výjimkou jsou akorát speciální úhly dopadu - např. kolmý dopad, kdy $N_y = 0$), tak zde již většinou nebudou vůbec uvedeny.

5.3.1 Čisté kvadratické konfigurace

Zvolme nyní jiný materiál, který by vykazoval větší magneto-optickou odezvu. Jelikož čím je větší ztrátová (komplexní) složka diagonálních (nejvýznamnějších) členů tenzoru permitivity, tím je odrazivost nižší, ovšem hodnoty elipsometrických parametrů θ a ϵ rostou. V této podkapitole zvolíme takové parametry, abychom dosáhli vyšších hodnot elipsometrických (Kerrových) parametrů. Budeme uvažovat rozhraní vzduch-železo, kde parametry železa uvažujeme následující: $N = 2.87 - i3.46$, $Q = 0.0386 + i0.0034$, $f = 0.54 - i0.568$.

Ukažme si nejprve jak velký je vliv kvadratických členů na počítané parametry. Pro transverzální kvadratický případ má tenzor relativní permitivity tvar

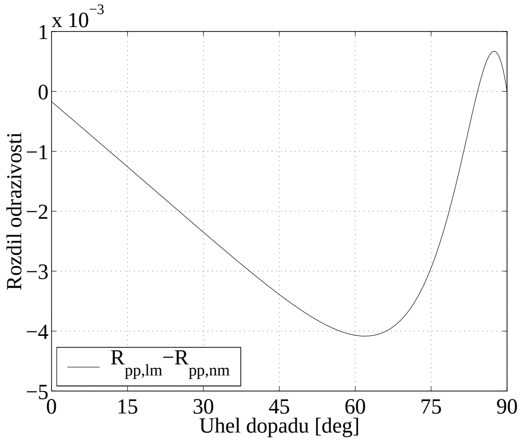
$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + fQ_T^2 & -iQ_T \\ 0 & iQ_T & 1 + fQ_T^2 \end{bmatrix}.$$

Dá se ukázat, že charakter tohoto případu je velmi podobný čistě lineárnímu případu, tedy že matice přechodu $\mathbb{M}$ je diagonální. Odrazivost R_{ss} je stejná jako pro izotropní případ, $R_{sp} = R_{ps} = 0$. Vlivy na koeficient R_{pp} můžeme vidět na obrázcích 5.14(a) (lineární) a 5.14(b) (kvadratický). Na obrázcích je zřejmé, že čistě kvadratický vliv je mnohem menší, v tomto případě o řád nižší, oproti lineárnímu vlivu.

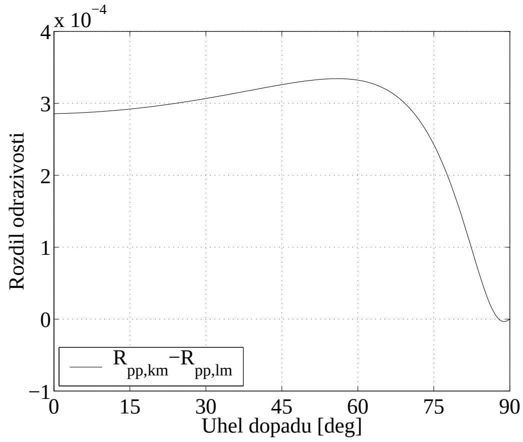
Ukažme si jak vypadají parametry při longitudinální konfiguraci. Tenzor relativní permitivity použijeme ve tvaru

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 + fQ_L^2 & 0 & iQ_L \\ 0 & 1 & 0 \\ -iQ_L & 0 & 1 + fQ_L^2 \end{bmatrix}.$$

Na odrazivostech R_{ss}, R_{pp} můžeme vidět docela zajímavý jev. Když si pořádně prohlédneme obrázek 5.15, zjistíme, že zatímco lineární vliv snižuje hodnoty odrazivostí vůči případu bez



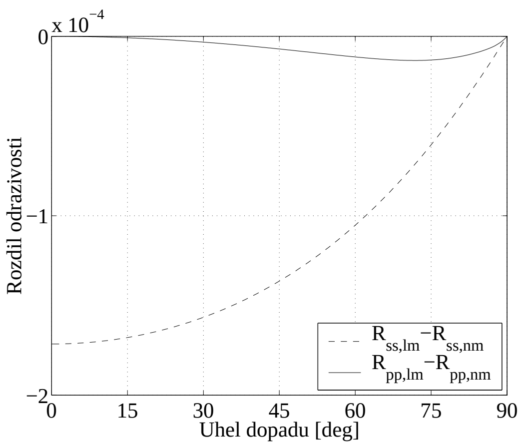
(a) lineární vliv



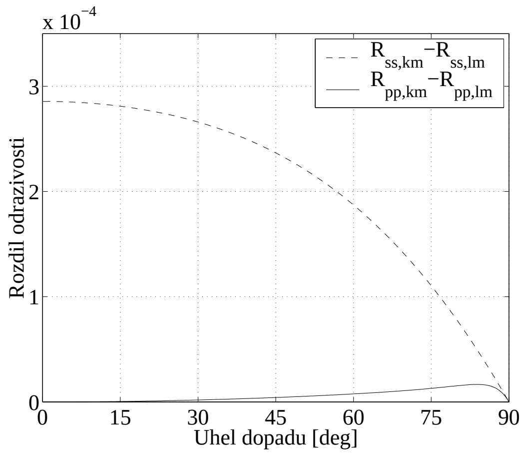
(b) kvadratický vliv

Obrázek 5.14: Vlivy transverzální konfigurace na odrazivost (p-polarizace).

magnetizace, tak současná přítomnost lineárních a kvadratických členů odrazivost zvyšuje. To znamená, že při zanedbání kvadratického příspěvku, se v tomto případě dopustíme značné chyby při určování vlivu na hodnoty odrazivosti. Z hlediska elipsometrických parametrů ro-



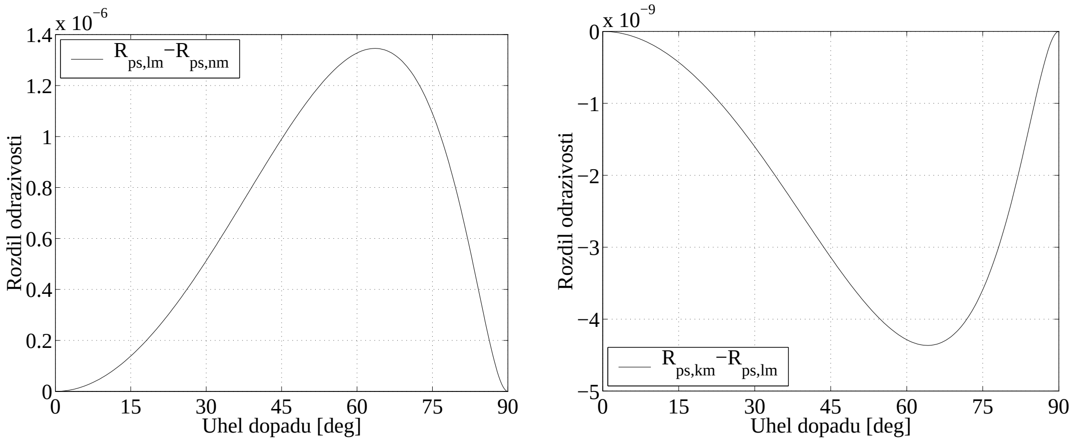
(a) lineární vliv



(b) kvadratický vliv

Obrázek 5.15: Vlivy longitudinální konfigurace na odrazivost R_{ss}, R_{pp}.

tace a elipticity nás budou zajímat především odrazivosti R_{ps}, R_{sp}. Ty můžeme shlédnout na obrázku 5.16, kde je zřejmé, že vliv kvadratických členů tenzoru permitivity je minimální, neboť je o tři řády nižší než vliv členů lineárních. To zřejmě bude mít vliv i na velikosti elipsometrických (Kerrových) parametrů. Obrázek 5.17 potvrzuje, že je tomu opravdu tak. Zatímco hodnoty Kerrových parametrů jak pro s-polarizaci, tak i pro p-polarizaci jsou řádově v miliradiánech až radiánech, tak hodnoty ovlivněné kvadratickými členy v tenzoru permitivity

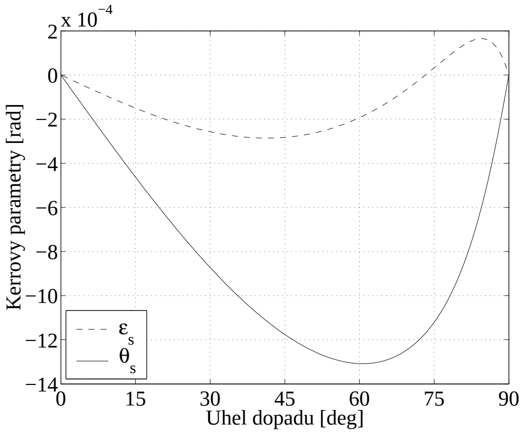


(a) lineární vliv (b) kvadratický vliv

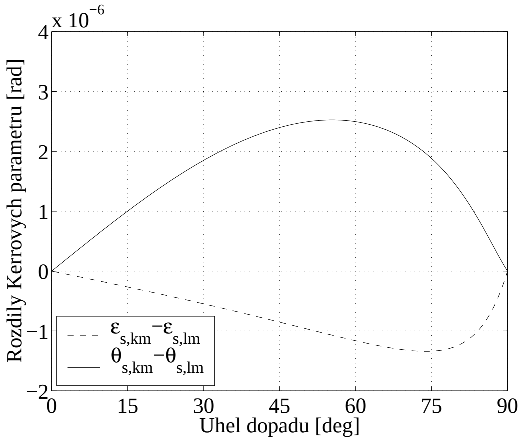
Obrázek 5.16: Vlivy longitudinální konfigurace na odrazivost R_{ps} ($R_{sp} = R_{ps}$).

jsou alespoň o dva řády nižší.

