

VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA INFORMATIKY A APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Modelování kompositů pomocí řešičů  
založených na dualitě

Poděkování:

Zde bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce, prof. Zdeňkovi Dostálovi za trpělivost a rady spojené s vyvstalými problémy, Martinovi Foldynovi za pozorné přečtení práce, ing. Tomáši Kozubkovi za rady spojené s implementací metody konečných prvků, a celé katedře Aplikované matematiky.

Diplomová práce vznikla za podpory grantu Grantové Agentury České Republiky, číslo grantu 103/01/0400.

#### Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne 9.5.2001

Oldřich Vlach

# Obsah

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Úvod</b>                                                             | <b>4</b>  |
| <b>1 Zadání geometrie kompozitu</b>                                     | <b>5</b>  |
| <b>2 Spojitá formulace úlohy</b>                                        | <b>6</b>  |
| 2.1 Dekompozice pojiva . . . . .                                        | 6         |
| 2.2 Označení oblastí a hranic . . . . .                                 | 7         |
| 2.3 Podmínky rovnováhy pružných těles . . . . .                         | 7         |
| <b>3 Diskretizace a MKP</b>                                             | <b>10</b> |
| 3.1 Linearizace $\vec{u}$ po trojúhelnících . . . . .                   | 10        |
| 3.2 Vztahy pro trojúhelníkový prvek MKP . . . . .                       | 11        |
| 3.3 Vztahy pro diskretizované těleso . . . . .                          | 13        |
| 3.4 Vztahy pro soustavu diskretizovaných těles . . . . .                | 14        |
| <b>4 Duální problém</b>                                                 | <b>16</b> |
| 4.1 Převod do duálních proměnných . . . . .                             | 16        |
| 4.2 Fyzikální význam Lagrangeových multiplikátorů . . . . .             | 19        |
| 4.3 Nutná modifikace úlohy s lepením – přidání tečného lepení . . . . . | 19        |
| 4.4 Odtrhávání slepených částí . . . . .                                | 20        |
| 4.5 Nutná modifikace úlohy bez lepení . . . . .                         | 21        |
| 4.6 Modifikace . . . . .                                                | 22        |
| <b>5 Řešení QP problému</b>                                             | <b>25</b> |
| 5.1 Přiblížení problému . . . . .                                       | 25        |
| 5.2 Popis řešení QP problému . . . . .                                  | 26        |
| 5.3 Algoritmus . . . . .                                                | 27        |
| <b>6 Implementace</b>                                                   | <b>28</b> |
| 6.1 Popis programu . . . . .                                            | 28        |
| 6.2 Diskretizace elementu . . . . .                                     | 29        |
| 6.3 Řešení odtrhávání . . . . .                                         | 32        |
| <b>7 Numerické experimenty</b>                                          | <b>33</b> |
| 7.1 Úloha bez lepení . . . . .                                          | 33        |
| 7.2 Úloha s lepením . . . . .                                           | 38        |
| <b>Závěr</b>                                                            | <b>41</b> |

# Úvod

Technická praxe je stále častěji vyžaduje materiály s vlastnostmi, které jak přírodní, tak běžné umělé materiály nemají. Některé z těchto vlastností lze docílit u kompozitních materiálů se speciálně navrženou strukturou. Je však třeba tuto strukturu navrhnout, nebo alespoň pro už navrženou strukturu zjistit zkoumané vlastnosti materiálu. Vezmeme-li v úvahu fakt, že strukturalizace kompozitů někdy začíná už při rozměrech řádově setin milimetru, a vezmeme-li v úvahu cenu výroby a s ní spojenou cenu vývoje takového materiálu, je zřejmé, potřeba postihnout skutečné chování matematickým modelem.

