Obsah

Zn	ačení	3
Ú٧	vod	4
K	apitola I - Řešení stavového problému	5
1	Zadání úlohy	5
2	Metoda fiktivních oblastí	5
3	Varianty metody fiktivních oblastí založené na dualitě3.1BLM-technika3.2DLM-technika	6 6 10
4	Konkrétní realizace řešení stavové úlohy	11
5	Numerické příklady 5.1 Vyhodnocení výsledků numerických příkladů	14 17
K	apitola II - Tvarová optimalizace	20
6	Zadání úlohy	20
7	Klasický přístup k úlohám tvarové optimalizace	20
8	Metoda fiktivních oblastí v tvarové optimalizaci	22
9	Algoritmy globální optimalizace9.1Formulace optimalizační úlohy9.2Genetic Algorithm - GA9.3Breeder Genetic Algorithm - BGA9.4Modified Controlled Random Search Algorithm - MCRS9.5Obecné srovnání zmiňovaných algoritmů	24 24 25 26 28 30
10	Realizace optimalizačního procesu	31
11	Numerické příklady 11.1 Porovnání zmiňovaných algoritmů globální optimalizace prostřed-	32
_	nictvím dosažených výsledků	36
Zá	věr	40
Re	eference	41

Výsledky numerických	příkladů ke kapitole I	43
Výsledky numerických	příkladů ke kapitole II	66

Značení

\mathbb{R}^2	$\mathbb{R}\times\mathbb{R},$ kde \mathbb{R} je množina všech reálných čísel
${f Nech t}^{f \prime} \ \omega \subset \mathbb{R}^2 {f je} {f ob}$	last s Lipschitzovskou hranicí, pak označíme:
$\partial \omega$	hranice oblasti ω
$\overline{\omega}$	uzávěr oblasti ω
$ \omega $	míra oblasti ω
$u\left _{\omega} ight.$	zúžení funkce u na oblast ω
$L^2(\omega)$	prostor měřitelných funkcí na ω lebes gueovsky integrovatelných s kvadrátem
$\ \cdot\ _{L^2(\omega)}$	norma v prostoru $L^2(\omega)^{-1}$
$(.,.)_{0,\omega}$	skalární součin funkcí z $L^2(\omega)$ (nebo $(L^2(\omega))^2)^{-1}$
$H^k(\omega)$ (k je celé,	prostor funkcí, jež jsou společně se svými
nezáporné číslo)	zobecněnými derivacemi až do řádu k integro- vatelné s kvadrátem, t.j. jsou prvky $L^2(\omega)$.
$H^1_0(\omega)$	podprostor funkcí z $H^1(\omega)$ s nulovou stopou na $\partial \omega$
$\ .\ _{H^{1}(\omega)} \ (\equiv \ .\ _{1,\omega})$	norma v prostoru $H^1(\omega)$, kde
	$\ u\ _{H^{1}(\omega)} = \sqrt{\ u\ _{L^{2}(\omega)}^{2}} + \ \nabla u \ _{L^{2}(\omega)}^{2} $
Užité zkratky:	
BLM	metoda hraničních Lagrangeových multiplikátorů (boundary Lagrange multiplier method)
CG	metoda sdružených gradientů
	(conjugate gradient method)
DLM	metoda distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů (distributed Lagrange multiplier method)
LBB podmínka	Ladyženská-Babuška-Brezzi podmínka
MFO	metoda fiktivních oblastí
MFO řešiče	řešiče užívající k numerické realizaci stavového problému metodu fiktivních oblastí
o.p.	okrajové podmínky

¹Pokud zde vystupuje funkce definovaná na oblasti $\Omega,$ rozumíme zde její zúžení na $\omega\subset\Omega,$ i když ho neznačíme.

Úvod

Cílem této práce byla praktická realizace několika variant metody fiktivních oblastí založených na dualitě a použitých k řešení úloh tvarové optimalizace.

Klasický přístup k řešení úloh tvarové optimalizace je založen na principu postupné deformace hranice oblasti, přičemž v každém kroku musíme znovu zkonstruovat dělení dané oblasti pro MKP, přepočítat matici tuhosti a vektor pravých stran a teprve poté můžeme vyřešit příslušnou soustavu rovnic.

Je zřejmé, že výše uvedený postup je neefektivní. Jednou z možných cest, jak zvýšit efektivnost, je užití metody fiktivních oblastí. Její princip spočívá v záměně dané úlohy na oblasti se složitou geometrií (ω) za problém formulovaný na oblasti s pravidelnou geometrií (Ω) (např. obdélník, kvádr) obsahující původní oblast a jež je s původní úlohou nějakým způsobem svázán. A sice jeho řešení zúžené na původní oblast je řešením původní úlohy, přičemž informace o geometrii původní oblasti v našem případě bude "zakódována" pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

Výhody tohoto postupu jsou zřejmé: pro řešení okrajových úloh na oblastech jako jsou obdélníky, kvádry ap., je možno použít speciální dělení a výslednou soustavu rovnic řešit pomocí nějaké rychlé iterační metody. Další výhodou je nezávislost triangulace oblasti Ω na tvaru oblasti ω , z čehož vyplývá, že není nutno v každém kroku přepočítávat matici tuhosti.

Stavovou úlohou v našem případě bude eliptická úloha 2. řádu s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. V první kapitole se budeme zabývat pouze řešením této stavové úlohy s využitím metody fiktivních oblastí, zatímco druhá kapitola již bude věnována vlastní tvarové optimalizaci.

Z teoretických úvah se ukázalo, že výsledná úloha matematického programování je nehladká a minimizovaná funkce je často téměř nespojitá. Z tohoto důvodu je nutné užít algoritmy globální optimalizace jako jsou GA (Genetic Algorithm), BGA (Breeder Genetic Algorithm), SA (Simulated Annealing), CRS (Controlled Random Search) ap. Popis a srovnání zmiňovaných optimalizačních algoritmů vyjma SA můžeme nalézt ve druhé kapitole, části 9–11.

Užití metody fiktivních oblastí v rámci úloh tvarové optimalizace bylo teoreticky studováno v pracech J. Haslingera, K. H. Hoffmanna, M. Kočvary, A. Klarbringa aj. Tato problematika stojí v popředí zájmu řady zahraničních pracovišť jako jsou Houston, Graz, Lyon atd. Praktické zkušenosti s touto metodou jsou prozatím malé, výzkum je teprve na začátku. Tato práce a na ni navazující dizertační práce by měly pomoci k systematickému studiu této problematiky.

Kapitola I - Řešení stavového problému

1 Zadání úlohy

Nechť ω je oblast s Lipschitzovskou hranic
í $\partial \omega$. Na této oblasti uvažujme následující eliptickou okrajovou úlohu:

$$(\mathcal{P}) \qquad \qquad \begin{cases} A u(\omega) = f \quad \mathbf{v} \quad \omega, \\ + \mathbf{o}.\mathbf{p}. \qquad \mathbf{na} \quad \partial \omega, \end{cases}$$

kde A je eliptický operátor 2. řádu, $u(\omega)$ je řešení (\mathcal{P}) a $f \in L^2(\omega)$. Naším cílem bude numericky řešit úlohu (\mathcal{P}) užitím metody fiktivních oblastí.

2 Metoda fiktivních oblastí

Základní myšlenkou metody fiktivních oblastí je vnořit oblast se složitou geometrií ω do oblasti s pravidelnou geometrií $\Omega \equiv \Xi \cup \overline{\omega}$ (viz. obr. 1) a úlohu (\mathcal{P})



Obrázek 1: Vnoření oblasti ω do Ω .

nahradit za úlohu $(\hat{\mathcal{P}})$ vypadající následovně:

$$(\hat{\mathcal{P}}) \qquad \qquad \begin{cases} \hat{A}\,\hat{u} = \hat{f} \quad \mathbf{v} \quad \Omega, \\ + \,\mathbf{o}. \,\mathbf{p}. \quad \mathbf{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

kde \hat{A} je opět eliptický operátor 2. řádu podobného typu jako A, \hat{u} je řešení $(\hat{\mathcal{P}})$ a $\hat{f} \in L^2(\Omega)$ je vhodné rozšíření f z oblasti ω na Ω . Nová úloha $(\hat{\mathcal{P}})$ přitom musí být zvolena tak, aby zúžení $\hat{u}|_{\omega}$ bylo řešením (\mathcal{P}) . Důvod, proč to děláme, je snadno vidět: úlohu $(\hat{\mathcal{P}})$ je možné řešit rychlými řešiči, jež využívají toho, že oblast Ω má jednoduchou geometrii a můžeme jí tedy vhodně rozdělit na konečné elementy.

V následující části uvedeme dvě varianty metody fiktivních oblastí založené na dualitě. Pro lepší popis jednotlivých variant se omezíme na homogenní Dirichletův problém v rovině:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u(\omega) = f \quad \mathbf{v} \quad \omega \subseteq \mathbb{R}^2, \\ u(\omega) = 0 \quad \mathrm{na} \quad \partial \omega \end{cases}$$

nebo ve slabé formulaci

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } u(\omega) \in H_0^1(\omega) \text{ takové, že} \\ (\nabla u(\omega), \nabla \varphi)_{0,\omega} = (f, \varphi)_{0,\omega} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

kde $f \in L^2(\omega)$.

3 Varianty metody fiktivních oblastí založené na dualitě

V této části uvádíme dvě varianty metody fiktivních oblastí založené na dualitě. První z nich užívá Lagrangeovy multiplikátory definované na hranici oblasti ω (BLM-technika) a druhá je založena na distribuovaných Lagrangeových multiplikátorech definovaných v $\Xi \equiv \Omega \setminus \overline{\omega}$ (DLM-technika).

3.1 BLM-technika

Nechť $\Omega \supset \overline{\omega}$ je obdélníková oblast, $V(\omega) = H_0^1(\omega)$ a $V(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Dále definujme prostor $V_0(\omega, \Omega)$ následovně:

$$V_0(\omega, \Omega) = \{ v \in V(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \partial \omega \}.$$

Je snadno vidět, že úloha

$$(\hat{\mathcal{P}})' \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \hat{u} \in V_0(\omega, \Omega) \text{ takové, že} \\ (\nabla \hat{u}, \nabla \varphi)_{0,\Omega} = (\tilde{f}, \varphi)_{0,\Omega} \quad \forall \varphi \in V_0(\omega, \Omega), \end{cases}$$

kde $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ je vhodné rozšíření f z oblasti ω na Ω , má jediné řešení \hat{u} , přičemž $\hat{u}|_{\omega}$ řeší původní homogenní Dirichletovu úlohu (\mathcal{P}).

Na podmínku v = 0 na $\partial \omega$ můžeme pohlížet jako na omezení, které budeme v dalším zpracovávat pomocí Lagrangeových multiplikátorů definovaných na $\partial \omega$. Označme $\Lambda(\partial \omega) \equiv H^{-1/2}(\partial \omega)$ jako prostor, jež je duální k prostoru $H^{1/2}(\partial \omega)$ definovaného následovně:

$$H^{1/2}(\partial \omega) = \{ \varphi \colon \quad \partial \omega \mapsto \mathbb{R}^1 \mid \exists v \in H^1(\omega) \colon v = \varphi \text{ na } \partial \omega \}.$$

Ekvivalentní vyjádření k $(\hat{\mathcal{P}})'$ využívající Lagrangeových multiplikátorů je

$$(\hat{\mathcal{P}}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } (\hat{u}, \lambda) \in V(\Omega) \times \Lambda(\partial \omega) \text{ takové, že} \\ (\nabla \hat{u}, \nabla \varphi)_{0,\Omega} = (\tilde{f}, \varphi)_{0,\Omega} + <\lambda, \varphi >_{\partial \omega} \\ \forall \varphi \in V(\Omega), \\ <\mu, \hat{u} >_{\partial \omega} = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda(\partial \omega), \end{cases}$$

kde
 < , $>_{\partial\omega}$ označuje dualitu mezi $\Lambda(\partial\omega)$
a $H^{1/2}(\partial\omega).$ Je jednoduché ukázat platnost následující věty:

Věta 3.1 Úloha ($\hat{\mathcal{P}}$) má jediné řešení (\hat{u}, λ), přičemž $\hat{u} \mid_{\omega}$ řeší (\mathcal{P}) a $\lambda = \left\lfloor \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \right\rfloor$ je skok normálové derivace \hat{u} na $\partial \omega$.

Důkaz možno nalézt v [Haslinger, Klarbring, 1995]. Tuto variantu metody fiktivních oblastí dále označujeme jako BLM var. I.

Poznámka 3.1 Jestliže položíme f = 0 vně oblasti ω , t.j.

$$\tilde{f} = \left\langle \begin{array}{ccc} f & \mathbf{v} & \boldsymbol{\omega} \\ \\ 0 & \mathbf{v} & \boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Omega} \setminus \boldsymbol{\overline{\omega}} \end{array} \right.$$

potom $\hat{u}|_{\Xi} \equiv 0$ a $\lambda = \frac{\partial}{\partial \nu} (\hat{u}|_{\omega})$ (viz. [Peichl, Kunisch, 1995]).

Variantu metody fiktivních oblastí s tímto výběrem \tilde{f} budeme v dalším značit jako BLM var. II.