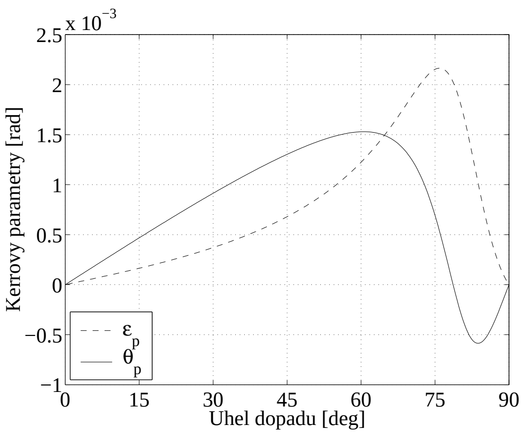
Shrneme si nyní výsledky uvedené v této podkapitole. Z výpočtů (přesněji z grafů), které zde jsou uvedeny, jasně vyplývá, že vliv kvadratických členů pro konfigurace, kdy je vektor magnetizace rovnoběžný s jednou z os, je malý, většinou dokonce zanedbatelně malý. Jedinou výjimku tvoří odrazivosti R_{ss} a R_{pp}, kde byl vliv značný (někdy dokonce větší než v čistě lineárních případech), ovšem tyto parametry nebývá zvykem měřit. V případě Kerrových parametrů rotace a elipticity (které naopak měříme často) je vliv prakticky zanedbatelný. Dokonce jsme zde ukázali, že pokud použijeme obecnější tvar tenzoru relativní permitivity, vliv na transverzální konfiguraci není v praktických případech žádný.



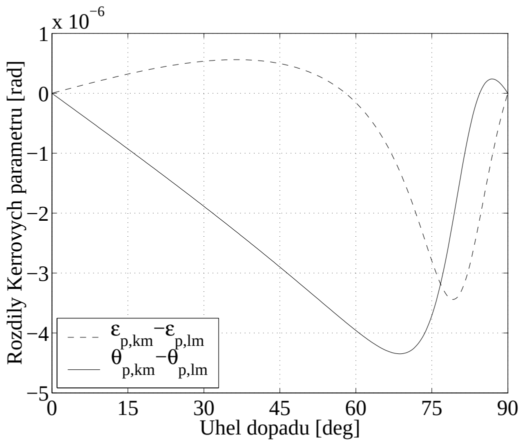
(a) lineární vliv, s polarizace



(b) kvadratický vliv, s polarizace



(c) lineární vliv, p polarizace



(d) kvadratický vliv, p polarizace

Obrázek 5.17: Lineární a kvadratický příspěvek ke Kerrovým parametrům pro longitudinální geometrii.

5.3.2 Kombinované kvadratické jevy

Nyní si ukážeme, proč lze mluvit o lineárních jevech pouze v případě, kdy je vektor magnetizace rovnoběžný s některou z os. Ukážeme si, že současná přítomnost lineárních členů tenzoru permitivity (4.7) má nezanedbatelný vliv na zkoumané parametry. Budeme zkoumat případ, kdy vektor magnetizace leží v rovině vrstvy. Uvažujme tedy rozhraní dvou prostředí, kdy jedno je vzduch a druhé má anizotropii vynucenou vnějším magnetickým polem v rovině vrstvy. V tenzoru relativní permitivity zahrneme pouze lineární členy. Kvadratické členy zatím zanedbáme. Dosáhneme tak tenzoru relativní permitivity ve tvaru

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & iQ_L \\ 0 & 1 & -iQ_T \\ -iQ_L & iQ_T & 1 \end{bmatrix}.$$

Předpokládejme navíc, že se jedná o kolmý dopad, tedy $N_y = 0$. Normálové složky vektoru indexu lomu (či normovaného vlnového vektoru) získáme jako řešení rovnice $\det \mathbb{A} = 0$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - N_z^2 & 0 & iQ_L\epsilon_1 \\ 0 & \epsilon_1 - N_z^2 & -iQ_T\epsilon_1 \\ -iQ_L\epsilon_1 & iQ_T\epsilon_1 & \epsilon_1 \end{bmatrix}.$$

Rovnice se dá upravit na tvar

$$\epsilon_1 \left(\epsilon_1 - N_z^2\right) \left(\epsilon_1 - N_z^2 - \epsilon_1 Q_L^2 - \epsilon_1 Q_T^2\right) = 0,$$

což znamená, že normálové složky vlnového vektoru jsou dány výrazy

$$\begin{aligned} N_{z1,2} &= \pm\sqrt{\epsilon_1}, \\ N_{z3,4} &= \pm\sqrt{\epsilon_1}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2}. \end{aligned}$$

Inverzi matice tečných složek $\left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1}$ pro vzduch vezmeme stejnou jako ve výraze (5.3) ($\phi_0 = 0$), tedy

$$\left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} = \frac{1}{2N^{(0)}} \begin{bmatrix} N^{(0)} & 1 & 0 & 0 \\ N^{(0)} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & -1 \\ 0 & 0 & N^{(0)} & 1 \end{bmatrix}$$

Matice tečných složek $\mathbb{D}^{(1)}$ určená za pomocí předchozích hodnot je definovaná výrazem (za předpokladu $Q_T \neq 0$, $Q_L \neq 0$)

$$\mathbb{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{\epsilon_1} & -\sqrt{\epsilon_1} & \sqrt{\epsilon_1}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} & -\sqrt{\epsilon_1}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} \\ \frac{Q_L}{Q_T} & \frac{Q_L}{Q_T} & -\frac{Q_T}{Q_L} & -\frac{Q_T}{Q_L} \\ -\frac{Q_L}{Q_T}\sqrt{\epsilon_1} & \frac{Q_L}{Q_T}\sqrt{\epsilon_1} & \frac{Q_T}{Q_L}\sqrt{\epsilon_1}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} & -\frac{Q_T}{Q_L}\sqrt{\epsilon_1}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} \end{bmatrix}.$$

Matici přechodu $\mathbb{M}$ získáme jako součin dynamických matic (resp. jejich inverzí)

$$\mathbb{M} = \left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(1)},$$

přičemž jednotlivé členy M_{ij} jsou dány výrazy:

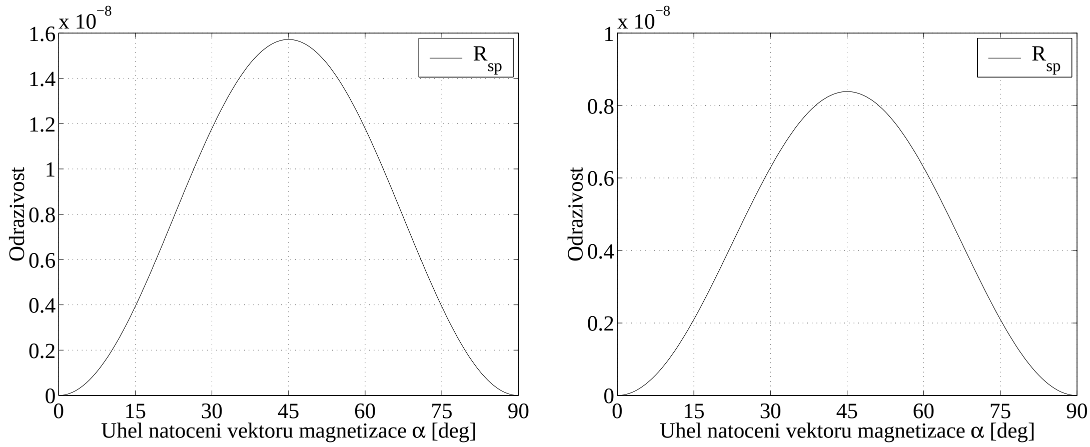
$$\begin{aligned}
M_{11} = M_{22} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}} \\
M_{12} = M_{21} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}} \\
M_{13} = M_{24} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} \\
M_{14} = M_{23} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} \\
M_{31} = M_{42} &= \frac{Q_L}{2Q_T} + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}}\frac{Q_L}{Q_T} \\
M_{32} = M_{41} &= \frac{Q_L}{2Q_T} - \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}}\frac{Q_L}{Q_T} \\
M_{33} = M_{44} &= -\frac{Q_T}{2Q_L} - \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}}\frac{Q_T}{2Q_L}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} \\
M_{34} = M_{43} &= -\frac{Q_T}{2Q_L} + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2N^{(0)}}\frac{Q_T}{2Q_L}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2}
\end{aligned}$$

Vyjádříme si reflexní koeficient ve tvaru

$$r_{sp} = r_{ps} = \frac{2\frac{\sqrt{\epsilon_1}}{N^{(0)}}\left(\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2} - 1\right) Q_L Q_T}{\left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{N^{(0)}}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{N^{(0)}}\sqrt{1 - Q_T^2 - Q_L^2}\right)\left(Q_T^2 + Q_L^2\right)}.$$