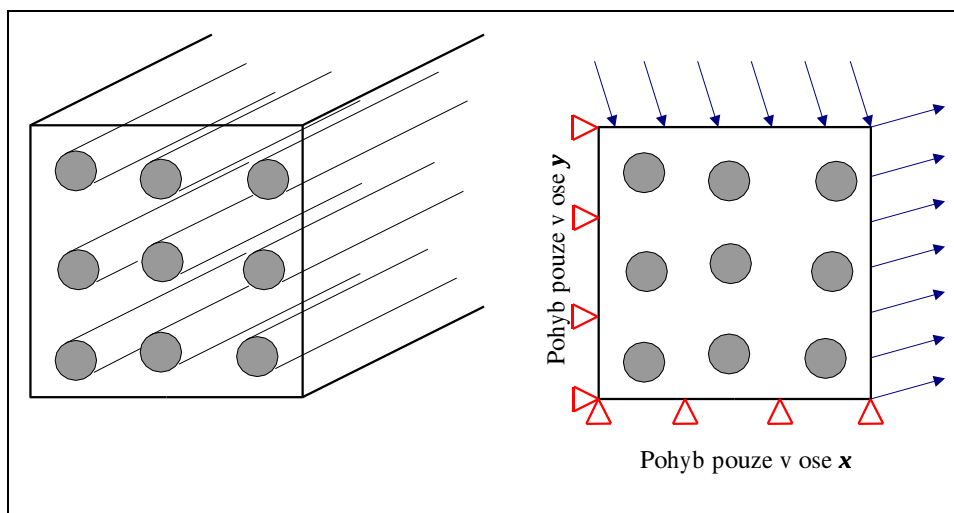
Při modelování kompozitního materiálu bývá materiál rozdělen na malé „buňky“. O každé buňce se předpokládá, že je z látky o daných vlastnostech. Vlastnosti kompozitu jsou pak určeny uspořádáním buňek, a fyzikálními vlastnostmi každé buňky. Materiál jednotlivých buňek někdy bývá opět kompozit. Pokud jsou vlastnosti materiálů buňek popsány fyzikálními veličinami, není potřeba buňky dále diskretizovat. Tato práce se nezabývá návrhem struktury kompozitu, pouze modelováním jeho fyzikálních vlastností. Cílem bude modelové popsání materiálu s odlišnými vlastnostmi v tahu a tlaku. Docílené vlastnosti pak bývají upotřebeny v jednotlivých buňkách.

Chování kompozitu bude modelováno pomocí metody konečných prvků. Model bude postihovat i jev „lepení“ mezi vlákny kompozitu a pojivem. Z neznámých, určujících deformaci každého bodu materiálu, bude model převeden pomocí duální formulace na problém o neznámých určující vlastnosti sil v bodech kontaktu vláken a pojiva. Rozměr tohoto problému bude pochopitelně mnohem nižší než rozměr původní úlohy. Po určitých transformacích pak bude úloha převedena na problém nalezení minima  $n$ -rozměrné kvadratické funkce s omezeními ve tvaru rovnosti a nerovnosti. Po zpětných transformacích a přepočtu z duálních proměnných dostaneme hledané posunutí každého bodu materiálu.

# Kapitola 1

## Zadání geometrie kompozitu

Jako modelovou úlohu jsem dostal kompozitní materiál složený z pojivového materiálu, ve kterém jsou rovnoběžně uloženy vlákna shodného poloměru. Vlákna mohou být na svém povrchu k pojivovému materiálu přilepena. Geometrie kompozitu je dále ve směru vláken neměnná. Síly působí na materiál pouze ve směru kolmém na směr vláken. Předpokládáme pouze rovinnou deformaci, a tak původně trojrozměrná úloha bude řešena ve dvou rozměrech. Vše je lépe patrné na obrázku 1.1. Od této chvíle se budu věnovat pouze dvourozměrné úloze.



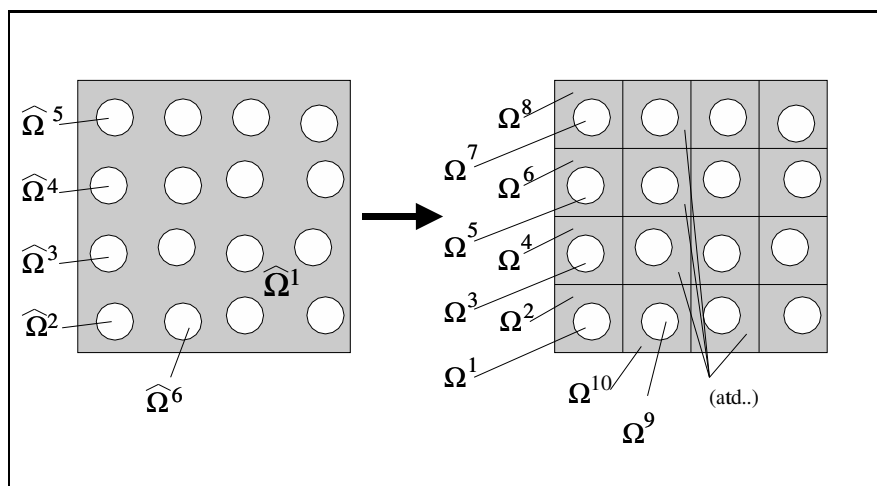
Obrázek 1.1: Zkoumaný kompozit v 3D a v 2D řezu (včetně působení sil)