Nyní popíšeme aproximaci úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$ pomocí metody konečných prvků. Nechť $\{\hat{\mathcal{T}}_h\}, h \to 0+$ je regulární systém triangulací na oblasti $\overline{\Omega}$. Každému $\hat{\mathcal{T}}_h$ přiřadíme prostor \hat{V}_h všech po částech lineárních funkcí nad $\hat{\mathcal{T}}_h$ a nulových na $\partial\Omega$:

$$\hat{V}_h = \{ v_h \in C(\overline{\Omega}) \mid v_h \mid_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \hat{\mathcal{T}}_h, \quad v_h = 0 \text{ na } \partial\Omega \}.$$

Symbolem ω_H označme polygonální aproximaci oblasti ω s hranicí

$$\partial \omega_H = \bigcup_{i=1}^{M(H)} \overline{A_i A_{i+1}}, \quad (A_{M(H)+1} \equiv A_1),$$



Obrázek 2: Příklad oblasti s po částech polygonální hranicí.

přičemž délka libovolné strany $|\overline{A_iA_{i+1}}|$ je menší nebo rovna H > 0. Pro lepší představu viz. obr. 2.

Definujme prostor Λ_H po částech konstantních funkcí definovaných na $\partial \omega_H$:

$$\Lambda_H = \{ \mu_H \in L^2(\partial \omega_H) \mid \mu_H \mid_{\overline{A_i A_{i+1}}} \in P_0(\overline{A_i A_{i+1}}) \\ \forall i = 1, \dots, M(H) \}$$

Dále předpokládejme, že

$$h \to 0 + \Leftrightarrow H \to 0 + .$$

Aproximace úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$ je definovaná následovně:

$$(\hat{\mathcal{P}})_{h}^{H} \qquad \begin{cases} \text{Najdi } (\hat{u}_{h}, \lambda_{H}) \in \hat{V}_{h} \times \Lambda_{H} \text{ takové, že} \\\\ \int_{\Omega} \operatorname{grad} \hat{u}_{h} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{h} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \varphi_{h} \, dx + \int_{\partial \omega_{H}} \lambda_{H} \varphi_{h} \, ds \\\\ \forall \varphi_{h} \in \hat{V}_{h}, \\\\ \int_{\partial \omega_{H}} \hat{u}_{h} \mu_{H} \, ds = 0 \quad \forall \mu_{H} \in \Lambda_{H}, \end{cases}$$

přičemž úloha $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$ odpovídá tzv. smíšené metodě konečných prvků, kdy jedním prostorem aproximujeme primární veličinu \hat{u}_h a druhým pak veličinu duální λ_H . Potom můžeme dokázat (viz. [Haslinger, Klarbring, 1995] a [Haslinger, Neittaanmäki, 1996])

Věta 3.2 Nechť je splněna následující podmínka stability:

(3.1)
$$\int_{\partial \omega_H} v_h \mu_H \, ds = 0 \quad \forall v_h \in \hat{V}_h \implies \mu_H = 0 \ na \ \partial \omega_H.$$

Potom $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$ má jediné řešení (\hat{u}_h, λ_H) a navíc pro $h, H \to 0 + konverguje \hat{u}_h \to \hat{u}$ v $H_0^1(\Omega)$, přičemž \hat{u} je řešení úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$.

Poznámka 3.2 Postačující podmínka platnosti (3.1) je, že poměr H/h je dostatečně velký, t.j. dělení $\hat{\mathcal{T}}_h$ definující \hat{V}_h je jemnější než dělení užité ke konstrukci Λ_H . V případě, že poměr H/h je větší nebo roven 3, pak je splněna nejen podmínka (3.1), ale i tzv. Ladyženská-Babuška-Brezzi (LBB) podmínka (viz [Girault, Glowinski, 1995]):

(3.2)
$$\inf_{\Lambda_H(\partial\omega_H)} \sup_{Vh(\omega)} \frac{(\mu_H, v_h)_{0,\partial\omega_H}}{\|\mu_H\|_{-1/2,\partial\omega_H} \|v_h\|_{1,\omega}} \ge \beta,$$

kde $\beta > 0$ nezávisí na h, H > 0 a symbol $\|.\|_{-1/2,\partial\omega_H}$ označuje duální normu v prostoru $H^{-1/2}(\partial\omega_H)$.

Maticová formulace $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$ vypadá následovně:

$$(\vec{\mathcal{P}}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n(h)} \times \mathbb{R}^{M(H)} \text{ takové, že} \\ \mathbb{A} \mathbf{u} + \mathbb{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}, \\ \mathbb{B} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

kde \mathbb{A} je matice tuhosti, \mathbb{B} je tzv. matice transformace, \mathbf{F} je vektor zatížení a \mathbf{u} , resp. λ jsou vektory uzlových hodnot \hat{u}_h , resp. λ_H . Dodejme ještě, že prvky matic \mathbb{A} , \mathbb{B} a vektoru zatížení \mathbf{F} se spočtou následovně:

$$A = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx, \quad i, j = 1, \dots, n(h),$$
$$\mathbb{B} = \{b_{kj}\}, \quad b_{kj} = \int_{\overline{A_k A_{k+1}}} \varphi_j \, ds, \quad j = 1, \dots, n(h), \quad k = 1, \dots, M(H),$$
$$\mathbf{F} = \mathbb{C}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \mathbb{C} = \{c_{ij}\}, \quad c_{ij} = \int_{D} \varphi_i \varphi_j \, dx, \quad i, j = 1, \dots, n(h),$$

kde $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n(h)}$ jsou bázové funkce \hat{V}_h , $\{\overline{A_k A_{k+1}}\}_{k=1}^{M(H)}$ je systém jednotlivých částí hranice $\partial \omega_H$, $\tilde{\mathbf{f}}$ je vektor uzlových hodnot \tilde{f} a $D \equiv \Omega$, resp. $D \equiv \omega_H$ pro BLM var. I., resp. II.

Poznamenejme, že informace o geometrii oblasti ω je obsažena v matici \mathbb{B} , ve vektoru zatížení \mathbf{F} (pouze pro BLM var. II.), ale ne v matici tuhosti \mathbb{A} .

Poznámka 3.3 Homogenní Dirichletova okrajová podmínka $\hat{u}_h(\omega) = 0$ na hranici $\partial \omega$ je splněna ve velmi slabém smyslu. Konkrétně: integrální průměr řešení $\hat{u}_h(\omega)$ nad každým úsekem hranice $\overline{A_i A_{i+1}}$ je roven nule, což vyplývá z druhé rovnice v úloze $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$. Toto může vést k velkým chybám řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v okolí hranice $\partial \omega$.

3.2 DLM-technika

Stejně jako předtím označíme $V(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ a definujeme prostor $V_0(\Xi, \Omega)$ následovně:

$$V_0(\Xi, \Omega) = \{ v \in V(\Omega) \mid v \equiv 0 \ v \ \Xi \equiv \Omega \setminus \overline{\omega} \}.$$

Opět je velmi jednoduché ověřit, že úloha

$$(\hat{\mathcal{P}})' \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \hat{u} \in V_0(\Xi, \Omega) \text{ takové, že} \\ (\nabla \hat{u}, \nabla \varphi)_{0,\Omega} = (\tilde{f}, \varphi)_{0,\Omega} \quad \forall \varphi \in V_0(\Xi, \Omega), \end{cases}$$

kde $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ je vhodné rozšíření f z oblasti ω na Ω , má jediné řešení \hat{u} a $\hat{u}|_{\omega}$ řeší (\mathcal{P}) .

Podmínku $v \equiv 0$ v Ξ zpracujeme užitím distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů definovaných v Ξ . Nechť $\Lambda(\Xi) \equiv (V(\Omega)|_{\Xi})'$, t.j. $\Lambda(\Xi)$ je duální k prostoru funkcí z $V(\Omega)$ zúžených na Ξ . Potom ekvivalentní vyjádření k $(\hat{\mathcal{P}})'$ je

$$(\hat{\mathcal{P}}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } (\hat{u}, \lambda) \in V(\Omega) \times \Lambda(\Xi) \text{ takové, že} \\ (\nabla \hat{u}, \nabla \varphi)_{0,\Omega} = (\tilde{f}, \varphi)_{0,\Omega} + <\lambda, \varphi >_{\Xi} \\ \forall \varphi \in V(\Omega), \\ <\mu, \hat{u} >_{\Xi} = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda(\Xi), \end{cases}$$

kde < , > $_{\Xi}$ označuje příslušnou dualitu. Tato forma úlohy ($\hat{\mathcal{P}}$) a důkaz následující věty jsou prezentovány v [Haslinger, Tomas, Maître, 1998] a [Tomas, 1997].

Věta 3.3 Úloha $(\hat{\mathcal{P}})$ má jediné řešení (\hat{u}, λ) a $\hat{u}|_{\omega}$ řeší (\mathcal{P}) .

Tuto variantu metody fiktivních oblastí dále označujeme jako DLM.

Dále uvádíme popis aproximace úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$ opět pomocí smíšené metody konečných prvků. Nechť $\{\hat{\mathcal{T}}_h\}, \{\hat{\mathcal{T}}_H\}$ pro $h, H \to 0+$ jsou dva regulární systémy triangulací oblasti $\overline{\Omega}$ splňující následující:

- (j) $h \to 0 + \Leftrightarrow H \to 0+;$
- (jj) $\hat{\mathcal{T}}_h \supset \hat{\mathcal{T}}_H$ pro libovolné $h, H \to 0+$,

t.j. libovolný element $T' \in \hat{\mathcal{T}}_H$ je tvořen sjednocením konečného počtu trojúhelníků $T \in \hat{\mathcal{T}}_h$. Každému $\hat{\mathcal{T}}_h$, resp. $\hat{\mathcal{T}}_H$ přiřadíme prostor \hat{V}_h , resp. \hat{V}_H všech po částech lineárních funkcí nad $\hat{\mathcal{T}}_h$, resp. $\hat{\mathcal{T}}_H$ a nulových na $\partial\Omega$:

$$\hat{V}_{\kappa} = \{ v_{\kappa} \in C(\overline{\Omega}) \mid v_{\kappa} \mid_{T} \in P_{1}(T) \quad \forall T \in \hat{\mathcal{T}}_{\kappa}, \quad v_{\kappa} = 0 \text{ na } \partial\Omega \},\$$

kde $\kappa = h$, resp. *H*. Dále definujme

$$V_H(\Xi) \equiv \hat{V}_H \mid_{\Xi}$$

Potom aproximace úlohy $(\hat{\mathcal{P}})$ je definovaná následovně:

$$(\hat{\mathcal{P}})_{h}^{H} \begin{cases} \text{Najdi } (\hat{u}_{h}, \lambda_{H}) \in \hat{V}_{h} \times V_{H}(\Xi) \text{ takové, že} \\ \int_{\Omega} \operatorname{grad} \hat{u}_{h} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{h} \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} \varphi_{h} \, dx + \int_{\Xi} \lambda_{H} \varphi_{h} \, dx \\ \forall \varphi_{h} \in \hat{V}_{h}, \\ \int_{\Xi} \mu_{H} \hat{u}_{h} \, dx = 0 \quad \forall \mu_{H} \in V_{H}(\Xi). \end{cases}$$

Z důvodu platnosti (jj) vidíme, že podmínka stability

(3.3)
$$\int_{\Xi} \mu_H \hat{v}_h \, dx = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in \hat{V}_h \implies \mu_H \equiv 0 \ \mathrm{v} \ \Xi$$

je splněna a proto lze dokázat (viz. [Haslinger, Tomas, Maître, 1998]) Věta 3.4 *Úloha* $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$ má jediné řešení (\hat{u}_h, λ_H) a navíc

$$\hat{u}_h \to \hat{u} \quad v \quad V(\Omega), \quad h \to 0+,$$

přičemž \hat{u} je řešení $(\hat{\mathcal{P}})$.

Poznámka 3.4 LBB podmínka má v tomto případě následující vyjádření:

(3.4)
$$\inf_{\Lambda_{H}(\Xi)} \sup_{V_{h}(\omega)} \frac{(\mu_{H}, v_{h})_{0,\Xi}}{\|\mu_{H}\|_{*,\Xi} \|v_{h}\|_{1,\omega}} \ge \beta,$$

kde konstanta $\beta > 0$ nezávisí na h, H > 0 a symbol $\|.\|_{*,\Xi}$ označuje duální normu v prostoru $\Lambda(\Xi)$. V případě, že dělení oblasti $\overline{\Omega}$ nerespektuje geometrii oblasti ω , může být konstanta β zavislá na H (podrobněji viz. [Haslinger, Tomas, Maître, 1998] a [Tomas, 1997]).

Maticová formulace je stejná jako v předchozím případě s tím rozdílem, že elementy b_{ij} matice \mathbb{B} se nyní vypočítávají dle následujícího vztahu:

$$b_{ij} = \int_{\Xi} \psi_i \varphi_j \, dx,$$

kde $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n(h)}$, resp. $\{\psi_i\}_{i=1}^{n(H)}$ jsou bázové funkce \hat{V}_h , resp. $V_H(\Xi)$. Prvky matice \mathbb{C} se spočítají stejně jako u BLM var. II. Informace o geometrii oblasti ω je obsažena v matici \mathbb{B} , ve vektoru zatížení \mathbf{F} , ale ne v matici tuhosti \mathbb{A} .