Tento výraz byl odvozen za podmínek $Q_L \neq 0$, $Q_T \neq 0$, $N_y = 0$. Jelikož člen $Q_T^2 + Q_L^2$ je úměrný M, tak jediný člen, který vyjadřuje závislost na úhlu natočení vektoru magnetizace je výraz $Q_L Q_T$. Velikost odrazivosti R_{sp} můžeme vidět na obrázku 5.18 vlevo. Na stejném obrázku vpravo můžeme vidět tutéž odrazivost, ovšem tentokrát spočítanou s úplným tenzorem relativní permitivity. Hodnoty jsou o něco nižší. Přestože se jedná o kolmý dopad, tak jsme ukázali, že při natáčení vektoru magnetizace se hodnota odrazivosti R_{sp} mění. Ovšem dané odrazivosti jsou pro kolmý dopad při transverzální i longitudinální konfiguraci nulové. To potvrzuje myšlenku, že kombinace lineárních konfigurací nevykazuje kombinované vlastnosti jednotlivých konfigurací. Spíše by se dalo říci, že lineární konfigurace jsou singulárními případy jejich kombinace. Pokud bychom tedy předpokládali, že vliv kombinace jevů určíme tak, že jednotlivé jevy vynásobíme konstantou odpovídající projekci vektoru magnetizace do daného směru a sečteme, tak se dopouštíme chyby. U kolmého dopadu je to ihned zřejmé. Ukažme si ještě obdobnou chybu pro jiný úhel dopadu, řekněme $\pi/4$. Na obrázku 5.19 vlevo je ukázán rozdíl kombinovaného jevu vzhledem k předpokladu, že reflexní koeficient lze spočíst způsobem uvedeným výše. Zde je vidět že chyba místy odpovídá asi deseti procentům velikosti odrazivosti. Na stejném obrázku vpravo je korekce, kdy jsme uvažovali úplný tenzor relativní permitivity. Pokud jsme nyní uplatňovali stejně mylné předpoklady o skládání lineárních jevů na kvadratický případ, tak jsme se již tolik nevzdálili od přesného řešení. Ovšem tento postup není příliš korektní, neboť bychom měli uvážit také kvadratické vlivy speciálních konfigurací.

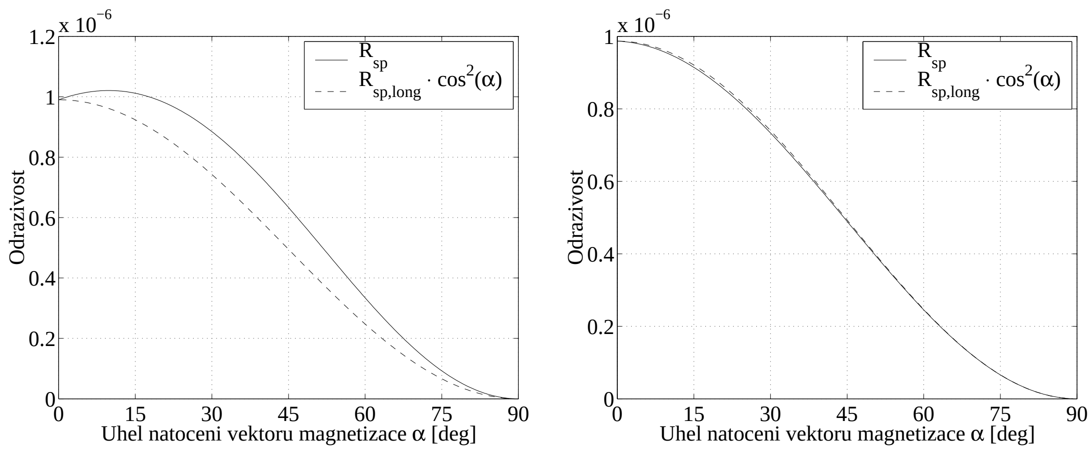
Pokud necháme pro změnu konstantní úhel vektoru magnetizace a budeme měnit úhel dopadu, dostaneme některé jevy, které již byly zmíněny dříve. Ponechme materiálové parametry jako v předchozím případě, ovšem vektor magnetizace otočme pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ vzhledem k ose x a y. To znamená, že vektor magneto-optických parametrů bude mít tvar $\boldsymbol{Q} =$



(a) tenzor $\boldsymbol{\epsilon}_r$ obsahuje pouze lineární členy

(b) kompletní tenzor $\boldsymbol{\epsilon}_r$

Obrázek 5.18: Odrazivost při kolmém dopadu v závislosti na úhlu natočení magnetizace (úhel 0 odpovídá longitudinální konfiguraci, $\pi/2$ pak transverzální konfiguraci).

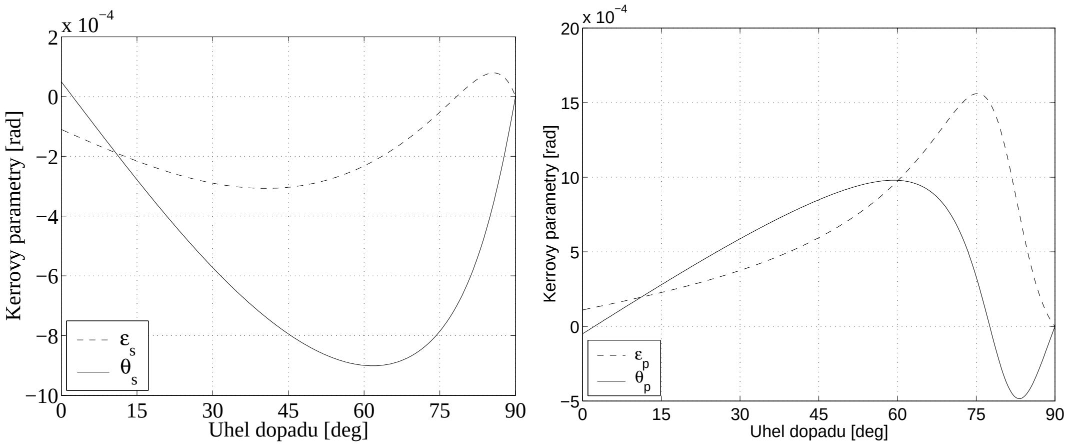


(a) tenzor $\boldsymbol{\epsilon}_r$ obsahuje pouze lineární členy

(b) kompletní tenzor $\boldsymbol{\epsilon}_r$

Obrázek 5.19: Odrazivost při úhlu dopadu $\pi/4$ v závislosti na úhlu natočení magnetizace, (0 odpovídá longitudinální konfiguraci, $\pi/2$ transverzální konfiguraci).

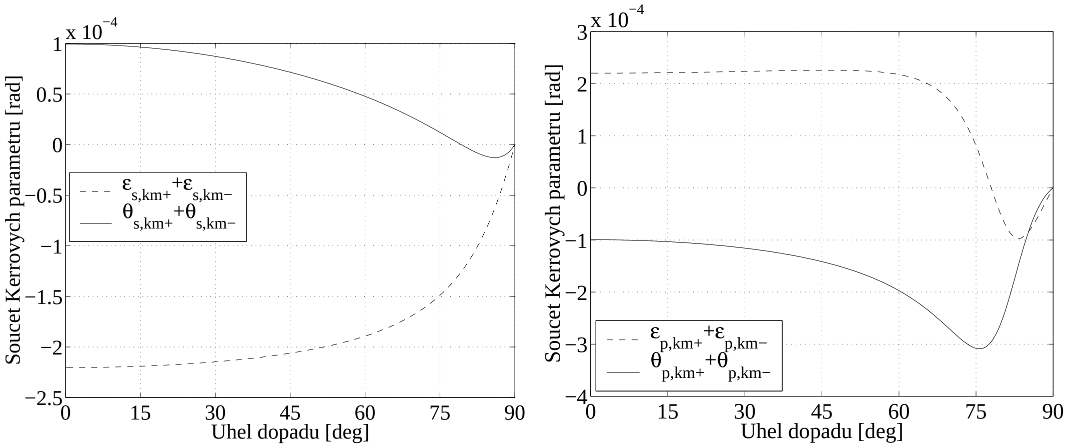
$[Q\cos\frac{\pi}{4}, Q\cos\frac{\pi}{4}, 0]^T$, $Q = 0.0386 + i0.0034$. V takovém případě bude Kerrova rotace a elipticita pro s- a p-polarizaci mít hodnoty jako na obrázku . Ihned si všimneme, že hodnoty



Obrázek 5.20: Kerrovy parametry pro s a p polarizaci v závislosti na úhlu dopadu, LT konfigurace, včetně kvadratických jevů.

těchto Kerrových parametrů nejsou nulové pro kolmý dopad což, jak jsme ukázali již dříve, je způsobeno míchání jevů a kvadratickými příspěvky.