## Kapitola 2

# Spojité formulace úlohy

### 2.1 Dekompozice pojiva

Představme si systém  $1 + n$  homogenních izotropních těles, z nichž každé vymezuje oblast  $\hat{\Omega}^i$  v  $\mathbb{R}^2$  s dostatečně hladkou hranicí  $\hat{\Gamma}^i$ . Tato tělesa odpovídají pojivu a jednotlivým vláknům. Oblast odpovídající pojivu kompozitního materiálu pak z jistých důvodů rozdělíme na  $n$  disjunktních podoblastí, což je zobrazeno na obrázku 2.1.

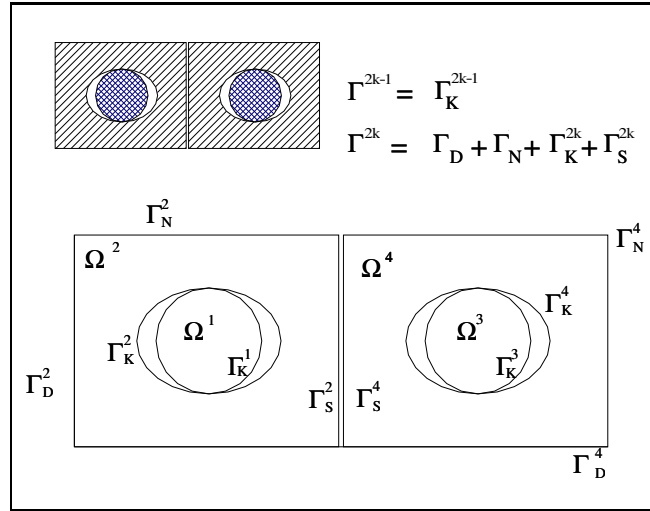


Obrázek 2.1: Dekompozice oblasti pojiva  $\hat{\Omega}^1 \xrightarrow{na} \Omega^{2k}$  a přeznačení oblastí vláken  $\hat{\Omega}^{k+1} \xrightarrow{na} \Omega^{2k-1}$

Od tohoto místa budu označovat čtvereček s vláknem jako *element*.

## 2.2 Označení oblastí a hranic

Každému  $i$ -tému elementu v kompozitu o  $ex \times ey$  elementech přísluší dvě oblasti. Oblast vlákna  $\Omega^{2i-1}$ , a oblast pojiva  $\Omega^{2i}$ . Každé  $p$ -té oblasti pak odpovídá její hranice  $\Gamma^p$ . To je patrné i z obrázku 2.2. Pro ilustraci jsem si zvolil obrázek pouze se dvěma vlákny, na kterém je však patrné vše podstatné. Hranice  $\Gamma^p$  pro liché  $p$ , to jest hranice vlákna, splývá s hranicí  $\Gamma_K^p$ , kde může dojít ke kontaktu s okolním pojivem. Hranice  $\Gamma^p$  pro sudé  $p$ , se mohou rozložit na souvislé části:  $\Gamma^p = \Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p \cup \Gamma_K^p \cup \Gamma_S^p$ , to jest hranice pojiva, kde označení postupně odpovídá částem hranic s Dirichletovou  $\Gamma_D^p$  a Neumannovou  $\Gamma_N^p$  okrajovou podmínkou, dále pak hranici  $\Gamma_K^p$  na které může dojít ke kontaktu s hranicí vlákna  $\Gamma_K^{p-1}$  (zde budou podmínky na případné „lepení“ a nepronikání oblastí do sebe), a nakonec hranici  $\Gamma_S^p$ , která odpovídá sousední hranici  $\Gamma_S^j$  po dekompozici oblastí. Na hranice  $\Gamma_S^p$  a  $\Gamma_S^j$  pak budou uplatňovány umělé lepicí podmínky, které navzájem si odpovídající body z obou hranic ztotožní (slepí nekonečně velkou silou). To také odpovídá skutečnosti – jedná se totiž o stále jedno těleso – pojivo.