4 Konkrétní realizace řešení stavové úlohy

V této části popíšeme jednu z možných realizací řešení stavového problému pomocí metody fiktivních oblastí. Zatímco v teoretické části používáme triangulaci oblasti Ω , v praktické realizaci jsou z důvodu jednoduchosti implementace použity obdélníkové elementy (rektangulace oblasti Ω) s bilineárními funkcemi. Za fiktivní oblast Ω vezměme obdélník $(0, Lx) \times (0, Ly)$, jež je rozdělen na čtvercové elementy s krokem h, resp. H definujícím rektangulaci $\hat{\mathcal{R}}_h$, resp. $\hat{\mathcal{R}}_H$ oblasti Ω . Ke konstrukci \hat{V}_h , resp. $V_H(\Xi)$ jsou užity po částech bilineární funkce nad $\hat{\mathcal{R}}_h$, resp. $\hat{\mathcal{R}}_H$.

V dalším budeme předpokládat, že hranice $\partial \omega$ oblasti ω je tvořena po částech Bezierovými křivkami 2. řádu. Počet těchto částí označme jako n_c . Jedna taková hranice je vidět na obrázku 3.



Obrázek 3: Příklad oblasti s hranicí tvořenou po částech Bezierovou křivkou 2. řádu.

Každá Bezierova křivka 2. řádu je tvořena počátečním (I_i) , koncovým (I_{i+1}) a řídícím (B_i) bodem. Počet řídících i počátečních, resp. koncových bodů je tedy stejný jako počet částí hranice $\partial \omega$. Pokud máme zadanou podmínku na hladkost hranice $\partial \omega$, pak je křivka tvořící tuto hranici jednoznačně dána pouze řídícími body B_1, \ldots, B_{n_c} a počáteční, resp. koncové body jsou dopočteny následovně:

$$I_i = \frac{B_{i-1} + B_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n_c, \quad B_0 \equiv B_{n_c}$$

v opačném případě musí být počáteční, resp. koncové body I_1, \ldots, I_{n_c} stejně jako řídící body B_1, \ldots, B_{n_c} zadány. Trojice bodů $(I_i, B_i, I_{i+1}), i = 1, \ldots, n_c,$ $I_{n_c+1} \equiv I_1$ jednoznačně určuje Bezierovu křivku $\beta_i, i = 1, \ldots, n_c$. I_i je tedy počátečním bodem Bezierovy křivky β_i a zároveň koncovým bodem Bezierovy křivky β_{i-1} .

Diskretizace hranice $\partial \omega$ pro Lagrangeovy multiplikátory na hranici je určena počátečními body I_k , $k = 1, \ldots, n_c$. Z tohoto důvodu budou prvky matice \mathbb{B} v

tomto případě počítány následovně:

$$\mathbb{B} = \{b_{kj}\}, \quad b_{kj} = \int_{\beta_k} \varphi_j \, ds, \quad j = 1, \dots, n(h), \quad k = 1, \dots, n_c,$$

kde $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n(h)}$ jsou bázové funkce \hat{V}_h a $\{\beta_k\}_{k=1}^{n_c}$ je systém jednotlivých částí hranice $\partial \omega$.

Vyloučení proměnné
 u v maticové formulaci $(\vec{\mathcal{P}})$ vede na řešení soustavy lineárních rovnic

(4.1)
$$\mathcal{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b},$$

kde

$$\mathcal{A} = \mathbb{B} \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}^T,$$

$$\mathbf{b} = -\mathbb{B} \mathbb{A}^{-1} \mathbf{F}.$$

Matice \mathbb{A} je v našem případě symetrická, pozitivně definitní a proto můžeme provést Choleského rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{L}^T$. K řešení rovnice (4.1) s výhodou použijeme metodu sdružených gradientů.

Metoda sdružených gradientů

Inicializace:

$$egin{array}{rll} oldsymbol{\lambda}_0&=&oldsymbol{0} & (ext{libovoln}eta),\ oldsymbol{r}_0&=&oldsymbol{b}-\mathcal{A}oldsymbol{\lambda}_0,\ oldsymbol{v}_0&=&oldsymbol{r}_0,\ n&=&\dim(\mathcal{A}),\ i&:=&0,\ arepsilon&>&0. \end{array}$$

Iterační cyklus:

 $(\#) \qquad (\|\mathbf{r}_i\|^2 \le \|\mathbf{b}\|^2 \varepsilon \text{ nebo } i \ge n) \implies \text{ ukončení cyklu},$

$$\mathbf{d}_{i} = \mathcal{A}\mathbf{v}_{i},$$

$$\alpha_{i} = \frac{\mathbf{r}_{i}^{T}\mathbf{r}_{i}}{\mathbf{v}_{i}^{T}\mathbf{d}_{i}},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = \boldsymbol{\lambda}_{i} + \alpha_{i}\mathbf{v}_{i},$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_{i} - \alpha_{i}\mathbf{d}_{i},$$

$$\beta_{i} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{T}\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_{i}^{T}\mathbf{r}_{i}},$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i}\mathbf{v}_{i},$$

i := i + 1 a vracíme se k (#).

Pomocný vektor \mathbf{d}_i je tvořen následujícím součinem matic a vektoru \mathbf{v}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i &= \mathcal{A}\mathbf{v}_i = \mathbb{B}\,\mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{B}^T\,\mathbf{v}_i \\ &= \mathbb{B}\,(\mathbb{L}\,\mathbb{L}^T)^{-1}\,\mathbb{B}^T\,\mathbf{v}_i \\ &= \mathbb{B}\,\mathbb{L}^{-T}\,\mathbb{L}^{-1}\,\mathbb{B}^T\,\mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

kde \mathbb{B} je příslušná matice transformace, \mathbb{L} je dolní trojúhelníková matice vzniklá Choleského rozkladem matice tuhosti \mathbb{A} a vektor \mathbf{v}_i reprezentuje směr postupu získaný \mathcal{A} -ortogonalizací vektorů reziduí \mathbf{r}_i . Součin $\mathbb{B} \mathbb{L}^{-T} \mathbb{L}^{-1} \mathbb{B}^T \mathbf{v}_i$ se vypočte následovně:

$$\mathbf{y} = \mathbb{B}^{T} \mathbf{v}_{i},$$

$$\mathbf{z} = \mathbb{L}^{-1} \mathbf{y} \Leftrightarrow \text{(řešení soustavy } \mathbb{L} \mathbf{z} = y \text{ přímým chodem}),$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{L}^{-T} \mathbf{z} \Leftrightarrow \text{(řešení soustavy } \mathbb{L}^{T} \mathbf{u} = \mathbf{z} \text{ zpětným chodem}),$$

$$\mathbf{d}_{i} = \mathbb{B} \mathbf{u}.$$

Kritérium na ukončení cyklu v těle metody sdružených gradientů (#) je složeno ze dvou částí. První z nich odpovídá podmínce na relativní chybu rezidua a druhá je omezení počtu prováděných iterací metody sdružených gradientů (omezení počtu průchodů cyklem) dimenzí matice \mathcal{A} .

5 Numerické příklady

V této části jsou vyhodnocovány výsledky dvou níže uvedených úloh, které byly zvoleny tak, aby jejich řešení bylo snadno vyjádřitelné v analytickém tvaru. Pro každou zmiňovanou variantu metody fiktivních oblastí a pro oba zadané příklady je grafem, popř. tabulkou znázorněno:

- vypočtené řešení stavové úlohy;
- odpovídající Lagrangeův multiplikátor;
- chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega)$;
- počet iterací metody sdružených gradientů potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega)$;
- řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$;
- číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} v závislosti na h.

V případě potřeby objasnění některých dosažených výsledků jsou uvedeny některé tabulky a obrázky navíc.

Příklad 1 Nechť rozměry fiktivní oblasti jsou Lx = Ly = 3, krok diskretizace stavového problému $h = \frac{3}{32}$ a parametr ukončení metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$. Stavová úloha je definována následovně:

$$\left(\mathcal{P}\right)_{1} \qquad \left\{ \begin{array}{rrr} -\triangle u = f & \mathbf{v} & \boldsymbol{\omega}, \\ u = 0 & \mathrm{na} & \partial \boldsymbol{\omega}, \end{array} \right.$$

kde

$$f = -\Delta u_z,$$

přičemž

$$u_{z} = \left(x - \frac{Lx}{2} + c\right) \left(\alpha(y) - x\right) \left(y - \frac{Ly}{2} + c\right) \left(\frac{Ly}{2} + c - y\right),$$
$$\alpha(y) = \frac{3}{8} \sin\left(\frac{\pi \overline{y}}{2c}\right) + \frac{Lx}{2} + c,$$
$$\overline{y} = y - \frac{Ly}{2} + c, \quad c = 0.5625.$$

Pro lepší představu o geometrii úlohy uvádíme obrázek 4, kde hranice výrazně vyznačené oblasti odpovídá množině bodů, v níž funkce u_z nabývá nulové hodnoty. Funkce u_z je tedy řešením úlohy $(\mathcal{P})_1$ na této oblasti.



Obrázek 4: Znázornění oblasti ω a diskretizace $\Omega.$

Krok diskretizace H pro distribuované Lagrangeovy multiplikátory se rovná h, resp. 2h a diskretizace $\partial \omega$ pro Lagrangeovy multiplikátory na hranici je dána

počátečními, resp. koncovými body I_i , $i = 1, ..., n_c (= 4)$ znázorněnými kolečky na obr. 4.

Příklad 2 Nechť rozměry fiktivní oblasti Ω jsou Lx = Ly = 8, krok diskretizace stavového problému $h = \frac{1}{4}$ a parametr ukončení metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$. Stavová úloha je v tomto případě definovaná následovně:

$$\left(\mathcal{P}\right)_{2} \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{rrr} -\triangle u = f & \mathrm{v} & \omega, \\ u = 0 & \mathrm{na} & \partial \omega, \end{array} \right.$$

kde

$$f = -\Delta u_z,$$

přičemž

$$u_z = 4 - \left(x - \frac{Lx}{2}\right)^2 - 4\left(y - \frac{Ly}{2}\right)^2.$$

Geometrie úlohy je dobře patrná z obrázku 5, kde opět výrazně vyznačená křivka odpovídá množině bodů, v níž funkce u_z nabývá hodnoty nula.



Obrázek 5: Znázornění oblasti ω a diskretizace Ω .

Krok diskretizace H pro distribuované Lagrangeovy multiplikátory se rovná h, resp. 2h a diskretizace $\partial \omega$ pro Lagrangeovy multiplikátory na hranici je dána počátečními, resp. koncovými body I_i , $i = 1, \ldots, n_c (= 8)$ znázorněnými kolečky na obr. 5.

5.1 Vyhodnocení výsledků numerických příkladů

V této části srovnáváme výsledky dosažené jednotlivými zmiňovanými variantami MFO aplikovanými na příklady 1 a 2 (viz. Výsledky numerických příkladů ke kapitole I).

Vyhodnocení výsleků příkladu 1

Vypočtená řešení stavové úlohy $(\mathcal{P})_1$ pro jednotlivé varianty MFO jsou znázorněna na obrázcích 11, 13, 15 a 18. Odpovídající Lagrangeův multiplikátor je pak v případě BLM metody uveden v tabulkách 3 a 8 a pro DLM metodu je znázorněn graficky na obrázcích 16 a 19.

Porovnáním chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ získaného užitím některé z variant MFO zjistíme, že nejmenších chyb je dosaženo v případě užití distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů s $H \equiv 2h$ a největších, použijemeli Lagrangeovy multiplikátory na hranici var. I. Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $L^2(\omega)$ naproti tomu vychází nejlépe pro DLM s $H \equiv h$ a nejhůře opět pro BLM var. I. Zmiňované chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ jsou uvedeny v tabulkách 4, 9, 13 a 16.

Nejlepší, resp. nejhorší řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ vychází pro DLM s $H \equiv 2h$, resp. BLM var. I. U metody DLM bylo dokázáno, že řád konvergence $\alpha = 1/2 - \varepsilon$, kde ε je větší než 0 (viz. [Haslinger, Tomas, Maître, 1998] a [Tomas, 1997]). Obdobný vztah pro řád konvergence v případě užití BLM metody byl dokázán v [Girault, Glowinski, 1995], ale s tím rozdílem, že byla uvažována chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\Omega)$. Z řádu konvergence vypočteného pro jednotlivé varianty MFO je vidět, že v případě užití DLM metody je hodnota α kolem 0.5, kdežto u BLM metody je to řádově pouze 10^{-2} . Tato velmi nízká hodnota α je způsobena tím, že podmínka u = 0 na $\partial \omega$ je splněna ve velmi slabém smyslu (viz. Pozn. 3.3). Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ může tedy být v okolí hranice veliká a proto následně provádíme zjišťování chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\Lambda)$ (viz. tabulky 7 a 12), kde Λ je obdélníková podoblast oblasti ω znázorněná na obrázcích 12 a 14 šrafovaně. Ihned je vidět, že u BLM var. II vzrostl řád konvergence z 0.07439 na 0.44633, zatímco v případě BLM var. I vyšel řád konvergence α dokonce záporný. Toto je obvykle způsobeno nevhodnou diskretizací hranice $\partial \omega$ pro Lagrangeovy multiplikátory.