Je známo, že pokud otočíme při speciálních (lineárních) konfiguracích vektor magnetizace o π, získáme stejné hodnoty Kerrových parametrů, ovšem pouze s obráceným znaménkem. Takto se dají alespoň přibližně měřit kvadratické jevy, neboť členy závislé na součinu dvou složek vektoru magnetizace (resp. vektoru $\boldsymbol{Q}$) nemění svou hodnotu. Takže sečteme-li hodnoty Kerrových parametrů pro obě pozice vektoru magnetizace, získáme prakticky téměř čisté kvadratické jevy, neboť lineární (převažující) členy se navzájem vyruší. Mnohem problematičtější je situace, pokud totéž zkusíme v případě, kdy vektor magnetizace leží v rovině vrstvy, ovšem není rovnoběžný s žádnou z os. Jak by to vypadalo je vidět na grafech v obrázku 5.21. Ovšem s interpretací těchto grafů je třeba být opatrný. Je dobré si uvědomit, že abychom



Obrázek 5.21: Součet Kerrových parametrů v závislosti na úhlu dopadu, magnetizace je pod úhlem $\pi/4$ a $5\pi/4$.

mohli pokládat tyto hodnoty za kvadratický příspěvek ke Kerrovým parametrům, je třeba splnit následující předpoklady:

- lineární jevy lze odseparovat z výsledných výrazů, a to takovým způsobem, že při přičtení k lineárním jevům s vektorem magnetizace otočeným o π dostaneme nulu
- zůstanou pouze členy, které odpovídají kvadratickým jevům

Přestože zní tyto podmínky velmi jednoduše, obecně je splnit nelze. Lze se jen pokusit o vhodné přiblížení, které by odpovídalo výsledkům experimentů. Ideální případ nastává, pokud by se nám podařilo v jednotlivých případech dosáhnout tvaru

$$P = k_1 Q_T + k_2 Q_L + k_3 Q_P + k_{12} Q_T Q_L + k_{13} Q_T Q_P + k_{23} Q_L Q_P + \ldots,$$

kde P je libovolný hledaný parametr a konstanty k_i, k_{ij} jsou nezávislé na složkách Q_i (zanedbali jsme mocniny vyšších řádů složek Q_i). Takto bychom mohli jednoznačně vyjádřit příspěvky jednotlivých členů odpovídajících lineární, čistě kvadratické, míchané, atd., konfiguraci. Obecně toho nelze dosáhnout, ale lze provést různá zjednodušení, kdy alespoň přibližně můžeme dosáhnout tohoto tvaru (viz práce [20]). Při těchto aproximacích lze často dosáhnout velmi dobré shody z experimentem (experimentální chyby bývají vyšší než zanedbávané hodnoty). Pokud přijmeme tuto aproximaci, tak splníme obě předchozí podmínky a můžeme tak relativně snadno měřit vlivy různých pozic vektoru magnetizace, kvadratické příspěvky. V takovém případě pak experimentálně vlastně jen hledáme hodnoty konstant k_i, k_{ij}, které můžeme s výhodou získat pomocí speciálních pozic vektoru magnetizace (využíváme také výše uvedené metody otáčení vektoru magnetizace o π).

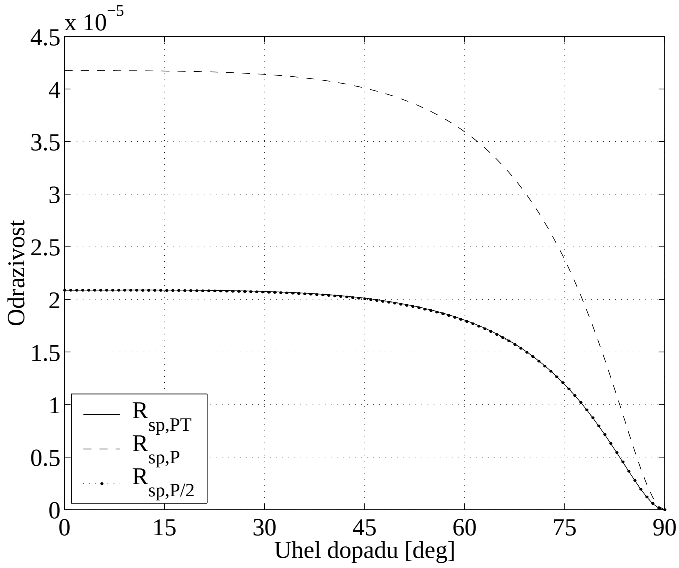
Přesnost této metody můžeme posoudit v následujících dvou případech, s tím rozdílem, že budeme počítat s nejobecnějším tvarem tenzoru permitivity (včetně všech kvadratických členů). Nejprve uvažujme případ, kdy vektor magnetizace leží v rovině xz a svírá s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$. Jde tedy o PT (polárně-transverzální) jevy. Na obrázku 5.22 můžeme vidět odrazivost R_{sp}. Graf funkce $R_{sp,PT}$ odpovídá vypočteným hodnotám, kdy je vektor magnetizace pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ vůči osám x, z. Graf $R_{sp,P}$ odpovídá situaci, kdy je vektor magnetizace rovnoběžný s osou z (polární konfigurace). Poslední funkce $R_{sp,P/2}$ odpovídá polovině $R_{sp,P}$. Graf ukazuje, že přibližně platí vztah

$$R_{sp,PT} \doteq R_{sp,P} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} R_{sp,P}.$$

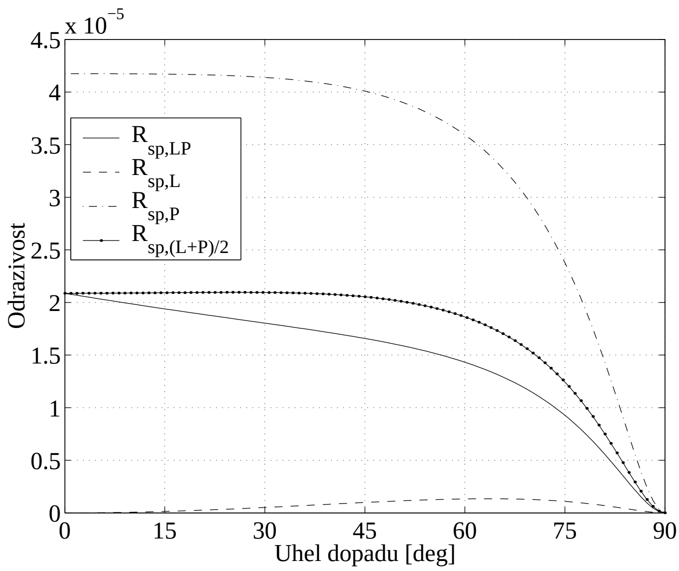
Tedy v případě PT konfigurace dosáhneme dobré shody s experimentem, pokud budeme uvažovat PT jevy jako polární jev násobený příslušným poměrem složek $M_P : M_T$. Víme, že vliv nediagonálních členů tenzoru permitivity (lineárních i kvadratických), je pro odrazivosti R_{ss}, R_{pp} velmi malý. Protože jsou Kerrovy parametry definovány výrazy (4.3), (5.6) a (5.7), tak budou při PT konfiguraci přibližně odpovídat polovině hodnot pro polární konfiguraci.

Předpokládejme, že vektor magnetizace leží v rovině yz a svírá s osami y, z úhel $\frac{\pi}{4}$ (LP konfigurace). Analýza odrazivosti R_{sp} ukazuje zajímavé skutečnosti (viz obr. 5.23). Na grafech v obrázku 5.23 můžeme vidět jak odrazivosti odpovídající jednotlivým jednoduchým konfiguracím L, P ($R_{sp,L}$, $R_{sp,P}$), tak i hodnoty pro smíšenou konfiguraci LP ($R_{sp,LP}$). Zde, narozdíl od předcházejícího případu, je přesnost odhadu odrazivosti smíšené konfigurace daná výrazem

$$R_{sp,LP} \doteq \frac{1}{2} \left(R_{sp,L} + R_{sp,P} \right) \tag{5.9}$$



Obrázek 5.22: Odrazivost R_{sp} v závislosti na úhlu dopadu, magnetizace je pod úhlem $\pi/4$ vůči osám x, z.



Obrázek 5.23: Odrazivost R_{sp} v závislosti na úhlu dopadu, magnetizace je pod úhlem $\pi/4$ vůči osám y, z.

daleko menší. Tento problém nesouvisí s menší přesností daného odhadu, ale nepřesným určením vztahu mezi odrazivostmi. Ve skutečnosti neplatí vztah (5.9), ale platí obdobný vztah mezi reflexními koeficienty:

$$r_{sp,LP} \doteq \frac{1}{2}\left(r_{sp,L} + r_{sp,P}\right) \tag{5.10}$$

Dalo by se ukázat, že pak je daný odhad stejně dobrý jako v předchozím případě. Znamená to tedy, že vztah (5.10) je obecnějším, neboť vztahy mezi odrazivostmi platily pouze v případě jevů smíšených s transverzální konfigurací, pro kterou je odrazivost $R_{sp} = R_{ps}$ nulová. Pro případy, kdy vektor magnetizace leží v rovině rovnoběžné se dvěma ze souřadných os, svírá s osou i úhel α a s osou j úhel $\pi/2 - \alpha$, $i \neq j$, můžeme psát

$$r_{sp,ij} = r_{ps,ij} \doteq r_{sp,i} \cos\alpha + r_{sp,j} \sin\alpha, \tag{5.11}$$

kde $r_{sp,i}$ (resp. $r_{sp,ij}$) odpovídají reflexním koeficientům v případech, kdy je vektor magnetizace rovnoběžný s osou i (resp. leží v rovině ij). Uvažujeme samozřejmě, že vektory magnetizace směřují kladným směrem os, jinak je třeba změnit znaménko úhlu α.