Obrázek 2.2: Oblasti kompozitu po dekompozici

## 2.3 Podmínky rovnováhy pružných těles

Teorie pružnosti dokazuje, že vektor posunutí  $\vec{u} = [u(x, y), v(x, y)]^T$  jednotlivých bodů jednoho tělesa je vektorová funkce vektorového argumentu, která minimalizuje potenciál  $J(\vec{u})$  tělesa. Pro  $2n$  těles je pak celkový potenciál dán

součtem potenciálů jednotlivých těles:

$$J(\vec{u}) = \sum_{p=1}^{2n} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} \vec{\epsilon}(\vec{u})^T [D] \vec{\epsilon}(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega^p} \vec{f}^T \vec{u} d\Omega^p - \int_{\Gamma_N^p} \vec{h}^T \vec{u} d\Gamma_N^p \right\} \quad (2.1)$$

Kde

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}(\vec{u}) &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T && \text{je vektor deformace} \\ \vec{f} &= \left[ \vec{f}_x(x, y), \vec{f}_y(x, y) \right]^T && \text{je vektor objemových sil} \\ \vec{h} &= \left[ \vec{h}_x(x, y), \vec{h}_y(x, y) \right]^T && \text{je vektor povrchových sil} \end{aligned}$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{matice plyne z linearizo-} \\ \text{vaného Hookova zákona} \\ \text{pro rovinnou deformaci} \end{array}$$

$E \dots$  je Youngův modul pružnosti pro zvolený materiál

$\nu \dots$  je Poissonova konstanta pro zvolený materiál

Dále dokazuje, že elastický potenciál  $a^p(\vec{s}^p, \vec{t}^p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} \vec{\epsilon}(\vec{s})^T [D] \vec{\epsilon}(\vec{t}) d\Omega^p$  splňuje pro každou oblast přirozená omezení, takže

$$a^p(\vec{s}^p, \vec{t}^p) = a^p(\vec{t}^p, \vec{s}^p) \quad \wedge \quad a^p(\vec{s}^p, \vec{s}^p) \geq 0$$

Neumannova okrajová podmínka je zahrnuta v minimalizovaném funkcionálu  $J(\vec{u})$ . Dirichletovu okrajovou podmínku zapíšeme jako

$$u(0, y) = 0 \quad \forall (0, y) \in \Gamma_D^{2k} \quad \forall k \quad (2.2)$$

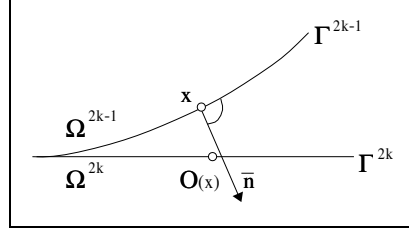
$$v(x, 0) = 0 \quad \forall (x, 0) \in \Gamma_D^{2k} \quad \forall k \quad (2.3)$$

Zbývá ještě zahrnout podmínky nepronikání oblastí do sebe, a spojení rozložených oblastí pojiva v jeden celek. Podmínku nepronikání nejprve odvodím pro obecnější případ. Tato podmínka bude jakýmsi lineárním přiblížením skutečnosti. Předpokládejme, že pro každý bod na hranici  $\Gamma_K^{2k-1}$  oblasti vlákna umíme najít bod na kontaktní hranici  $\Gamma_K^{2k}$  oblasti pojiva. To znamená, že máme spojitou mapovací funkci  $\mathcal{O} : \Gamma_K^{2k-1} \rightarrow \Gamma_K^{2k}$  která spojitě přiřadí každému bodu  $[x, y] \in \Gamma_K^{2k-1}$  na hranici vlákna bod  $[\hat{x}, \hat{y}] \in \Gamma_K^{2k}$ , který je k němu velmi blízký. Zde obě hranice nemusí být na počátku nutně v kontaktu. Postačuje, když pro každý bod  $x \in \Gamma_K^{2k-1}$  umím najít bod  $\mathcal{O}(x) \in \Gamma_K^{2k}$ . Linearizovaná podmínka nepronikání 2.4 přiblížena na obrázku 2.3 pak vypadá

$$\left( \vec{u}^{2k-1}(\vec{x}) - \vec{u}^{2k}(\mathcal{O}(\vec{x})) \right) \vec{n} \leq \overbrace{(\mathcal{O}(\vec{x}) - \vec{x}) \vec{n}}^{\text{pro náš případ} = 0} \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_K^{2k-1} \quad (2.4)$$

Dále pro každé dvě oblasti  $\Omega^{2i}$  a  $\Omega^{2j}$  vzniklé z dekompozice pojiva, které spolu souvisí částí hranice, označme tuto společnou hranici jako  $\Gamma^{2i,2j}$ . Z předchozího označení pak platí

$$\Gamma^{2i,2j} \in \Gamma_S^{2i} \quad \wedge \quad \Gamma^{2i,2j} \in \Gamma_S^{2j}$$