Nyní se podíváme na číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} v závislosti na kroku huvedeném pro jednotlivé varianty MFO v tabulkách 6, 11, 15 a 18. V případě BLM metody je číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} řádově v jednotkách, kdežto u DLM metody je řádově $10^{18} - 10^{21}$. Tato vysoká hodnota čísla podmíněnosti nemusí mít ještě negativní vliv na použití metody sdružených gradientů k řešení rovnice (4.1), pokud by se ukázalo, že spektrum matice \mathcal{A} má skokovité rozložení, t.j. jsou tam díry. Obrázky 17 a 20 potvrzují, že rozložení spektra je opravdu skokovité. Dále je velmi zajímavé, že v případě užití metody BLM se číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} se zmenšujícím se krokem diskretizace stavové úlohy h rovněž zmenšuje. Ke stejnému jevu dochází i vpřípadě DLM metody, pokud zafixujeme krok diskretizace pro distribuované Lagrangeovy multiplikátory H a měníme pouze krok diskretizace stavové úlohy h. Tento efekt je způsoben tím, že se poměr H/hse zmenšujícím h (H je pevné) zvětšuje, což má za následek silnější splnění podmínek (3.1), (3.2) v případě BLM metody, resp. (3.3), (3.4) u DLM metody (viz. [Girault, Glowinski, 1995], resp. [Tomas, 1997]).

Počet iterací metody sdružených gradientů potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega)$ je závislý na velikosti čísla podmíněnosti matice \mathcal{A} a také na rozložení spektra. Z tabulek 5, 10, 14 a 17 odpovídajícím jednotlivým variantám MFO je vidět, že počet iterací je v případě BLM metody řádově v jednotkách, kdežto u DLM metody v desítkách. Je třeba ještě upozornit, že dimenze matice \mathcal{A} je pro BLM metodu nezávislá na h a je řádově v jednotkách, zatímco u DLM metody je dimenze matice \mathcal{A} na h závislá a konkrétně pro náš příklad je řádově $10^2 - 10^3$.

Vyhodnocení výsleků příkladu 2

Vypočtená řešení stavové úlohy $(\mathcal{P})_2$ pro jednotlivé varianty MFO jsou znázorněna tentokrát na obrázcích 21, 22, 23 a 26. Odpovídající Lagrangeův multiplikátor je pak v případě BLM metody uveden v tabulkách 19 a 23 a pro DLM metodu je znázorněn graficky na obrázcích 24 a 27.

Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ vychází v tomto případě opět nejlépe pro DLM s $H \equiv 2h$ a nejhůře pro BLM var. I. Co se týče chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $L^2(\omega)$, nejlepších výsledků bylo dosaženo v případě užití BLM var. II a nejhorších u BLM var. I. Zmiňované chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ jsou uvedeny v tabulkách 20, 24, 27 a 30.

Porovnáním řádů konvergence vypočtených pro jednotlivé varianty MFO z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ zjišťujeme, že nejlepší konvergence bylo dosaženo v případě DLM s $H \equiv h$ a nejhorší pro BLM var. II. V tomto případě vyšel tedy řád konvergence pro BLM var. I lepší, než pro BLM var. II, ale chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ je jak v normě prostoru $H^1(\omega)$, tak $L^2(\omega)$ podstatně horší.

Číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} v závislosti na kroku diskretizace stavové úlohy h je pro jednotlivé varianty MFO uvedené v tabulkách 22, 26, 29 a 32. V případě užití BLM metody vychází číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} řádově v desítkách a opět se zmenšujícím se krokem h se zmenšuje i číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} , naproti tomu u DLM metody je stejně jako u předchozího příkladu řádově $10^{18} - 10^{21}$ a z obrázků 25 a 28 je vidět, že spektrum matice \mathcal{A} je opět rozděleno skokovitě. Navíc u DLM s $H \equiv h$ v příkladech 1 i 2 neplatí, že by se se zmenšujícím krokem h číslo podmíněnosti zvětšovalo. Konkrétně pro h = 1/3 je číslo podmíněnosti matice \mathcal{A} větší, než pro h = 1/4. Toto může být způsobeno:

- 1. Rektangulace $\hat{\mathcal{R}}_{1/4}$ je zjemněním $\hat{\mathcal{R}}_{1/2}$, kdežto rektangulace $\hat{\mathcal{R}}_{1/3}$ nikoli.
- 2. V případě protnutí obdélníkového elementu diskretizace stavové úlohy hranicí $\partial \omega$ je tento element rozdělen na dvě části. Pokud by plocha části ele-

mentu patřící doplňkové oblasti Ξ byla velmi malá, pak rozdíl mezi minimální a maximální hodnotou prvků matice \mathbb{B} by byl obrovský. Toto by mělo za následek zanesení chyby do výpočtu matice $\mathcal{A} = \mathbb{B} \mathbb{L}^{-T} \mathbb{L}^{-1} \mathbb{B}^{T}$ (viz. [Haslinger, Tomas, Maître, 1998]).

Počty iterací metody sdružených gradientů pro jednotlivé varianty MFO jsou znázorněné v tabulkách 21, 25, 28 a 31. Opět v případě užití BLM metody jsou řádově v jednotkách a u DLM metody v desítkách. Dimenze matice \mathcal{A} je pro BLM metodu také řádově v jednotkách (nezávislá na h) a pro DLM metodu řádově $10^2 - 10^3$.

Kapitola II - Tvarová optimalizace

6 Zadání úlohy

V praxi se setkáváme s celou řadou úloh, v nichž tvar součásti má podstatný vliv na kvalitu výsledného produktu (strojírenství, hornictví atd.). Matematická disciplína zabývající se hledáním optimálního tvaru struktury se nazývá tvarová optimalizace.

Tvarová optimalizace je část teorie optimálního řízení, ve které kontrolní veličina souvisí s geometrií problému. Velká třída úloh tvarové optimalizace má následující schéma:

$$(\mathbb{P}) \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Najdi} \omega^* \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J(\omega^*, u(\omega^*)) = \min_{\omega \in \mathcal{O}} J(\omega, u(\omega)), \end{array} \right.$$

kde ω je oblast hrající roli řídící veličiny, \mathcal{O} je množina přípustných oblastí, $u(\omega)$ je řešení stavového problému (\mathcal{P}) a J je cenový funkcionál, jehož výběr je závislý na tom, co chceme optimalizovat. Existence řešení (\mathbb{P}) je rozebrána v [Pironneau, 1984] a [Haslinger, Neittaanmäki, 1996].

Naším cílem bude řešit úlohu (\mathbb{P}) prostřednictvím několika optimalizačních algoritmů, jejichž účinnost testujeme na celé řadě úloh tvarové optimalizace. K numerické realizaci stavového problému (\mathcal{P}) použijeme jednotlivé varianty MFO zmiňované v první kapitole, části 3.

7 Klasický přístup k úlohám tvarové optimalizace

Nejdříve popíšeme aproximaci úlohy (\mathbb{P}). Množinu přípustných oblastí \mathcal{O} nahradíme množinou \mathcal{O}_h , jejíž všechny prvky (oblasti) jsou určeny konečným, stejně velkým počtem parametrů (\mathcal{O}_h může být např. množina oblastí s po částech polygonální hranicí). Z výše uvedeného vyplývá, že libovolná oblast $\omega_h \in \mathcal{O}_h$ může být jednoznačně popsána vektorem $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^q$, který nazveme vektorem diskrétních návrhových proměnných. Nyní můžeme definovat izomorfismus \mathcal{T}_D mezi množinami \mathcal{O}_h a \mathcal{U} následovně:

$$egin{aligned} \mathcal{T}_D(\omega_h) &= oldsymbol{lpha}, \quad \omega_h \in \mathcal{O}_h, \ \mathcal{T}_D(\mathcal{O}_h) &= \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Stavový problém (\mathcal{P}) bude aproximován užitím metody konečných prvků. Tuto aproximaci (\mathcal{P}) označíme jako (\mathcal{P})_h a odpovídající řešení $u_h(\omega_h)$.

Aproximací úlohy (\mathbb{P}) je úloha

$$(\mathbb{P})_{h} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Najdi} \omega_{h}^{*} \in \mathcal{O}_{h} \text{ takové, že} \\ J_{h}(\omega_{h}^{*}, u_{h}(\omega_{h}^{*})) = \min_{\omega_{h} \in \mathcal{O}_{h}} J_{h}(\omega_{h}, u_{h}(\omega_{h})) \end{array} \right.$$

Vztah mezi (\mathbb{P}) a $(\mathbb{P})_h$ je podrobně rozebrán v [Haslinger, Neittaanmäki, 1996].

Klasický způsob numerické realizace $(\mathbb{P})_h$ je založen na postupné deformaci hranice oblasti, přičemž nový tvar $\omega_h^{(k+1)}$ je zkonstruován z předchozího tvaru $\omega_h^{(k)}$ vhodnou deformací:

$$\omega_h^{(k+1)} = \mathcal{F}_h^{(k)}(\omega_h^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde $\mathcal{F}_{h}^{(k)}$ je spojité prosté zobrazení takové, že

$$J_h(\omega_h^{(k+1)}, u_h(\omega_h^{(k+1)})) \le J_h(\omega_h^{(k)}, u_h(\omega_h^{(k)})), \quad k = 0, 1, \dots$$

Předpokládejme, že úloha (\mathcal{P}) je lineární a k její numerické realizaci je použita klasická metoda konečných prvků. Potom maticová forma (\mathcal{P})_h je následující:

(7.1)
$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}),$$

kde $\mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha})$ je matice tuhosti, $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor zatížení a $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor uzlových hodnot $u_h(\omega_h)$. V tomto případě matice tuhosti \mathbb{A} a vektor zatížení \mathbf{F} jsou závislé na geometrii oblasti ω_h . Obvyklým způsobem definujeme izomorfismus \mathcal{T}_S mezi prostory $V_h(\omega_h)$ a \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{T}_S(u_h(\omega_h)) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}),$$

přičemž $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor uzlových hodnot $u_h(\omega_h)$ řešící (7.1). Algebraický tvar $(\mathbb{P})_h$ vede na následující úlohu nelineárního matematického programování:

$$(\vec{\mathbb{P}}) \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Najdi } \boldsymbol{\alpha}^* \in \mathcal{U} \text{ takové, že} \\ \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^*, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}^*)) = \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})), \end{array} \right.$$

kde $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})) \equiv J_h(\mathcal{T}_D^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{T}_S^{-1}\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}))$, přičemž symboly \mathcal{T}_D^{-1} , resp. \mathcal{T}_S^{-1} značí inverzní zobrazení k \mathcal{T}_D , resp. \mathcal{T}_S . Nevýhody takto zformulované úlohy jsou zřejmé: pro každou novou oblast $\omega_h^{(k+1)}$ musíme znovu zkonstruovat její dělení pro MKP, přepočítat matici tuhosti a vektor zatížení a teprve poté řešit rovnici (7.1). Toto se během optimalizačního procesu opakuje mnohokrát, z čehož vyplývá neefektivnost tohoto postupu.

8 Metoda fiktivních oblastí v tvarové optimalizaci

K odstranění výše zmiňovaných nedostatků nebo alespoň k jejich potlačení použijeme metodu fiktivních oblastí k numerické realizaci $(\mathcal{P})_h$. Tento přístup nám umožní provádět všechny výpočty na pevné oblasti Ω a na pevném dělení $\hat{\mathcal{T}}_h$ oblasti Ω , jež jsou zcela nezávislé na geometrii oblasti ω . Důsledkem toho je, že matice tuhosti je nezávislá na vektoru diskrétních návrhových proměnných.

Abstraktní schéma úloh tvarové optimalizace, jež užívají k řešení stavového problému metodu fiktivních oblastí, vypadá následovně:

$$(\overline{\mathbb{P}})_{h} \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \omega_{h}^{*} \in \mathcal{O}_{h} \text{ takové, že} \\ J_{h}(\omega_{h}^{*}, \hat{u}_{h}(\omega_{h}^{*}) \mid_{\omega_{h}^{*}}) = \min_{\omega_{h} \in \mathcal{O}_{h}} J_{h}(\omega_{h}, \hat{u}_{h}(\omega_{h}) \mid_{\omega_{h}}), \end{cases}$$

kde $\hat{u}_h(\omega_h) \in V_h(\Omega)$ je řešením $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$ získané jednou z variant metody fiktivních oblastí uvedených v kapitole I, části 3. Připomeňme, že algebraická forma $(\hat{\mathcal{P}})_h^H$ je následující:

$$(\vec{\mathcal{P}}) \qquad \begin{cases} \text{Najdi } (\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha})) \in \mathbb{R}^{n(h)} \times \mathbb{R}^{d(H)} \text{ takové, že} \\\\ \mathbb{A} \, \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbb{B}^{T}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}), \\\\ \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

kde $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$, resp. $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ je vektor uzlových hodnot funkce $\hat{u}_h(\omega_h)$, resp. $\lambda_H(\omega_h)$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}$ je vektor diskrétních návrhových proměnných popisujících $\omega_h \in \mathcal{O}_h$ a d(H) = M(H), resp. d(H) = n(H) v případě užití BLM metody, resp. DLM metody. Znovu opakujeme, že pouze matice \mathbb{B} , eventuálně vektor zatížení \mathbf{F} jsou závislé na $\boldsymbol{\alpha}$, nikoli však matice tuhosti \mathbb{A} . To znamená, že matice \mathbb{A} může být spočtena pouze jednou na začátku optimalizačního procesu a pak již zůstává nezměněna. Tvarová optimalizace společně s MFO řešiči založenými na BLM-technice je studována v [Glowinski, Kearsley, Pan, Periaux, 1995], [Haslinger, Klarbring, 1995], [Peichl, Kunisch, 1995] aj. DLM-technika v tvarové optimalizaci byla použita v [Haslinger, Tomas, Maître, 1998], [Tomas, 1997] a dalších.