Ukazuje se, že výraz (5.11) velmi dobře aproximuje daný reflexní koeficient za předpokladu, že dominují lineární jevy. Přestože na uvedených obrázcích je vidět, že kvadratické jevy mohou kompenzovat rozdíl této aproximace od přesných hodnot, tak nelze tento závěr použít obecně. Velikost kvadratických jevů je závislá na velikost kvadratické magneto-optické konstanty f, takže pro určitá f může opravdu dojít k přiblížení k přesným výsledkům, ovšem pro jiné hodnoty se naopak vzdálíme. Navíc tato aproximace zřejmě nevyhovuje při kolmému dopadu, neboť pak lineární aproximace předpokládá nulovou hodnotu (což platí pouze pro speciální orientace vektoru magnetizace).

Kapitola 6

Hranolová vazba

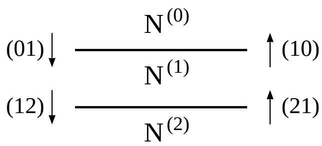
6.1 Vedené vlny

V předchozí kapitole jsme ukázali, jak vypadají výrazy popisující koeficienty reflexe a transmise na rozhraní dvou izotropních bezeztrátových prostředí (strana 24). Všimněme si, že pokud bude index lomu prostředí, z kterého dopadají vlny, menší než index lomu druhého prostředí, bude reflexní koeficient reálný. Ovšem my se nyní zaměříme na případ, kdy je tomu přesně naopak a vlny dopadají na rozhraní z poloprostoru s větším indexem lomu. Podíváme-li se na Snellův zákon (5.8), můžeme vidět, že sinus druhého úhlu (tedy ϕ_1) může nabývat hodnot větších než jedna (neboť $N^{(0)} > N^{(1)}$). To tedy znamená, že může nabývat komplexních hodnot. V takovém případě se vlna pouze odráží, ale neprochází rozhraním (odrazivost je maximální - rovna jedné), takže mluvíme o totálním (úplném) odrazu. Úhel dopadu, pro který platí

$$\sin \phi_0 = \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}},$$

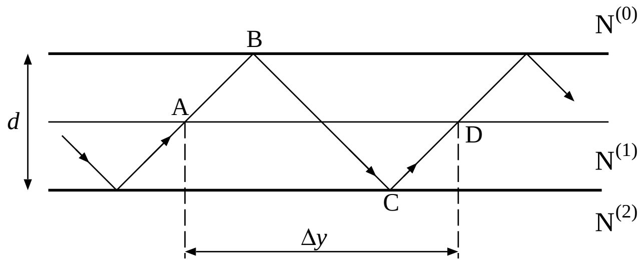
nazýváme kritickým úhlem, neboť pro každý větší úhel dopadu již dochází k totálnímu odrazu.

Uvažme nyní případ tří různých prostředí s reálnými indexy lomu jako na obrázku (6.1), pro které platí $N^{(1)} > N^{(2)} > N^{(0)}$. Souřadnicovou soustavu ponechme stejnou jako v předchozích případech, tedy dle obrázku 4.4. Je zřejmé, že bude docházet k totálnímu odrazu na



Obrázek 6.1: Vlnovodná struktura.

rozhraní (10) a (12), pokud bude vlna dopadat z prostředí s indexem lomu $N^{(1)}$ (prostřední vrstva). Pokud bude úhel dopadu větší než oba dva kritické úhly, tak se bude vlna odrážet od obou rozhraní. Jev, kdy se vlna díky totálnímu odrazu na obou rozhraních šíří prostředím, je nazýván vlnovedením. Aby docházelo k vlnovedení, je třeba ještě splnit fázovou podmínku. Ta odpovídá tomu, že se vlna šíří v rovině vrstvy se stejným příčným rozložením pole (existuje jednoznačná tečná složka vlnového vektoru). Fázová podmínka znamená, že v bodě A a D na obrázku 6.2 bude fáze, získaná šířením vlny v normálovém směru, rovna celočíselnému násobku 2π. Tuto podmínku lze zapsat ve tvaru



Obrázek 6.2: Podmínka šíření ve vlnovodné struktuře.

$$-2N_z^{(1)}d + \Phi_1 + \Phi_2 = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{N},$$

kde Φ_1, Φ_2 jsou fázové posuvy získané při odraze vlny v bodech B a C. Vlny splňující obě podmínky (totální odraz a fázovou podmínku) nazýváme vedenými vlnami nebo také módy.

V případech kdy vlnovodný materiál není izotropní a bezeztrátový nelze již podmínku vedených vln sestavit tak snadno. Ovšem lze použít obecnější podmínku. V předchozí kapitole byly definovány vztahy pro reflexní a transmisní koeficienty pomocí členů matice přechodu z výrazu (5.1). Všechny výrazy jsou uvedeny ve tvaru zlomku, který má ve všech případech stejného jmenovatele. Reflexní a transmisní koeficienty mají smysl pouze v případě, kdy je tento jmenovatel nenulový. Je-li nulový, tak se jedná právě o případ, kdy dochází k jevu nazývaném vlnovedení. Fyzikální spojitost této podmínky s existencí reflexních koeficientů je zřejmá, neboť dochází-li k vlnovedení, tak vlastně nedopadá na systém vrstev žádná vlna a ani žádná neprochází. A tedy pojem odrazivosti vlny nemá vůbec žádný smysl. Bohužel v případech, kdy je vlnovodný materiál ztrátový, tak dochází k totálnímu odrazu pouze u klouzavého dopadu. Tedy v těchto případech existuje vlastně jen jediné kritérium existence vedených vln a to můžeme vyjádřit ve shodě s (5.1) ve tvaru

$$M_{11}M_{33} - M_{13}M_{31} = 0. \tag{6.1}$$

V příkladu z obrázku 6.2 jsou všechna prostředí izotropní a bezeztrátová, takže je lze popsat blokově diagonálními maticemi

$$\mathbb{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix}, \mathbb{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \mathbb{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \mathbb{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix}.$$

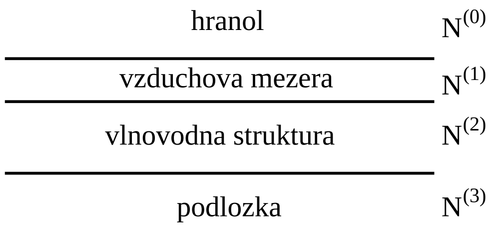
Matici přechodu získáme z výrazu

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \left(\mathbb{D}^{(0)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(1)}\mathbb{P}^{(1)} \left(\mathbb{D}^{(1)}\right)^{-1} \mathbb{D}^{(2)} = \\ &= \begin{bmatrix} a_0^{-1}a_1p_1a_1^{-1}a_2 & 0 \\ 0 & b_0^{-1}b_1p_1b_1^{-1}b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Konkrétní tvar matice $\boldsymbol{M}$ zde neuvedeme, neboť je zbytečně zdlouhavý. Nicméně již ze struktury matice $\boldsymbol{M}$ je zřejmé, že podmínka (6.1) přejde na jednodušší tvar $M_{11}M_{33} = 0$.

6.2 Vliv hranolové vazby

V předchozí kapitole jsme ukázali jaké vlastnosti musí mít vlna, která se může šířit vlnovodným materiálem. Ovšem bohužel není řečeno, jakým způsobem by se taková vlna měla do vlnovodné struktury dostat, neboť je zřejmé, že nemůže dopadat z poloprostoru nad vrstvou. Ukazuje se jako poměrně zajímavé zajistit šíření vlny v dané vrstvě pomocí dalšího prostředí, hranolu. Při totálním odrazu je propustnost na rozhraní nulová, ovšem to neznamená, že se do druhého prostředí nedostane vůbec žádná vlna. Dostane se tam (jako řešení Maxwellových rovnic) tzv. evanescentní vlna, tedy vlna jejíž amplituda exponenciálně klesá. Při tomto jevu lze využít dalšího prostředí tak, aby původně evanescentní vlna prošla do dalšího prostředí, kde se opět „stane reálnou vlnou“. Předpokládáme-li rozložení prostředí dle obrázku 6.3, s podmínkou $|N^{(0)}| > |N^{(2)}| > |N^{(3)}| > |N^{(1)}|$, můžeme snadno nahlédnout, že na rozhraní (01) dochází k totálnímu odrazu. Amplituda vlny šířící se prostředím (1) bude exponenciálně

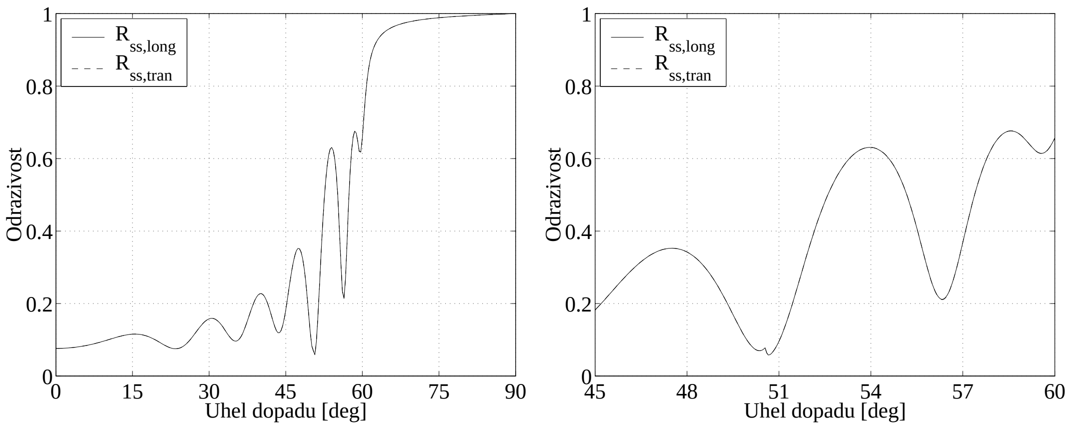


Obrázek 6.3: Hranolová vazba.