Obrázek 2.3: Bodová podmínka nepronikání

Nyní si představme Sobolevův prostor

$$\wp = H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \dots \times H^1(\Omega^{2k}),$$

a jako  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^E \cap \mathbf{I}^K$  označme množinu všech přípustných posunutí, kde

$$\mathbf{K}^E = \{ \vec{v} = [\vec{v}_{(x)}, \vec{v}_{(y)}] \in \wp : \text{platí 2.5} \wedge \text{2.6} \}$$

$$\vec{v}_{(x)}(0, y) = 0 \wedge \vec{v}_{(y)}(x, 0) = 0 \quad (2.5)$$

$$\forall \vec{x} \in \Gamma^{2i,2j} : \vec{v}_{\Omega^{2i}}(\vec{x}) = \vec{v}_{\Omega^{2j}}(\vec{x}) \quad \forall \Gamma^{2i,2j} \quad (2.6)$$

zahrnuje Dirichletovu podmínku a podmínku spojitosti posunutí pojiva po dekompozici (vnější podmínky elementu), a

$$\mathbf{K}^I = \left\{ \vec{v} \in \wp : \forall k, \forall \vec{x} \in \Gamma_K^{2k-1} : (\vec{v}(\vec{x}) - \vec{v}(\mathcal{O}(\vec{x}))) \cdot \vec{n} \leq 0 \right\}$$

zahrnuje linearizovanou podmínku nepronikání těles na kontaktu pojiva s vláknem (vnitřní podmínky elementu).

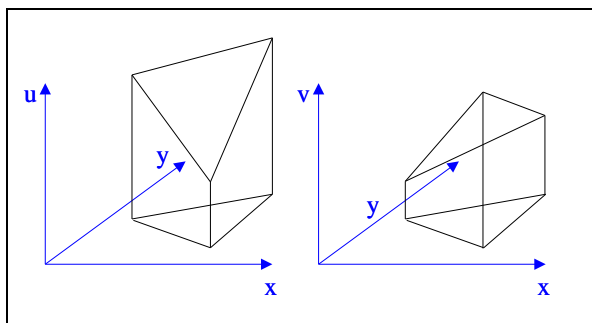
Připomínám, že hledáme vektorovou funkci  $\vec{u}$ , která každému bodu  $[x, y]$  přiřadí vektor, o který se tento bod následkem sil  $\vec{f}$  a  $\vec{h}$  posune. Hledáme ji jako  $\vec{u} \in \mathbf{K}$  pro minimum potenciální energie

$$J(\vec{u}) \leq J(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{K} \quad (2.7)$$

## Kapitola 3

# Diskretizace a metoda konečných prvků

### 3.1 Linearizace $\vec{u}$ po trojúhelnících



Obrázek 3.1: Představa lineární vektorové funkce vektorového argumentu

Úlohu budu řešit pomocí Metody konečných prvků (MKP). Řešení budu hledat jako spojitou plochu složenou z po částech lineárních plošek. Všechny oblasti se rozloží na trojúhelníky. Posunutí  $\vec{u} = [u(\vec{x}), v(\vec{x})]$  bude uvnitř jednotlivých trojúhelníků lineární, na hranicích trojúhelníků bude spojité. Dá se to představit, jako že  $u(\vec{x})$  a  $v(\vec{x})$  jsou dvě trojúhelníkové plošky jako na obrázku 3.1. Takováto lineární funkce je určena hodnotami  $u$  a  $v$  ve vrcholech trojúhelníku, což se dá zapsat jako

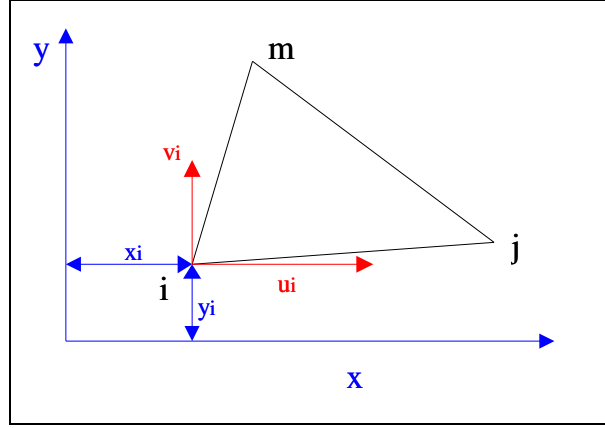
$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.1)$$

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (3.2)$$

$$\vec{u}(x_i, y_i) = (u_i, v_i) \quad \vec{u}(x_j, y_j) = (u_j, v_j) \quad \vec{u}(x_m, y_m) = (u_m, v_m) \quad (3.3)$$

kde  $i, j, m$  jsou indexy určující vrcholy trojúhelníku. Takovýto trojúhelník si lze představit jako na obrázku 3.2. Výsledná funkce posunutí všech bodů kompozitu pak bude součtem posunutí pro jednotlivé trojúhelníky.