Nedílnou součástí optimalizačního procesu je analýza citlivosti, to jest studium diferencovatelnosti zobrazení: *řídící proměnná* \mapsto *řešení stavové úlohy*. V následujícím se budeme proto zabývat diferencovatelností zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$, kde $\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ je část řešení ($\vec{\mathcal{P}}$). Z formulace ($\vec{\mathcal{P}}$) je vidět, že

(8.1)
$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbb{I} - \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}^T(\boldsymbol{\alpha}) (\mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}^T(\boldsymbol{\alpha}))^{-1} \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})) \mathbb{A}^{-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Předpokládáme-li, že zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ je dostatečně hladké, diferencovatelnost $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha})$ závisí pouze na diferencovatelnosti zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}).$ V případě Lagrangeových multiplikátorů na hranici (BLM-technika) jsou zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})$ i $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$ nediferencovatelné, protože prvek $b_{ij}(\boldsymbol{\alpha})$ matice \mathbb{B} je dán výrazem

$$b_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{\overline{A_i A_{i+1}}} \varphi_j \, ds,$$

kde $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n(h)}$ jsou bázové funkce $V_h(\Omega)$. Pokud tedy část hranice $\overline{A_i A_{i+1}}$ má neprázdný průnik s vnitřní hranicí mezi dvěmi sousedními trojúhelníkovými elementy patřícími do $\hat{\mathcal{T}}_h$ a zároveň jednorozměrná Lebesgueova míra tohoto průniku je kladná, potom zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto b_{ij}(\boldsymbol{\alpha})$ není spojitě diferencovatelné z důvodu nespojitosti první derivace bázové funkce φ_j (viz. [Daňková, Haslinger, 1996] a [Tomas, 1997]). Minimalizační úloha $(\overline{\mathbb{P}})_h$ je tedy obecně nehladká. Z tohoto důvodu je nevhodné používat na její řešení klasických gradientních metod.

V případě užití distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů (DLMtechnika) je sice $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}(\boldsymbol{\alpha})$ spojitě diferencovatelné, ale může se stát, že naopak zobrazení $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$ spojité není. To nastane tehdy, když plocha průniku $T \cap \Xi_h$ je malá. Navíc se projeví vliv tzv. locking effectu, který nyní vysvětlíme.

Předpokládejme, že $\hat{\mathcal{T}}_h \equiv \hat{\mathcal{T}}_H$. Pak z toho, že

$$(\mu_h, \hat{u}_h)_{0,\Xi_h} = 0 \quad \forall \mu_h \in \Lambda_h(\Xi_h)$$

plyne, že $\hat{u}_h \equiv 0$ nejen v Ξ_h , ale širší množině Ξ'_h , kde

$$\Xi'_h = \bigcup \{ T \mid \inf(T) \cap \Xi_h \neq \emptyset \},\$$

t.j. Ξ'_h je sjednocení všech trojúhelníkových elementů patřících $\hat{\mathcal{T}}_h$, jejichž vnitřek má neprázdný průnik s Ξ_h . Množina Ξ'_h je ilustrována obrázkem 6 pro případ, že užíváme rektangulaci oblasti Ω . Pokud se nyní oblast ω_h změní tak, že množina Ξ'_h zůstane stejná, nezmění se ani řešení \hat{u}_h , důsledkem čehož je necitlivost funkce $\omega_h \mapsto J_h(\omega_h, \hat{u}_h(\omega_h) \mid_{\omega_h})$ na změnu oblasti ω_h . Tato necitlivost cílové funkce na změnu oblasti ω_h způsobuje její patologické chování (např. nespojitost) (viz. obr. 8). Tento fenomén opět vylučuje užití klasických gradientních metod. Vliv locking effectu můžeme omezit tím, že vezmeme dělení $\hat{\mathcal{T}}_H$ řidší, než $\hat{\mathcal{T}}_h$. Další možnost potlačení locking effectu spočívá v užití Lagrangeových multiplikátorů na hranici, neboť homogenní Dirichletova okrajová podmínka je v tomto případě splněna ve slabém smyslu (viz. Pozn. 3.3), což má za následek ochranu řešení \hat{u}_h v okolí $\partial \omega_h$ před uzamčením. V každém případě však dostaneme úlohu nediferencovatelnou.



Obrázek 6: Znázornění množiny $\Xi'_h \equiv \Omega \setminus \overline{\omega}'_h$, kde oblast $\overline{\omega}'_h$ je tvořená vyšrafovanými obdélníkovými elementy.

9 Algoritmy globální optimalizace

Shrneme-li dosavadní poznatky, můžeme říci, že metoda fiktivních oblastí užitá k řešení úloh tvarové optimalizace zvyšuje efektivnost vnitřní úrovně optimalizačního procesu (řešení stavového problému), ale přináší určité komplikace na vnější úrovni (optimalizační algoritmus musí vzít v úvahu možnou nediferencovatelnost cenové funkce a locking effect).

Jednou z možností, jak odstranit tyto komplikace, je užití algoritmů globální optimalizace jako jsou GA (Genetic Algorithm), BGA (Breeder Genetic Algorithm), CRS (Controlled Random Search), SA (Simulated Annealing) a další, které jsou založeny pouze na vyhodnocování cenové funkce.

V této části popíšeme stručně algoritmy GA, BGA a MCRS (Modified CRS), jež jsou typickými představiteli tzv. evolučních algoritmů. Evoluční algoritmy jsou algoritmy pravděpodobnostní, které řeší úlohy globální optimalizace na základě modelování organického vývoje.

9.1 Formulace optimalizační úlohy

Typické schéma úloh globální optimalizace je následující:

$$\left(\mathbb{P}\right)_{\text{GO}} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Najdi } x^* \in \chi \text{ takové, že} \\ f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \chi, \end{array} \right.$$

kde $\chi \subseteq \chi_1 \times \ldots \times \chi_n$ je přípustný vyhledávací prostor o *n* parametrech,

 $f: \chi \mapsto \mathbb{R}$ je zvolená cenová funkce a x^* je bod z χ , v němž funkce f nabývá globálního minima. Prostor parametrů v praktických úlohách je zpravidla vymezen intervalem jejich přípustných hodnot, což vede na optimalizační úlohu s tzv. box constraints. Vyhledávací prostor χ tedy můžeme definovat následovně:

 $\chi = \{ x \in \chi_1 \times \ldots \times \chi_n \mid h_j(x) \ge 0, \quad j = 1, \ldots, m \},\$

kde $h_j(x)$, j = 1, ..., m jsou nerovnostní omezení a χ_i se obvykle volí jako interval $\langle a_i, b_i \rangle \subset \mathbb{R}$.

9.2 Genetic Algorithm - GA

Genetické algoritmy jsou vyhledávací algoritmy založené na mechanismu přirozeného výběru a principech genetiky. Prvky z prostoru χ jsou reprezentovány binárními řetězci (chromozómy) a jednotlivé pozice v řetězci se označují jako geny. V případě binárních řetězců tyto geny nabývají hodnot daných symboly 0 a 1. Obecně však mohou nabývat libovolných hodnot v závislosti na řešené problematice. Každému chromozómu je přiřazena hodnota daná jeho kriteriální (fitness) funkcí, která vyjadřuje jeho vhodnost. Množina chromozómů pak tvoří populaci.

Vlastní GA spočívá v opakované aplikaci následujících operátorů:

- selekce;
- křížení;
- mutace.

Populace, na níž jsou výše zmiňované operátory aplikované, se nazývá rodičovská a populace se vytvářející nová.

Operátor selekce pouze kopíruje chromozómy z rodičovské populace do nové s ohledem na jejich hodnotu kriteriální funkce. Rozlišujeme několik variant tohoto operátoru:

roulete-wheel selection - chromozómy s vyšší hodnotou fitness funkce jsou kopírovány do nové populace s větší pravděpodobností, přičemž pravděpodobnost výběru *i*-tého chromozómu (p_i) v populaci o velikosti N se spočte následovně:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j},$$

kde f_j , j = 1, ..., N je hodnota kriteriální funkce *j*-tého chromozómu. Tato varianta je omezena tím, že můžeme hledat pouze maximum a navíc hodnoty fitness funkce musí být kladné.

- exponential selection provádí se stejně jako v předchozím případě, ale nepracujeme zde s původními hodnotami kriteriální funkce, ale s transformovanými spojitou exponenciální transformací, která mapuje minimum na nulu, maximum na jedničku a průměr na 0.5. Tato varianta již nemá nedostatky zmiňované ve variantě předchozí. Navíc umožňuje potlačit velké rozdíly mezi hodnotami fitness funkce nejlepšího a nejhoršího jedince populace.
- truncation selection z každé populace o N prvcích vybíráme $\mathcal{T} \cdot N$ nejlepších, přičemž $\mathcal{T} \in < 0.1, 0.5 > \text{je tzv. truncation rate.}$

Dalším operátorem GA je křížení, které spočívá ve dvou krocích. V prvním kroku náhodně vybereme dvojici chromozómů S_1 , S_2 a ve druhém provedeme vlastní proces výměny informací křížením, čímž dostaneme dva nové chromozómy (jedince, potomky). Je mnoho způsobů, jak tento operátor zrealizovat. Některé z nich jsou následující:

- one point crossover náhodně podle rovnoměrného rozložení se stanoví pozice k v chromozómu a následně se přehodí geny $k + 1, \ldots, M$ chromozómu S_1 se sobě si odpovídajícími geny chromozómu S_2 , přičemž M je délka chromozómu (počet genů).
- two point crossover v tomto případě stanovíme náhodně podle rovnoměrného rozložení pozice k, l $(1 \le k < l \le M)$ a v chromozómech S_1 a S_2 přehodíme navzájem sobě si odpovídající geny k, \ldots, l .
- **uniform crossover** každý gen $1, \ldots, M$ chromozómu S_1 přehodíme se sobě si odpovídajícím genem chromozómu S_2 s pravděpodobností 0.5.

Posledním zmiňovaným operátorem GA je mutace. Tato prochází jednotlivé geny chromozómu a s určitou (obvykle velmi malou) pravděpodobností p_m mění jejich hodnotu z 0 na 1 a naopak. Význam mutace spočívá v potlačení možné ztráty genetické informace obsažené v chromozómech s nižší hodnotou fitness funkce, což může mít za následek zhoršení průběhu hodnot kriteriální funkce nejhoršího jedince v populaci. Tento negativní vliv je ovšem ihned potlačen následující selekcí a křížením.

Celý proces opakované aplikace operátorů genetického algoritmu je založen na postupném vylepšování populace a konvergenci do stavu, kdy celá populace je již tvořena jen těmi nejlepšími jedinci. Bližší informace o GA se můžeme dozvědět v [Mühlenbein, Schlierkamp-Voosen, 1992; 1993] a [Vondrák, 1995].

9.3 Breeder Genetic Algorithm - BGA

Algoritmus BGA je založen na stejných principech jako genetický algoritmus. Hlavní rozdíl mezi GA a BGA spočívá v tom, že prvky z prostoru χ jsou re-

prezentovány vektory reálných čísel namísto binárními řetězci. Tento rozdíl vede nutně na modifikaci operátorů křížení a mutace.

Chromozómy budou tedy tvořeny reálnými vektory (body) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \chi$ a jednotlivé složky těchto vektorů budou geny. Nechť **u** a **v** jsou rodičovské chromozómy a **w** je chromozóm potomka, pak můžeme definovat následující varianty operátorů zobecněného křížení (recombination) a mutace:

Recombination

(a) Discrete recombination - DR

$$w_i = u_i$$
 nebo v_i ,

kde pravděpodobnost výběru u_i nebo v_i je 0.5.

(b) Extended line recombination - ELR

 $w_i = u_i + \alpha (v_i - u_i),$

kde koeficient α vybíráme náhodně z intervalu < $-\delta, 1 + \delta >$.

(c) Extended intermediate recombination - EIR

$$w_i = u_i + \alpha_i (v_i - u_i),$$

kde koeficient α_i je zvolen náhodně v rozsahu $< -\delta, 1 + \delta >$. Koeficient rozšíření δ se volí v obou případech obvykle 0.25.

Geometrický význam uvedených variant operátoru křížení je následující: DR pouze náhodně prohazuje geny na sobě si odpovídajících pozicích rodičovských chromozómů (rodičů), čímž se generuje nový chromozóm odpovídající některému z vrcholů *n*-rozměrné krychle definované těmito rodičovskými chromozómy. ELR a EIR generují nové chromozómy lineární kombinací rodičovských, přičemž ELR generuje body na úsečce rodiči určené, zatímco EIR generuje body uvnitř *n*rozměrné krychle rodiči definované. Koeficient δ způsobuje rozšíření prostoru (úsečky, resp. *n*-rozměrné krychle), v němž se nové body generují.

Mutace

Každý gen u_i řetězce **u** je mutován s pravděpodobností p_m . Obvyklá hodnota p_m je $\frac{1}{n}$. Ke každému genu $u_i \in \langle a_i, b_i \rangle$ je definován koeficient $range_i$, jež je ve většině případů roven $0.1(b_i - a_i)$. Rozlišujeme dvě varianty operátoru mutace:

(a) Discrete mutation scheme - DMS

$$w_i = u_i \pm range_i \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j 2^{-j},$$

kde $\alpha_j \in \{0, 1\}$ nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností $\frac{1}{k}$, přičemž k je celé číslo označované jako konstanta přesnosti.