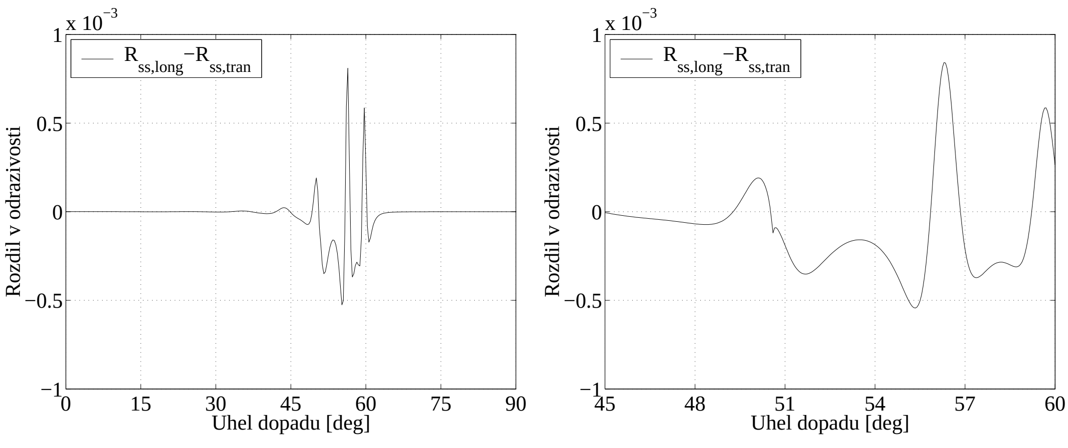
klesat, ovšem jenom do té doby, než dosáhne rozhraní (12). Je tedy důležité, aby vrstva (1) byla velmi tenká a nedošlo k příliš velkému poklesu amplitudy. Takto lze tedy „navázat“ vlnu pomocí hranolové vazby do vlnovodné struktury (2) z prostředí (0). Jak bude ukázáno později, lze i v takovém případě splnit podmínku vlnovedení (při splnění podmínky pro velikosti indexu lomu jednotlivých prostředí).

6.3 Analýza konkrétního případu

V této kapitole se nadále budeme zabývat příkladem z obrázku 6.3, kde konkrétně se bude jednat o tři izotropní bezeztrátové prostředí a vlnovodnou vrstvu. Prostředí (0) bude hranol (BiGe) s indexem lomu $N^{(0)} = 2.5435$, vrstvu (1) bude tvořit vzduchová mezera široká 30 nm s indexem lomu $N^{(1)} = 1$ a podložka (3) bude materiál s indexem lomu $N^{(3)} = 1.9650$. Vlnovodná struktura (2) bude tvořena magnetickým granátem v longitudinální nebo transverzální konfiguraci s parametry $\epsilon_0 = (2.22 - i0.02)^2$, $Q_T = 10^{-3}$ a $Q_L = 10^{-3}$. Šířka této vrstvy je 1000 nm, přičemž vlnová délka dopadajícího světla bude 632.8 nm. Na obrázku 6.4 můžeme vidět hodnoty odrazivosti pro TE polarizovanou dopadající vlnu, zajímavá oblast grafu byla vykreslena zvlášť. Na tomto obrázku jsou vidět celkem tři vedené módy, které odpovídají pozicím lokálních minim odrazivosti. První minimum zprava v izotropním případě odpovídá módu TE_0, úhel dopadu je roven 59.543°. Efektivním indexem lomu nazýváme tečnou složku normovaného vlnového vektoru (vektoru indexu lomu), čili v případě TE_0 je to 2.1925. Druhým minimem je reprezentován mód TE_1 s úhlem dopadu 56.286° a efektivním indexem lomu 2.1157. Třetí minimum (mód TE_2) nastává při úhlu dopadu 50.800°, s efektivním indexem lomu 1.9711. Těsně vedle této hodnoty je další minimum při úhlu dopadu 50.584°. Efektivní index lomu tohoto minima je 1.9650, což je současně index lomu podložky. Tedy toto minimum je spjato s limitní podmínkou pro totální odraz. Vliv anizotropie ve vlnovodné vrstvě je velmi malý, pro ilustraci uveďme hodnoty 56.328° pro TE_1 a 50.664° pro TE_2, při longitudinální orientaci vektoru magnetizace. Vlivy anizotropie na odrazivosti lze vidět na obrázcích 6.5 a 6.7. Na obrázku 6.6 můžeme jasně vidět, že minima jsou pro různé polarizace různé. Současně

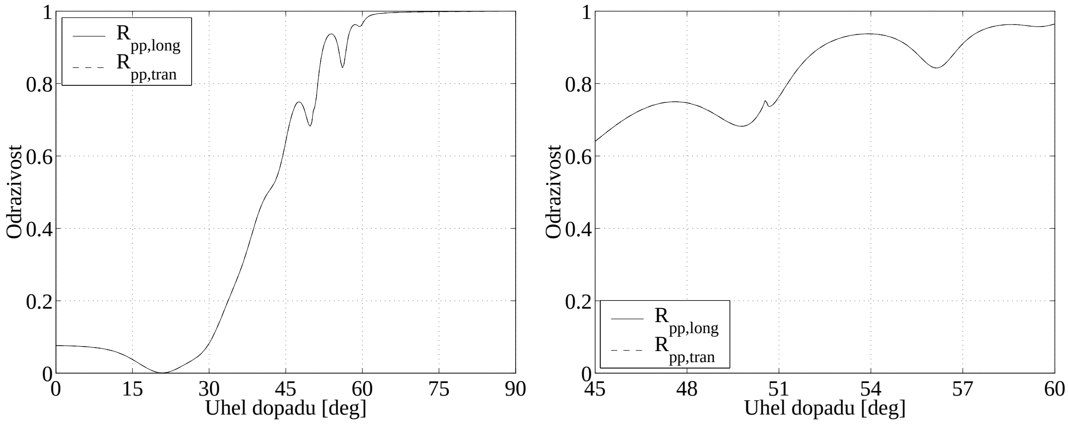


Obrázek 6.4: Odrazivost R_{ss} na hranolové vazbě v závislosti na úhlu dopadu a její detail.

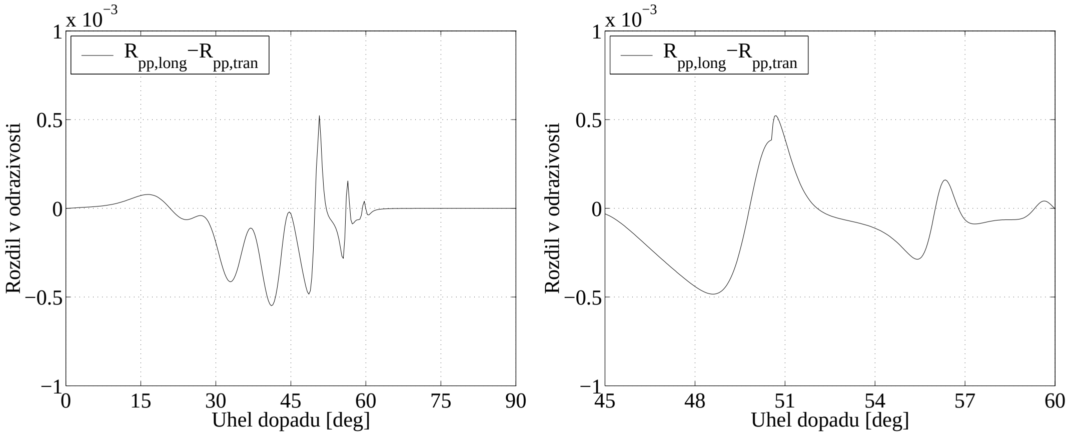


Obrázek 6.5: Rozdíl odrazivostí R_{ss} na spodním okraji hranolu mezi longitudinální a transverzální konfigurací, včetně detailu.

na obrázku 6.6 nalezneme nejvýznamnější minima při úhlech dopadu 56.067° a 51.392° při transverzální konfiguraci s efektivními hodnotami indexu lomu 2.1103 a 1.9876. Při longitudinální konfiguraci je první z těchto minim posunuto k úhlu dopadu 56.733, což znamená vyšší rozdíl oproti TE módům. Posunutí minim při natáčení vektoru magnetizace lze odhadnou



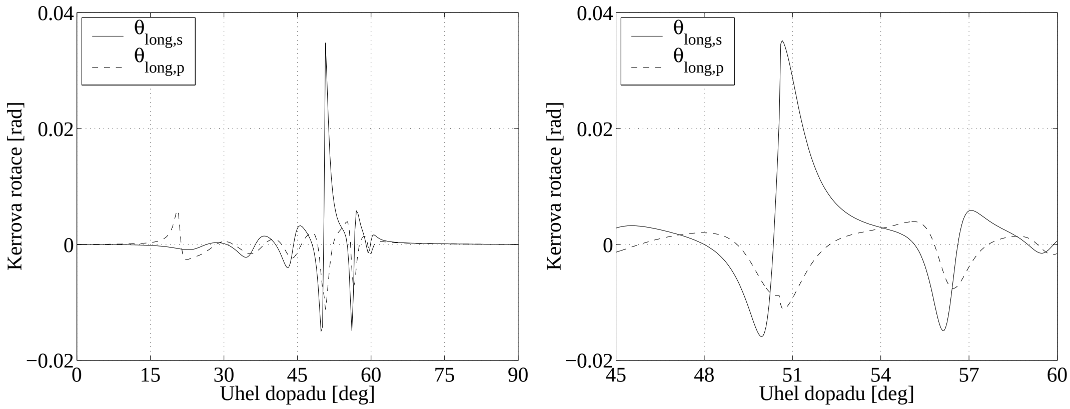
Obrázek 6.6: Odrazivost R_{pp} na hranolové vazbě v závislosti na úhlu dopadu a její detail.