(b) Continuous mutation scheme - CMS

$$w_i = u_i \pm range_i 2^{-k\alpha}$$

kde α je náhodné číslo z intervalu < 0, 1 > a k je opět konstanta přesnosti.

Geometrický význam obou variant operátoru mutace spočívá v generování bodu v *n*-rozměrné krychli se středem v **u** definované body $(u_1 - range_1, \ldots, u_n - range_n)$ a $(u_1 + range_1, \ldots, u_n + range_n)$, přičemž s dosti vysokou pravděpodobností se budou generovat body v blízkosti **u**.

Dodejme ještě pár poznámek k mechanismu výběru: z každé generace o N prvcích vybíráme $\mathcal{T} \cdot N$ nejlepších, přičemž $\mathcal{T} \in < 0.1, 0.5 >$ je tzv. truncation rate. Užíváme tedy variantu operátoru selekce truncation selection zmiňovanou v předchozí části. Podrobnější popis algoritmu BGA můžeme nalézt v [Mühlenbein, Schlierkamp-Voosen, 1992; 1993].

9.4 Modified Controlled Random Search Algorithm -MCRS

Algoritmus MCRS je modifikací algoritmu CRS (viz. [Price, 1976]). Tato modifikace spočívá ve znáhodnění operátoru reflexe. Prvek $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \chi$ označme jako individum (jedinec, bod z χ) a množinu individuí jako populaci P. Velikost populace je po celou dobu běhu algoritmu konstantní a je rovna $N \gg n$.

Algoritmus MCRS začíná s populací P o N náhodně vygenerovaných bodech z χ . Tato populace je neustále měněna nahrazováním nejhorších jedinců lepšími, přičemž kvalita každého jedince je dána cenovou funkcí f (kriteriální funkce, fitness funkce). Nového jedince \mathbf{w} získáme aplikací operátoru reflexe na simplex S (množina n + 1 různých, náhodně vybraných bodů z populace P) následovně:

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} - \Gamma(\mathbf{u} - \mathbf{g}),$$

kde **u** je jeden (náhodně vybraný) vrchol simplexu S, **g** je těžiště určené n zbylými vrcholy a Γ je náhodný multiplikativní koeficient.

Podstata modifikace původního Priceova operátoru reflexe spočívá ve znáhodnění multiplikativního koeficientu Γ . Několik rozdělení koeficientu Γ bylo testováno na celé řadě složitých úloh odhadování parametrů nelineární regrese. Ukázalo se, že nejlepších výsledků bylo dosaženo pro koeficient Γ s rozdělením rovnoměrným na intervalu $< 0, \alpha$), kde α je v rozsahu od 4 do 8.

Uvažujme proceduru **Reflexe**, která vypadá následovně:

procedure $\mathbf{Reflexe}(P, var \mathbf{w})$ begin repeat S :=množina n + 1 různých, náhodně vybraných bodů z P; $\mathbf{u} := \mathbf{n}$ áhodně vybraný vrchol simplexu S; $\mathbf{g} := \frac{\sum\limits_{\forall \mathbf{x} \in S, \, \mathbf{x} \neq \mathbf{u}} \mathbf{X}}{n};$ $\Gamma := n \dot{a} hodn \dot{c} \dot{c} slo z intervalu < 0, \alpha);$ $\mathbf{w} := \mathbf{g} - \Gamma(\mathbf{u} - \mathbf{g});$ until $\mathbf{w} \in \chi$;

end,

potom již můžeme velice snadno popsat algoritmus MCRS:

procedure MCRS

```
P := populace N náhodně vygenerovaných bodů z \chi;
begin
   repeat
       Reflexe(P,w);
       if f(\mathbf{w}) < f(\mathbf{w}_{max}) then \mathbf{w}_{max} := \mathbf{w};
```

until splněna podmínka ukončení;

end,

kde \mathbf{w}_{max} je bod z P s největší hodnotou cenové funkce.

Prvky v populaci P je vhodné z důvodu efektivnosti udržovat setříděné podle jejich hodnot kriteriální funkce. Nového jedince s lepší hodnotou fitness funkce než má nejhorší prvek populace potom vložíme do P např. prostřednictvím algoritmu binárního vkládání (binary insert) a onen zmiňovaný nejhorší prvek současně z populace odstraníme.

Žádná speciální podmínka na ukončení algoritmu MCRS není definována. Nejčastěji používané ukončovací kritérium ve většině optimalizačních úloh je

$$f(\mathbf{w}_{max}) - f(\mathbf{w}_{min}) \le \varepsilon$$

přičemž \mathbf{w}_{min} je bod z P s nejnižší hodnotou cenové funkce a ε je vstupní parametr.

Vstupní parametry tohoto algoritmu jsou:

- velikost populace N;
- hodnota koeficientu α z rozdělení Γ ;
- hodnota koeficientu ε v podmínce ukončení;

• specifikace vyhledávacího prostoru χ .

Nastavení vstupních parametrů je ovlivněno úlohou, která je řešena. Je zřejmé, že pro větší hodnoty α a N bude hledání důkladnější. Empiricky zjištěné hodnoty vhodné pro většinu optimalizačních úloh jsou $\alpha = 8$ a $N = \max(5n, n^2)$. Ovšem pro naši třídu úloh, ve kterých je jedno vyhodnocení cenové funkce velmi drahé, se ukázala tato volba koeficientu α nevhodná. Lepších, popř. srovnatelných výsledků s podstatně menším počtem funkčních vyhodnocení bylo dosaženo pro volbu koeficientu $\alpha = 4$.

Žádný důkaz konvergence algoritmu MCRS nebyl doposud proveden. Předpokládá se, že algoritmus MCRS je nejméně tak dobrý jako algoritmus uniform random search, u něhož byla konvergence dokázána (viz. [Bäck, 1992]) pp. 48– 49. Experimentálně na několika problémech bylo ukázáno, že řád konvergence MCRS je mnohem vyšší než u algoritmu uniform random search.

Bližší informace o algoritmu MCRS můžeme nalézt v [Křivý, Tvrdík, 1995] a [Křivý, Tvrdík, 1996].

9.5 Obecné srovnání zmiňovaných algoritmů

Algoritmus MCRS je velmi blízký genetickému algoritmu, přitom reflexe přebírá v tomto algoritmu úlohu křížení z GA, resp. úlohu zobecněného křížení z BGA, pro něž je typická párová reprodukce, zatímco v algoritmu MCRS se nové body (potomci) generují aplikací operátoru reflexe na množinu n + 1 náhodně vybraných simplexových bodů (rodičů). Jedná se tedy o jakousi zobecněnou vícenásobnou reprodukci.

Pravděpodobnost selekce v MCRS není závislá na cenové funkci vybíraného individua, ale díky odstraňování nejhorších jedinců a jejich nahrazování lepšími, se projevuje v populaci tendence samoorganizace.

Operátor mutace není v algoritmu MCRS explicitně zahrnut, ale i tento krok byl již udělán a vede na tzv. evolution strategy (ES2) algoritmus (viz. [Křivý, Tvrdík, 1996] a [Křivý, Tvrdík, 1997]). Experimentálně se ukázalo, že algoritmus ES2 je spolehlivější v hledání "pravého" globálního minima, ale má nižší řád konvergence ve srovnání s MCRS.

Z optimální volby parametrů algoritmu MCRS pro většinu optimalizačních úloh ($\alpha = 8$ a $N = \max(5n, n^2)$) plyne, že pro počet optimalizačních parametrů $n \geq 5$ roste velikost populace kvadraticky v závislosti na n. Čím větší tedy bude velikost populace, tím pomalejší bude již zmiňovaná tendence samoorganizace. Naproti tomu u genetických algoritmů z důvodu implementovaného operátoru mutace je velikost populace takřka nezávislá na počtu optimalizačních parametrů. Dále je známo, že algoritmus CRS dává lepší výsledky než genetické algoritmy, je-li aplikován na hladké funkce a právě toto tvrzení ověřujeme ve druhé kapitole, části 11.1 pro algoritmus MCRS. Zmiňované algoritmy pracují s celou populací bodů (nikoli s jediným bodem), využívají pouze hodnot optimalizované funkce f (nikoli jejích derivací) a respektují stochastické principy reprodukce (selekce a křížení).

10 Realizace optimalizačního procesu

V této části navážeme na kapitolu I, část 4, kde fiktivní oblast Ω je obdélník ($(0, Lx) \times (0, Ly)$ rozdělený na čtvercové elementy s krokem h, resp. H definujícím rektangulaci $\hat{\mathcal{R}}_h$, resp. $\hat{\mathcal{R}}_H$ oblasti Ω , přičemž po částech bilineární funkce sestrojené nad těmito rektangulacemi slouží ke konstrukci prostoru \hat{V}_h , resp. $V_H(\Xi)$.

Aproximace \mathcal{O}_h množiny přípustných oblastí \mathcal{O} bude určena oblastmi ω_h , jejichž hranice je tvořena po částech Bezierovou křivkou 2. řádu. Víme již, že každá Bezierova křivka 2. řádu je jednoznačně určena svým počátečním, koncovým a řídícím bodem, přičemž počet řídících bodů je stejný jako počet počátečních, resp. koncových bodů a je roven n_c .

Dovnitř fiktivní oblasti Ω vložíme pomyslnou růžici tvořenou paprsky vycházejícími ze středu $S = \left(\frac{Lx}{2}, \frac{Ly}{2}\right)$ oblasti Ω (viz. obrázek 7). Na těchto paprscích



Obrázek 7: Znázornění růžice tvořené paprsky, na nichž se pohybují řídící body.

se budou pohybovat v případě zadání podmínky na hladkost hranice $\partial \omega$ pouze řídící body. Pokud oblast ω obsahuje "rohy", budou se na těchto paprscích pohybovat jak body řídící, tak i počáteční (tedy i koncové). Pohyb bodů na paprscích je omezen reálnými konstantami C_0 a C_1 znázorněnými na obrázku 7. čtverečky, t.j.

$$C_0 \le \|Z - \mathcal{S}\| \le C_1,$$

kde Z je příslušný řídící, resp. počáteční bod a $0 \leq C_0 < C_1$.

Množinu přípustných oblastí ${\mathcal O}$ můžeme nyní zapsat následovně:

 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}(C_0, C_1) = \{ \omega \subset \Omega \mid C_0 \leq \|X - \mathcal{S}\| \leq C_1 \quad \forall X \in \partial \omega \},\$

t.j. \mathcal{O} je množina všech podoblastí oblasti Ω , jejichž celá hranice se nachází uvnitř mezikruží určeného středem \mathcal{S} a poloměry C_0 a C_1 .

11 Numerické příklady

Zde uvádíme výsledky několika modelových úloh tvarové optimalizace, u nichž byla využita k numerické realizaci stavového problému některá ze zmiňovaných variant metody fiktivních oblastí. K vlastní minimalizaci jsou použity algoritmy globální optimalizace uvedené ve druhé kapitole, části 9.

Příklad 1 Nechť rozměry fiktivní oblasti Ω jsou Lx = Ly = 8, krok diskretizace stavového problému $h = \frac{1}{2}$, parametr ukončení metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-4}$ a

$$\mathcal{O} = \{ \omega \in \mathcal{M}(1.4, 2.9) \mid |\omega| = 4\pi \}$$

je množina přípustných oblastí. Na libovolné oblasti $\omega \in \mathcal{O}$ uvažujeme následující stavovou úlohu:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = 4 \quad \mathrm{v} \quad \omega, \quad \omega \in \mathcal{O}, \\ u = 0 \quad \mathrm{na} \quad \partial \omega. \end{cases}$$

Dále označme

$$J_1(\omega) = -4 \int_{\omega} u(\omega) \, dx$$

cenový funkcionál nazývaný compliance. Potom můžeme definovat úlohu tvarové optimalizace

$$\left(\mathbb{P}\right)_{1} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Najdi} \omega^{*} \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J_{1}(\omega^{*}) \leq J_{1}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}, \end{array} \right.$$

jež může být interpretována jako hledání průřezu homogenní tyče mající maximální pevnost při kroucení. Optimální tvar je známý a není to nic jiného než kružnice.

V tomto případě požadujeme hladkost hranice $\partial \omega$ a proto předmětem optimalizace budou pouze řídící body, jejichž počet je $n_c = 6$. Vektor uzlových hodnot reprezentující Lagrangeův multiplikátor na hranici bude mít tedy 6 komponent. Krok diskretizace pro distribuované Lagrangeovy multiplikátory zvolme H = 2h = 1.0.

Z nutných podmínek optimality a v důsledku vazby na míru oblasti $\omega \in \mathcal{O}$ je možno ukázat, že normálová derivace $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ podél optimální oblasti $\omega^* \in \mathcal{O}$ je

konstantní. V našem konkrétním případě $C_n \equiv \frac{\partial}{\partial \nu}(u(\omega^*)) = -4$. Tato informace je užitečná, neboť může zpětně sloužit k ověření, jak námi (numericky) objevená oblast je optimální. V případě BLM techniky používáme variantu II, neboť v tomto případě odpovídající Lagrangeův multiplikátor je přímo roven C_n (viz. Pozn. 3.1).

Příklad 2 Uvažujme stejné zadání jako v příkladě 1, ale s tím rozdílem, že místo compliance vezmeme následující cenový funkcionál:

$$J_2(\omega) = \int_{\partial \omega} (\lambda - C_n)^2 \, ds,$$

kde $\lambda = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ je příslušný vypočtený Lagrangeův multiplikátor z BLM var. II. Měli bychom opět dostat stejný výsledek, jako u příkladu 1. Tento příklad mimochodem ukazuje, že BLM techniku + variantu II můžeme použít tehdy, když cenový funkcionál obsahuje normálové derivace řešení u.