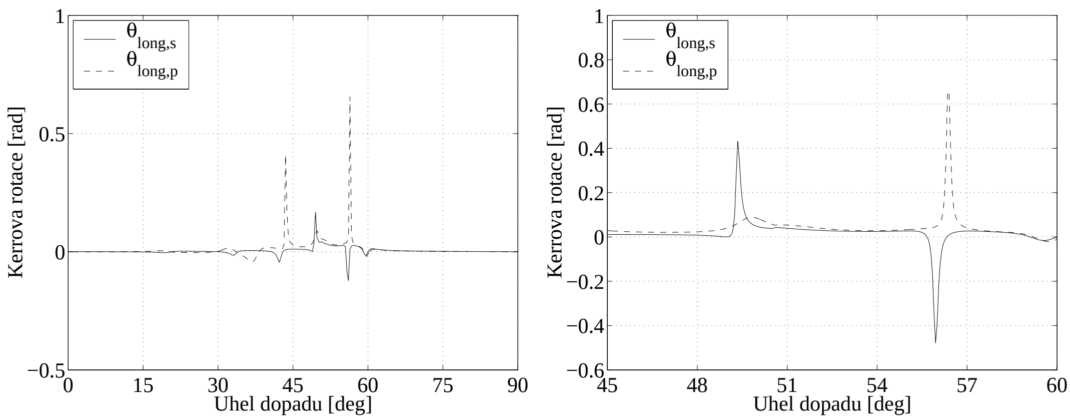
Obrázek 6.7: Rozdíl v odrazivosti R_{pp} na hranolové vazbě mezi longitudinální a transverzální konfigurací, včetně detailu.

podle obrázku 6.7. Počet extrémů odrazivosti je dán především šířkou vlnovodné vrstvy. Čím je tato vrstva širší, tím více módů lze pro danou konfiguraci nalézt. Ukažme si nyní, jaký vliv má šířka vazební (vzduchové) mezery na polarizační stav odraženého světla. Pro šířku 30 nm je Kerrova rotace pro s a p polarizaci na obrázku 6.8. Na detailu jsou jasně vidět extrémy, které odpovídají maximální změně polarizace vlny při longitudinální konfiguraci. Na obrázku 6.9 jsou vidět extrémy při šířce vzduchové mezery pouhý 1 nm, to tedy znamená nižší odrazivost, která je ovlivněna větším tunelovým efektem. Zde jasně můžeme vidět vliv šířky vrstvy vzduchu na jevy spjaté s vedenými vlnami. Mnohem ostřejší extrémy znamenají mnohem přesnější možnost nastavit požadovaný úhel dopadu. Naopak u odrazivosti větší šířka vzduchové mezery znamená lepší lokalizaci (zostření) extrémů.

V této chvíli je funkce vzduchové mezery v hranolové vazbě zřejmá. Umožňuje navázání světla do vrstvy tunelováním přes vazební štěrbinu a zároveň ovlivňuje lepší lokalizaci extrémů různých parametrů, které mají přímou souvislost s vlnovodnými jevy.



Obrázek 6.8: Závislost rotace na úhlu dopadu, šířka vzduchové mezery je 30 nm.



Obrázek 6.9: Závislost rotace na úhlu dopadu, šířka vzduchové mezery je 1 nm.

Kapitola 7

Hlavní dosažené výsledky

- Analýza Yehova a Berremanova přístupu pro specifikaci šíření elektromagnetických vln v anizotropních prostředích.
- Určení vlivu obecného směru vektoru magnetizace na odrazivost prostředí.
- Specifikace působení kvadratických magneto-optických členů na šíření vln v médiích s indukovanou anizotropií.
- Definování úlohy pro určení tloušťky vazebního gapu (vzduch) v hranolové vazbě aplikované na magneto-optické vlnovody.

Kapitola 8

Publikace diplomanta

- M. Foldyna, „Modelování magnetooptických jevů v tenkých planárních strukturách“, *Sborník Moderní matematické metody v inženýrství* **10**, Ostrava, 2001, str. 61.
- J. Pištora, M. Foldyna, T. Yamaguchi, J. Vlček, D. Ciprian, K. Postava, F. Staněk, „Magneto-Optical Phenomena in Systems with Prism Coupling“, *Photonics 2002 Conference (SPIE Proceedings)*, Prague, May 26-29, 2002 (v tisku).
- J. Pištora, T. Yamaguchi, J. Vlček, M. Foldyna, I. Vávra, „The ellipsometry of lamellar gratings“, *XIII-th Polish-Czech-Slovak Optical Conference (Optica Applicata)*, Krzyzova, 2002 (v tisku).
- J. Pištora, T. Yamaguchi, K. Postava, M. Foldyna, M. Lesňák, „Magnetic sensor with prism coupler“, *Eurosensors 2002 Conference (Sensors and Actuators)*, Prague, September 15-18, 2002 (v tisku).
- K. Postava, J. Pištora, T. Yamaguchi, M. Foldyna, M. Lesňák, „Magneto-optic vector magnetometry for sensors applications“, *Eurosensors 2002 Conference (Sensors and Actuators)*, Prague, September 15-18, 2002 (v tisku).
- K. Postava, O. Životský, M. Foldyna, T. Yamaguchi, J. Pištora, „Magneto-optics of systems containing non-coherent propagation in thick layers“, *Photonics 2002 Conference (SPIE Proceedings)*, Prague, May 26-29, 2002 (v tisku).

Kapitola 9

Závěr

Práce byla věnována modelování magneto-optických jevů v tenkých planárních strukturách s anizotropií indukovanou vnějším magnetickým polem. Analyzoval jsem vliv lineárních a kvadratických magneto-optických (MO) členů na MO jevy. Speciálně byly definovány lineární konfigurace a příspěvky odpovídajících členů k velikostem MO jevů. Ukázal jsem, že jednoduché smíchání lineárních jevů nelze již považovat za lineární konfiguraci, neboť se při ní projevují také kvadratické jevy.

Podrobná analýza ukázala, že kvadratické jevy lze většinou zanedbat, ovšem poukázal jsem také na některé případy, kdy je zanedbat nelze. Ukázal jsem hrubé odhady MO parametrů pro kombinované jevy pomocí jevů lineárních, navíc jsem naznačil jakých chyb se při tomto přiblížení dopouštíme. Vyšetřoval jsem změnu MO parametrů při natáčení vektoru magnetizace v rovině vrstvy, přičemž úhel dopadu zůstával stejný. Speciálně byl vyšetřován kolmý dopad, při kterém odhad pomocí kombinace lineárních jevů evidentně selhává.

Aplikoval jsem teorii optiky tenkých planárních struktur na hranolovou vazbu a určil vliv vzduchové mezery (gapu) na vlastnosti MO parametrů. Konkrétně byl ukázán vliv na Kerrovy parametry, kde šířka gapu výrazně ovlivňuje ostrost extrémů těchto parametrů. Nalezl jsem hodnoty úhlů dopadu (včetně efektivních indexů lomu), pro které dochází ve vlnovodné vrstvě k vlnovedení.

Uvedené výsledky byly získány pomocí pomocí Yehova a Berremanova formalismu s kompaktním zápisem hraničních podmínek pomocí maticového formalismu. Analytické výrazy jsem získal přímou aplikací Yehova postupu. Veškeré vypočtené grafy (s výjimkou izotropního případu) byly získány užitím Berremanova postupu a řešením problému hledání vlastních čísel a vektorů matice.

Programy byly napsány v prostředí programu Matlab s tím, že výsledných grafů jsem dosáhl cyklickým opakováním výpočetní části programu pro všechny potřebné hodnoty nezávislé proměnné. Hodnoty efektivních indexů lomu při vlnovedení byly získány přepisem výpočetní části programu na vektorovou funkci, s jejíž pomocí jsem za asistence optimalizačních nástrojů programu Matlab nalezl požadované hodnoty. Diplomová práce byla napsána pomocí systému LaTeX v prostředí operačního systému Debian GNU/Linux. K vývoji programů schopných generovat potřebné grafické výsledky byl použit softwarový balík Matlab 6.0 se zavedenou optimalizační knihovnou.

Literatura

[1] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1980.

[2] M. Mansuripur, *The physical principles of magneto-optical recording*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[3] P. Yeh, „Optics of Anisotropic Layered Media: A New 4x4 Matrix Algebra“, *Surf. Sci.* **96**, str. 41–53, 1979.

[4] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, John Willey & Sons, 1988.

[5] K. Postava, J. Pištora, Š. Višňovský, „Magneto-optical Effects in Ultrathin Structures at Transversal Magnetization“, *Czech. J. Phys.* **49**, str. 1185–1204, 1999.