Příklad 3 Rozměry fiktivní oblasti Ω jsou Lx = Ly = 8, krok diskretizace stavového problému $h = \frac{1}{2}$, parametr ukončení metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$ a

 $\mathcal{O} = \{ \omega \in \mathcal{M}(1.0, 2.5) \mid |\omega| = 2\pi \}$

je množina přípustných oblastí. Stavová úloha je definovaná následovně:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \quad \mathbf{v} \quad \omega, \quad \omega \in \mathcal{O}, \\ u = 0 \quad \mathrm{na} \quad \partial \omega, \end{cases}$$

kde

$$f = -\Delta u_z,$$

přičemž

$$u_z = 4 - \left(x - \frac{Lx}{2}\right)^2 - 4\left(y - \frac{Ly}{2}\right)^2.$$

Definujme úlohu tvarové optimalizace

$$\left(\mathbb{P}\right)_{3} \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Najdi} \ \omega^{*} \in \mathcal{O} \ \mathrm{takov}\acute{e}, \, \check{z}e \\ J_{3}(\omega^{*}) \leq J_{3}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}, \end{array} \right.$$

kde

$$J_3(\omega) = \int_{\omega} \left(u(\omega) - u_z \right)^2 \, dx.$$

Je snadno vidět, že jedno z řešení úlohy $(\mathbb{P})_3$ je oblast

$$\omega_z: \quad \frac{\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{L}\mathbf{x}}{2}\right)^2}{4} + \left(\mathbf{y} - \frac{\mathbf{L}\mathbf{y}}{2}\right)^2 < 1.$$

V tomto případě opět požadujeme hladkost hranice $\partial \omega$ a proto předmětem optimalizace budou pouze řídící body, jejichž počet je nyní $n_c = 8$. Vektor uzlových hodnot reprezentující Lagrangeův multiplikátor na hranici bude mít tedy 8 komponent. Krok diskretizace pro distribuované Lagrangeovy multiplikátory zvolme H = 2h = 1.0.

Příklad 4 Uvažujme stejné zadání jako v příkladě 3, ale zaměňme daný cenový funkcionál za následující:

$$J_4(\omega) = \int_{\Lambda} (u(\omega) - u_z)^2 \, dx,$$

kde Λ je libovolná pevně daná obdélníková podoblast oblasti $\omega_z.$

Cílem tohoto příkladu bylo ověřit, jak malá může být cílová oblast Λ , pomocí níž můžeme identifikovat oblast ω_z . Oblast Λ je na obrázcích vyšrafována.

Příklad 5 Nechť

$$\mathcal{O} = \{ \omega \in \mathcal{M}(0.5, 1.5) \mid |\omega| = 1.5342 \}$$

je množina přípustných oblastí, rozměry fiktivní oblasti Ω jsou Lx = Ly = 3, krok diskretizace stavového problému $h = \frac{3}{16}$ a parametr ukončení metody sdružených gradientů $\varepsilon = 10^{-5}$. Na libovolné oblasti $\omega \in \mathcal{O}$ definujme stavovou úlohu

$$(\mathcal{P}) \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{rrr} -\Delta u = f & \mathrm{v} & \omega, \quad \omega \in \mathcal{O}, \\ u = 0 & \mathrm{na} & \partial \omega, \end{array} \right.$$

kde

přičemž

$$f = -\Delta u_z,$$

$$u_{z} = \left(x - \frac{Lx}{2} + c\right) \left(\alpha(y) - x\right) \left(y - \frac{Ly}{2} + c\right) \left(\frac{Ly}{2} + c - y\right),$$
$$\alpha(y) = \frac{3}{8} \sin\left(\frac{\pi\overline{y}}{2c}\right) + \frac{Lx}{2} + c,$$
$$\overline{y} = y - \frac{Ly}{2} + c, \quad c = 0.5625.$$

Je jednoduché ověřit, že řešení u_z stavového problému (\mathcal{P}) odpovídá oblasti ω_z , která je tvořena vnitřní částí "křivočarého obdélníka", jehož křivá strana je dána grafem funkce $x = \alpha(y)$ (viz. obr. 4).

Dále definujme úlohu tvarové optimalizace

$$(\mathbb{P})_5 \qquad \qquad \begin{cases} \text{Najdi } \omega^* \in \mathcal{O} \text{ takové, že} \\ J_5(\omega^*) \leq J_5(\omega) \quad \forall \omega \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

kde

$$J_5(\omega) = \int_{\omega} \left(u(\omega) - u_z \right)^2 \, dx.$$

Je vidět, že jedno z řešení úlohy $(\mathbb{P})_5$ je právě oblast ω_z .

Podmínka na hladkost hranice $\partial \omega$ v tomto případě není požadována, protože hranice oblasti ω_z , která je jedním z řešení $(\mathbb{P})_5$, obsahuje rohy, t.j. je nehladká a proto předmětem optimalizace budou jak body řídící, tak i počáteční. Počet řídících i počátečních bodů je stejný a je roven $n_c = 4$. Vektor uzlových hodnot reprezentující Lagrangeův multiplikátor na hranici bude mít tedy 4 komponenty. Krok diskretizace pro distribuované Lagrangeovy multiplikátory volíme $H = 2h = \frac{3}{8}$.

Poznámka 11.1 Ve druhé kapitole, části 8 jsme se zmiňovali o vlivu locking effectu projevujícím se v případě distribuovaných Lagrangeových multiplikátorů, pokud triangulace $\hat{\mathcal{T}}_H \equiv \hat{\mathcal{T}}_h$ (v praktické realizaci rektangulace $\hat{\mathcal{R}}_H \equiv \hat{\mathcal{R}}_h$). Obrázek 8 znázorňuje tento fenomén prostřednictvím grafu cenového funkcionálu $J_5(\omega)$ z příkladu 5, který je v tomto případě funkcí dvou optimalizačních parametrů (řídícího bodu B_2 a počátečního, resp. koncového bodu I_3 , jež se pohybují na zadaných paprscích), přičemž ostatní parametry jsou fixovány.



Obrázek 8: Znázornění vlivu locking effectu na chování cílové funkce.

11.1 Porovnání zmiňovaných algoritmů globální optimalizace prostřednictvím dosažených výsledků

V této části porovnáváme navzájem optimalizační algoritmy uvedené ve druhé kapitole, části 9. Konkrétní přehled srovnávaných algoritmů vypadá následovně:

- MCRS modified controlled random search algorithm (popsaný v kapitole druhé, části 9.4);
- BGA breeder genetic algorithm (popsaný v kapitole druhé, části 9.3);

 GA_{tu} — GA s tzv. truncation selection a uniform crossover;

 GA_{t2} — GA s tzv. truncation selection a two point crossover;

 GA_{eu} — GA s tzv. exponential selection a uniform crossover;

 GA_{e2} — GA s tzv. exponential selection a two point crossover.

Optimalizační proces realizovaný postupně jednotlivými výše uvedenými algoritmy jsme nechali proběhnout několikrát za sebou pro příklady 1 a 5. Nastavení parametrů optimalizačních algoritmů bylo následující:

MCRS

- velikost populace N byla n^2 , přičemž n je počet optimalizovaných parametrů;
- hodnota koeficientu α z rozdělení Γ byla rovna 4;
- hodnota koeficient
u ε není zadaná z důvodu užití jiné ukončovací podmínky;

BGA

- velikost populace byla 20;
- pravděpodobnost křížení $p_c = 0.8;$
- pravděpodobnost mutace $p_m = 1/n$, kde n je opět počet optimalizovaných parametrů;
- truncation rate $\mathcal{T} = 0.3$;
- koeficient rozšíření $\delta = 0.25;$
- konstanta přesnosti k = 20;
- $range_i = 1.0$.

GA (všechny modifikace)

- pravděpodobnost křížení $p_c = 0.6;$
- pravděpodobnost mutace $p_m = 0.004;$
- truncation rate $\mathcal{T} = 0.3$ (byl-li užit);
- elitism = 1 (počet nejlepších jedinců automaticky kopírovaných do další populace).

Podmínka ukončení optimalizačního procesu byla ve všech případech stejná a spočívalala v omezení počtu vyhodnocení cenové funkce (iterací) číslem 1000. Na obrázku 9 jsou vidět typické průběhy hodnot cenové funkce nejlepšího individua v závislosti na počtu iterací pro BGA. Obrázek 10 pak ukazuje průměr z těchto průběhů.



Obrázek 9: Typické průběhy hodnot cenové funkce nejlepšího individua pro BGA.

Nyní budeme sledovat konvergenci optimalizačních algoritmů na nejmenším, největším a průměrným počtu iterací potřebných k dosažení třech zvolených funkčních hodnot (úrovní). Výsledky pro všechny funkční úrovně a každý optimalizační algoritmus jsou shrnuty v tabulkách 1 a 2, které odpovídají příkladům 1 a 5, přičemž k numerické realizaci stavové úlohy jsme v příkladě 1 užili Lagrangeovy multiplikátory na hranici var. II a v příkladě 5 distribuované Lagrangeovy multiplikátory s $H \equiv 2h$. Význam jednotlivých sloupců je následující:

 $J_i, i \in \{1, 5\}$ - funkční úroveň;

min(max) - minimální (maximální) počet funkčních vyhodnocení potřebných k dosažení požadované úrovně ze všech běhů optimalizačního algoritmu;



Obrázek 10: Průměr z průběhů znázorněných na obr. 9.

mean - počet funkčních vyhodnocení potřebných k dosažení požadované úrovně u průměru ze všech běhů optimalizačního algoritmu.

	MCRS		BGA			GA_{tu}			
$-J_1$	\min	\max	mean	\min	\max	mean	\min	\max	mean
88.20	480	730	560	291		465	349		755
88.25	500	830	680	320		552	465		
88.30	680		920	320		784	465		
	GA_{t2}								
		GA_{t2}			GA_{e2}			GA_{eu}	ļ
$-J_1$	min	GA_{t2} max	mean	min	GA_{e2} max	mean	min	GA_{ev} max	mean
$-J_1$ 88.20	min 153	GA_{t2} max	mean 590	min 204	GA_{e2} max	mean	min 59	GA_{eu} max	mean
$-J_1$ 88.20 88.25	min 153 153	GA_{t2} max	mean 590 590	min 204 262	GA_{e2} max	mean 	min 59 59	GA_{eu} max	mean

Tabulka 1:

Jestliže požadovaná úroveň nebyla dosažena po 1000 funkčních vyhodnoceních, potom je odpovídající políčko tabulky vyplněno vodorovnou čarou. Číselná hodnota v libovolném políčku tabulky označeném max vyjadřuje fakt, že požadované úrovně bylo dosaženo ve všech bězích optimalizačního algoritmu. Naproti tomu číslo v libovolném místě sloupce min vyjadřuje skutečnost, že alespoň jeden z běhů optimalizačního algoritmu se dostal na požadovanou úroveň.

V kapitole II, části 9.5 jsme se zmiňovali o tom, že algoritmus CRS dává lepší výsledky ve srovnání s genetickými algoritmy, je-li aplikován na hladké

Tabulka 2:

		MCR	S		BGA			GA_{tu}	
$J_5 * (10^{-6})$	\min	\max	mean	\min	\max	mean	\min	\max	mean
10	290	740	540	134	324	210	286	780	571
7	410	900	740	172	894	324	419		
5	770			495	—	894			
		GA_{t2}			GA_{e2}			GA_{eu}	, ,
$J_5 * (10^{-6})$	min	GA_{t2} max	mean	min	GA_{e2} max	mean	min	GA_{eu} max	mean
$J_5 * (10^{-6})$ 10	min 77	GA_{t2} max	mean	min 457	GA_{e2} max	mean	min 134	GA_{eu} max	mean 495
	min 77 229	GA_{t2} max	mean 	min 457 571	GA_{e2} max	mean 	min 134 229	GA_{eu} max	mean 495 685

funkce. Průběhy cenových funkcionálů J_1 a J_5 nejsou v našem případě příliš komplikované a přesto BGA dosahuje srovnatelných výsledků při výrazně nižším počtu potřebných funkčních vyhodnocení než MCRS a zároveň je mnohem spolehlivější než všechny ostatní modifikace GA. Ovšem, je třeba upozornit, že algoritmus MCRS dosáhl ve všech bězích optimalizačního procesu uspokojivého výsledku (dosáhl alespoň jedné ze sledovaných funkčních úrovní), kdežto BGA se v některých bězích nedostal na žádnou z nich (viz. tabulka 1).

Shrneme-li předchozí odstavec, pak můžeme prohlásit, že co se týče rychlosti (počtu funkčních vyhodnocení), je pro naši třídu úloh nejlepší z testovaných optimalizačních algoritmů BGA a co se týče spolehlivosti MCRS. Z tohoto důvodu uvádíme dále výsledky (grafické znázornění nalezeného optimálního tvaru oblasti a odpovídající hodnotu cenového funkcionálu) příkladů 1–5 pouze pro tyto dva posledně zmiňované algoritmy (viz. Výsledky numerických příkladů ke kapitole II).

Závěr

Zhodnocení výsledků numerických příkladů je uvedeno vždy na závěr dané kapitoly. V první kapitole jsme ukázali výhody i nevýhody užití metody fiktivních oblastí k numerické realizaci stavové úlohy a ve druhé pak klady a zápory užití metody fiktivních oblastí pro řešení úloh tvarové optimalizace. Dále jsme v kapitole II prezentovali některé algoritmy globální optimalizace, jejichž účinnost jsme následně porovnali na několika modelových úlohách.

Velká část dosažených výsledků bude v brzké době publikována v renomovaném časopise Journal of Global Optimization (viz. [Haslinger, Jedelský, Kozubek, Tvrdík, 1998]). V tomto článku je ještě navíc oproti této práci popsána jedna varianta metody fiktivních oblastí založená na metodě optimálního řízení. Tato varianta je následně užita k řešení Neumannovy okrajové úlohy následujícího tvaru:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \mathbf{v} \quad \omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \mathrm{na} \quad \partial \omega. \end{cases}$$

Jak jsme se již zmiňovali v úvodu, tak na tuto práci bude navazovat práce doktorandská. Její náplní bude vše, co bylo doposud zrealizováno ve 2D, zrealizovat ve 3D a poté to modifikovat pro potřeby řešení úloh elasticity.

Reference

- [Daňková, Haslinger, 1996] Daňková, J. and Haslinger, J: Numerical realization of a fictitious domain approach in shape optimization. Part I: distributed controls, Appl. Math. 41, No2 (1996), 123-147
- [Girault, Glowinski, 1995] Girault, V. and Glowinski, R.: Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 12, No3 (1995), 487-514
- [Glowinski, Kearsley, Pan, Periaux, 1995] Glowinski, R., Kearsley, A. J., Pan, T. W. and Periaux, J.: Numerical simulation and optimal shape for viscous flow by a fictitious domain method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20, No8 (1995), 695-711.
- [Haslinger, Jedelský, 1996] Haslinger, J. and Jedelský, D.: Genetic algorithms and fictitious domain based approaches in shape optimization, Struct. Optimiz., 1996.
- [Haslinger, Jedelský, Kozubek, Tvrdík, 1998] Haslinger, J., Jedelský, D., Kozubek, T. and Tvrdík, J.: Genetic and random search methods in optimal shape design problems (1998) (v publikaci).
- [Haslinger, Klarbring, 1995] Haslinger, J. and Klarbring, A.: Fictitious Domain / mixed finite element approach for a class of optimal shape design problems, RAIRO, M²AN, 29, No4 (1995), 435-450.
- [Haslinger, Neittaanmäki, 1988] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P.: Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications, J. Wiley, Chichester - New York, 1988.
- [Haslinger, Neittaanmäki, 1996] Haslinger, J. and Neittaanmäki, P.: Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design, 2nd Edition, J. Wiley, Chichester - New York, 1996.
- [Haslinger, Tomas, Maître, 1998] Haslinger, J., Tomas, L. and Maître, F.: Fictitious domains methods with distributed Lagrange multipliers. Part I: application to the solution of elliptic state problems. Part II: application to the solution of shape optimization problems, 1998.
- [Peichl, Kunisch, 1995] Peichl, G. and Kunisch, K.: Shape Optimization for Mixed Boundary Value Problems based on an Embedding Domain Method, publication No41, University of Graz, September 1995.
- [Pironneau, 1984] *Pironneau, O.*: Optimal Shape Design for Elliptic Systems, Springer series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1984.

- [Tomas, 1997] Tomas, L.: Optimisation de forme et domaines fictifs: Analyse de nouvelles formulations et aspects algorithmiques; thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [Bäck, 1992] *Bäck, T.*: 1992, 'Evolutionary Algorithms in Theory and Practice', Oxford University Press, New York
- [Křivý, Tvrdík, 1995] Křivý, I. and Tvrdík, J.: 1995, 'The Controlled Random Search Algorithm in Optimizing Regression Models', Comput. Statist. and Data Anal., No20, pp. 229–234
- [Křivý, Tvrdík, 1996] Křivý, I. and Tvrdík, J.: 1996, 'Stochastic Algorithms in Estimating Regression Models', A. Prat (Ed.), COMPSTAT 1996. Proceedings in Computational Statistics, Physica-Verlag 1996, Heidelberg, pp. 325– 330
- [Křivý, Tvrdík, 1997] Křivý, I. and Tvrdík, J.: 1997, 'Some Evolutionary Algorithms for Optimization', MENDEL'97. 3rd International Mendel Conference on Genetic Algorithms, (Tech. Univ. of Brno, June 1997). Brno, PC-DIR 1997, pp. 65–70
- [Nelder, Mead, 1964] Nelder, J.A., Mead, R.: 1964, 'A simplex method for function minimization', Computer J., No7, pp. 308-313
- [Price, 1976] Price, W. L.: 1976, 'A controlled random search procedure for global optimisation', Computer J., No20, pp. 367–370
- [Vondrák, 1995] Vondrák, I.: 1995, 'Umělá inteligence a neuronové sítě', skripta VŠB-TU Ostrava.
- [Mühlenbein, Schlierkamp-Voosen, 1992] Mühlenbein H., Schlierkamp-Voosen D.: 1992, 'How Genetic Algorithms Really Work: Mutation and Hillclimbing', In Männer, R. & Manderick, B. (Eds.), 'Parallel Problem Solving From Nature', North-Holland, Amsterdam, pp. 15–26
- [Mühlenbein, Schlierkamp-Voosen, 1993] Mühlenbein H., Schlierkamp-Voosen D.: 1993, 'Predictive models for the breeder genetic algorithm, I. Continuous parameter optimization', Evolutionary Computation, Vol1, No1, pp. 25–49

Výsledky numerických příkladů ke kapitole I

Seznam

Výsledky příkladu 1	44
• BLM var. I	44
• BLM var. II	47
• DLM s $H \equiv h$	50
• DLM s $H \equiv 2h$	53
Výsledky příkladu 2	56
• BLM var. I	56
BLM var. IBLM var. II	56 58
 BLM var. I BLM var. II DLM s H ≡ h 	56 58 60
 BLM var. I BLM var. II DLM s H ≡ h DLM s H ≡ 2h 	56 58 60 63

Výsledky příkladu 1





Obrázek 11: Vypočtené řešení stavové úlohy.

8.4103e-001
5.3274e-001
1.0007 e-001
5.3274e-001

Tabulka 3: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\omega)}$
3/64	1.62260e-1	2.21591e-2
3/32	1.64708e-1	2.19362e-2
3/16	1.65582e-1	2.08942e-2

Tabulka 4: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega)$.

Krok h	Počet iterací metody CG
3/64	3
3/32	3
3/16	3

Tabulka 5: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega)$.

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.01462.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
3/64	4.7365
3/32	4.7813
3/16	4.9395

Tabulka 6: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.



Obrázek 12: Znázornění obdélníkové oblasti $\Lambda \subset \omega$ (šrafovaně).

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\Lambda)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\Lambda)}$
3/64	1.70191e-2	2.73366e-3
3/32	1.65671 e-2	2.70522e-3
3/16	1.51853e-2	2.15631e-3

Tabulka 7: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\Lambda)$ a $L^2(\Lambda)$.

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\Lambda)$ je

$$\alpha = -0.08225.$$

<u>BLM var. II</u>



Obrázek 13: Vypočtené řešení stavové úlohy.

-3.3915e-001
-2.2020e-001
-3.1044e-001
-2.2020e-001

Tabulka 8: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\omega)}$
3/64	4.43628e-2	5.56793e-3
3/32	4.58941e-2	5.46078e-3
3/16	4.91823e-2	6.69719e-3

Tabulka 9: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega)$.

Krok h	Počet iterací metody CG
3/64	3
3/32	3
3/16	3

Tabulka 10: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.07439.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
3/64	4.7365
3/32	4.7813
3/16	4.9395

Tabulka 11: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.



Obrázek 14: Znázornění obdélníkové oblasti $\Lambda \subset \omega$ (šrafovaně).

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\Lambda)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\Lambda)}$
3/64	3.71132e-3	1.03108e-3
3/32	4.12682e-3	8.15202e-4
3/16	6.89044 e-3	2.59317e-3

Tabulka 12: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\Lambda)$ a $L^2(\Lambda).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\Lambda)$ je

$$\alpha = 0.44633.$$

$\underline{DLM \ s \ H} \equiv \underline{h}$



Obrázek 15: Vypočtené řešení stavové úlohy.



Obrázek 16: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$
3/64	1.24575e-2	1.30630e-3
3/32	1.55829e-2	1.52819e-3
3/16	2.57354e-2	2.62394e-3

Tabulka 13: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega).$

Krok h	Počet iterací metody CG
3/64	44
3/32	29
3/16	25

Tabulka 14: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.52337.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
3/32	$3.3450 \mathrm{e}{+20}$
3/24	3.1727e + 21
3/16	2.1165e + 20

Tabulka 15: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.



Obrázek 17: Typické rozložení spektra matice \mathcal{A} $(h = \frac{3}{32})$.



Obrázek 18: Vypočtené řešení stavové úlohy.



Obrázek 19: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\omega)}$
3/64	1.14967e-2	3.47413e-3
3/32	1.56575e-2	5.16695e-3
3/16	2.38412e-2	2.36958e-3

Tabulka 16: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega)$.

Krok h	Počet iterací metody CG
3/64	28
3/32	24
3/16	28

Tabulka 17: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega)$.

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.52613.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
3/32	$4.6853 \mathrm{e}{+19}$
3/24	2.9243e + 19
3/16	8.6601e + 18

Tabulka 18: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.



Obrázek 20: Typické rozložení spektra matice $\mathcal{A}~(h=\frac{3}{32}).$

Výsledky příkladu2

<u>BLM var. I</u>



Obrázek 21: Vypočtené řešení stavové úlohy.

-2.4504e+001
-2.7291e+001
-2.3773e+001
-2.6972e+001
-2.4504e+001
-2.7291e+001
-2.3773e+001
-2.6972e+001

Tabulka 19: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\omega)}$
1/8	4.92740	5.32992e-1
1/4	6.19366	9.92941e-1
1/2	8.49551	1.81997e + 0

Tabulka 20: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega).$

Krok h	Počet iterací metody CG
1/8	2
1/4	3
1/2	3

Tabulka 21: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.39293.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
1/8	$1.09841 e{+1}$
1/4	1.25030e + 1
1/2	1.62683e + 1

Tabulka 22: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.

<u>BLM var. II</u>



Obrázek 22: Vypočtené řešení stavové úlohy.

-4.4127e+000 -7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000 -4.4127e+000 -7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000	
-7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000 -4.4127e+000 -7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000	-4.4127e + 000
-7.8035e+000 -7.2677e+000 -4.4127e+000 -7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000	-7.7350e+000
-7.2677e+000 -4.4127e+000 -7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000	-7.8035e+000
-4.4127e+000 -7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000	-7.2677e + 000
-7.7350e+000 -7.8035e+000 -7.2677e+000	-4.4127e + 000
-7.8035e+000 -7.2677e+000	-7.7350e+000
-7.2677e + 000	-7.8035e+000
	-7.2677e + 000

Tabulka 23: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\omega)}$
1/8	1.47938	1.86054 e-1
1/4	1.81662	2.18254e-1
1/2	2.47081	3.53163e-1

Tabulka 24: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega)$.

Krok h	Počet iterací metody CG
1/8	2
1/4	3
1/2	3

Tabulka 25: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.37000.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
1/8	1.09841 e + 1
1/4	$1.25030 \mathrm{e}{+1}$
1/2	1.62683e + 1

Tabulka 26: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.

$\underline{DLM \ s \ H} \equiv \underline{h}$



Obrázek 23: Vypočtené řešení stavové úlohy.



Obrázek 24: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$
1/8	1.19578	3.28811e-1
1/4	1.52806	3.71053e-1
1/2	3.12248	4.79800e-1

Tabulka 27: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega).$

Krok h	Počet iterací metody CG
1/8	39
1/4	28
1/2	27

Tabulka 28: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha = 0.69237.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
1/4	1.57448e + 20
1/3	$3.05936e{+}21$
1/2	$1.47708 \mathrm{e}{+19}$

Tabulka 29: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.



Obrázek 25: Typické rozložení spektra matice \mathcal{A} $(h = \frac{3}{32})$.



Obrázek 26: Vypočtené řešení stavové úlohy.



Obrázek 27: Odpovídající Lagrangeův multiplikátor.

Krok h	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{H^1(\omega)}$	Chyba $\ \hat{u}_h(\omega) - u_z\ _{L^2(\omega)}$
1/8	1.06489	6.26734 e-1
1/4	1.50345	8.81204e-1
1/2	2.14318	1.66618e + 0

Tabulka 30: Chyba řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ a $L^2(\omega).$

Krok h	Počet iterací metody CG
1/8	24
1/4	26
1/2	9

Tabulka 31: Počet iterací metody CG potřebných k výpočtu $\hat{u}_h(\omega).$

Řád konvergence vypočtený z chyby řešení $\hat{u}_h(\omega)$ v normě prostoru $H^1(\omega)$ je

 $\alpha=0.50453.$

Krok h	Číslo podmíněnosti ${\cal A}$
1/4	$3.66150\mathrm{e}{+19}$
1/3	$5.57695e{+}18$
1/2	$1.90952e{+}09$

Tabulka 32: Číslo podmíněnosti matice $\mathcal A$ v závislosti na h.



Obrázek 28: Typické rozložení spektra matice \mathcal{A} $(h = \frac{3}{32})$.