[6] D. Ciprian, and J. Pištora, „Magneto-optic periodic strip structures“, *Acta Ph. Pol.* **99**, str. 33–46, 2001.

[7] J. Pištora, R. Kantor, N. Negre, K. Postava, R. Anýžová, J. Seidl, „Analysis of polarized light in multilayers“, *SPIE* vol. 3094.

[8] P. Yeh, „Transmission Spectrum of a Solo Filter“, *Opt. Comm.* **29**, str. 1–6, 1978.

[9] A. Cho, J.B. Shellan, W. Ng, P. Yeh„ and A. Yariv „Transverse Bragg-reflector injection lasers“, *Opt. Lett.* **2**, str. 136–138, 1978.

[10] W. Ng, P. Yeh, P.C. Chen, and A. Yariv „Optical surface waves in periodic layered medium grown by liquid phase epitaxy“, *Appl. Phys. Lett.* **32**, str. 370–371, 1978.

[11] A.Y. Cho, Pochi Yeh, and Amnon Yariv „Optical surface waves in periodic layered media“, *Appl. Phys. Lett.* **32**, str. 104–105, 1978.

[12] A.Y. Cho, A. Yariv, and P. Yeh „Observation of confined propagation in Bragg waveguides“, *Appl. Phys. Lett.* **30**, str. 471–472, 1977.

[13] Pochi Yeh and Amnon Yariv „Bragg reflection waveguides“, *Opt. Comm.* **19**, str. 427–430, 1976.

[14] Dwight W. Berreman, „Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation“, *J. Opt. Soc. Am.* **62**, str. 502–5120, 1971.

[15] Š. Višňovský, „Optics of Magnetic Multiplayers“, *Czech. J. Phys.* **41**, str. 663–694, 1991.

[16] Š. Višňovský, „Magneto-Optical Transverse Kerr Effect in a Film-Substrate System“, *Czech. J. Phys.* **B 36**, str. 1203–1208, 1986.

[17] Š. Višňovský, „Magneto-optic effects in ultrathin structures at longitudinal and polar magnetizations“, *Czech. J. Phys.* **B 36**, str. 834–847, 1986.

[18] Š. Višňovský, „Magneto-optical Ellipsometry“, *Czech. J. Phys.* **B 36**, str. 625–650, 1986.

[19] Š. Višňovský, „Magneto-optical permittivity tensor in crystals“, *Czech. J. Phys.* **B 36**, str. 1424–1433, 1986.

[20] K. Postava, *Light propagation in magneto-optical multilayers. Magnetization behavior.*, Doctoral thesis, 1997.

[21] R.M.A. Azzam, M.B Bashara, *Ellipsometry and polarized light*, Amsterdam, 1977.

[22] M. Nývlt, *Optical interactions in ultrathin magnetic film structures*, Thesis, Charles university, Prague, 1996.

[23] P. K. Tien, and R. Ulrich, „Theory of Prism-Film Coupler and Thin-Film Light Guides“, *J. Opt. Soc.* **60**, str. 1325–1337, 1970.

[24] R. Ulrich, „Theory of Prism-Film Coupler by Plane-Wave Analysis“, *J. Opt. Soc.* **60**, str. 1337–1350, 1970.

[25] H. Kitajima, and K. Hano, „Anomalies of electromagnetic waves in multilayered structures containing anisotropy“, *J. Opt. Soc. Am.* **68**, str. 1693–1701, 1977.

[26] J. Pištora, D. Ciprian, R. Kantor, K. Postava, J. Sobota, „Dark mode spectroscopy of magnetic thin films“, *JMMM* **157/158**, 1996.

[27] K. Watanabe, R. Petit, M. Nevière, and K. Yasumoto, „Differential Theory of Grating Made of Anisotropic Materials“, *J. Opt. Soc. Am.* **A 19**, str. 325–334, 2002.

[28] E. Popov and M. Nevière, „Grating theory: new equations in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization“, *J. Opt. Soc. Am.* **A 17**, str. 1773–1784, 2000.

[29] E. Popov, M. Nevière, Jérôme, „Maxwell equations in Fourier space: fast converging formulation for diffraction by arbitrary shaped, periodic, anisotropic media“, *J. Opt. Soc. Am.* **A 18**, str. 2886–2894, 2001.

[30] B. Chernov, M. Nevière, E. Popov, „Fast Fourier factorization method applied to modal analysis of slanted lamellar diffraction gratings in conical mountings“, *Opt. Comm.* **194**, str. 289–297, 2001.

[31] K. Rokushima and Jiro Yamakita, „Analysis of anisotropic dielectric grating“, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, str. 901–908, 1983.

[32] Lifeng Li, „Bremmer series, R-matrix propagation algorithm, and numerical modeling of diffraction gratings“, *J. Opt. Soc. Am.* **11**, str. 2829–2836, 1994.

[33] Lifeng Li, „Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures“, *J. Opt. Soc. Am.* **13**, str. 1870–1876, 1996.

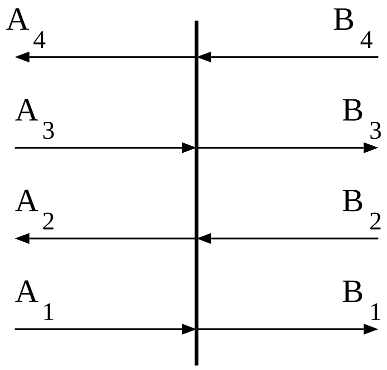
[34] Lifeng Li, „Formulation and comparison of two recursive matrix algorithm for modeling layered diffraction gratings“ *J. Opt. Soc. Am.* **13**, str. 1024–1035, 1996.

[35] R. H. Morf, „Exponentially convergent and numerically efficient solution of Maxwell's equations for lamellar gratings“, *J. Opt. Soc. Am.* **12**, 1995.

Příloha A

Alternativní odvození vztahu mezi amplitudami vln

V této příloze si ukážeme alternativu k odvození vztahu (5.1). Při odvozování tohoto vztahu jsme přikročili k výpočtu pomocí základních veličin pole a materiálových parametrů. Nyní si ukážeme alternativní odvození, které využívá pouze znalosti reflexních a transmisních koeficientů, šířky vrstev a vlastních hodnot normálových složek normovaného vlnového vektoru. Na



Obrázek A.1: Rozhraní dvou prostředí.

obrázku A.1 můžeme vidět, jak to vypadá na rozhraní dvou prostředí. Písmena označují amplitudy odpovídajících vln, jejichž směr šíření naznačuje šipka. Vycházíme z toho, že můžeme mezi vlnami na rozhraní (obrázek A.1) vytvořit následující relace:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 t_{11} + A_3 t_{31} + B_2 r_{21} + B_4 r_{41} \\ B_3 &= A_1 t_{13} + A_3 t_{33} + B_2 r_{23} + B_4 r_{43} \\ A_2 &= A_1 r_{12} + A_3 r_{32} + B_2 t_{22} + B_4 t_{42} \\ A_4 &= A_1 r_{14} + A_3 r_{34} + B_2 t_{24} + B_4 t_{44} \end{aligned}$$

Tyto čtyři rovnice o osmi neznámých popisují vlastnosti pole na daném rozhraní dvou prostředí. Vyjádříme-li si čtyři amplitudy v jednom prostředí pomocí těch, z druhého prostředí, získáme tak výraz

$$\boldsymbol{A} = \mathbb{X}\boldsymbol{B}. \tag{A.1}$$

Matice $\mathbb{X}$ reprezentuje matici přechodu mezi vektory amplitud v daných dvou prostředí $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{A} = [A_1, A_2, A_3, A_4]^T$, $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2, B_3, B_4]^T$. Tato vazební matice není nepodobná matici přechodu v případě jednoduchého rozhraní dvou prostředí. Použijeme-li stejný způsob odvození jako na straně 19, získáme výraz, který popisuje vztah prakticky totožný s (5.1):

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = \mathbb{X}^{(0)} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\mathbb{P}^{(j)}\mathbb{X}^{(j)}\right) \boldsymbol{A}^{(N)} = \mathbb{M}\boldsymbol{A}^{(N)}$$

Matice $\boldsymbol{P}$ jsou propagační matice v dané vrstvě, $\boldsymbol{A}^{(j)}$ je vektor amplitud v j-tém prostředí, $\mathbb{X}^{(j)}$ je vazební matice z výrazu (A.1) v j-tém prostředí. Tímto způsobem jsme schopni získat naprosto shodné výsledky jako v předchozích kapitolách. Abychom mohli strukturu plně popsat potřebujeme tedy všechny reflexní a transmisní koeficienty, šířky vrstev a konstanty šíření. Představme si nyní takovou situaci, že máme systém složený z vrstvy a dvou poloprostorů (obdobně jako na obrázku 6.1) a známe všechny reflexní a transmisní koeficienty na rozhraní, neboť jsme je například určili z měření. Pak známe-li šířku naší vrstvy, tak jsme schopni dopočítat konstanty šíření v této vrstvě za předpokladu, že změříme reflexní a transmisní koeficienty celého systému.

Tedy jednou z možných aplikací tohoto postupu je například určení konstant šíření pro materiály, které jsou pro nás relativně neznámé, ale které jsme například schopni dobře změřit pomocí optických měření. Podobně pokud bychom využili měření pouze na rozhraní takovýchto materiálů, mohli bychom určit některé vlastnosti parametrů materiálu (tenzoru permitivity).