### 3.2 Vztahy pro trojúhelníkový prvek MKP



Obrázek 3.2: Označení trojúhelníku

Pro výpočet funkcionálu  $J(\vec{u})$  potřebujeme znát funkci  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ . Z předchozího odstavce plyne, že  $\vec{u}$  můžeme určit z posunutí vrcholů trojúhelníků. Z rovnic 3.1, 3.2 a 3.3 plyne:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned}$$

Tyto dvě soustavy mají řešení

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) & \alpha_4 &= \frac{1}{2\Delta} (a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) & \alpha_5 &= \frac{1}{2\Delta} (b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) & \alpha_6 &= \frac{1}{2\Delta} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j & b_i &= y_j - y_m & c_i &= x_m - x_j \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m & b_j &= y_m - y_i & c_j &= x_i - x_m \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i & b_m &= y_i - y_j & c_m &= x_j - x_i \end{aligned}$$

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

Předchozí rovnice zapíšeme do matic pro  $\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  dostaneme

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} =$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{N}}} \begin{bmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \\ u_m & v_m \end{bmatrix} \right)^T$$

a pro  $\vec{\epsilon} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T$  dostaneme

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} [0 \ 1 \ 0] \hat{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}, [0 \ 0 \ 1] \hat{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix}, [0 \ 0 \ 1] \hat{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} + [0 \ 1 \ 0] \hat{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}$$

Pro potenciální energii trojúhelníku

$$J_{\Delta}(\vec{u}) = \int_{\Delta} a(\vec{u}, \vec{u}) dS - \int_{\Delta} \vec{f}^T \vec{u} dS - \int_{\Gamma_{\Delta}} \vec{h}^T \vec{u} dl$$

pak pomocí předchozích rovnic a pomocí označení 3.4 dostaneme

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}^T \quad \begin{matrix} \text{ozn.} \\ = \\ \mathbf{u}_{\diamond} \\ \text{jako} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{ozn.} \\ = \\ \mathbf{x}_{\diamond} \\ \text{jako} \end{matrix} \quad (3.4)$$

$$J(\vec{u}) = J(\vec{u}(\mathbf{u}_\diamond)) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_\diamond^T \mathbf{H}^T \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{H} \mathbf{u}_\diamond}_{\text{linearizované } \vec{e}} - \int_{\Delta} \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix} \mathbf{x}_\diamond dS \mathbf{N} \mathbf{u}_\diamond - \int_{\Gamma_\Delta} \begin{bmatrix} h_x(x, y) \\ h_y(x, y) \end{bmatrix} \underbrace{\mathbf{x}_\diamond \mathbf{N} \mathbf{u}_\diamond}_{\text{linearizované } \vec{u}} d\Gamma$$

Každou oblast dělíme na mnoho trojúhelníků s malým obsahem. Proto můžeme hodnotou  $\vec{f}$  považovat na trojúhelníku za konstantní. Za  $[f_x, f_y]$  dosadíme hodnoty v těžišti, do  $\mathbf{x}_\diamond$  pak souřadnice těžiště, a za  $dS$  obsah trojúhelníku  $i, j, m$ .

Integrál po křivce  $\Gamma$  pak provedeme na úsečkách kde je síla  $\vec{h}$  definována, a použijí lichoběžníkové pravidlo:

$$\int_{ab} h(\vec{x}) ds = \frac{1}{2} (h(\vec{x}_a) + h(\vec{x}_b)) ||\text{délka úsečky } ab||$$

### 3.3 Vztahy pro diskretizované těleso

Dosazením do vztahu pro energetický potenciál a rozšířením na celé těleso dostáváme

$$J(\vec{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\forall \Delta_{ijm}} \mathbf{u}_{\diamond_{ijm}}^T \overbrace{\mathbf{H}^T \mathbf{D} \mathbf{H}}^{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{\diamond_{ijm}} - \sum_{\forall \Delta_{ijm}} [f_x(\vec{t}_\Delta), x f_x(\vec{t}_\Delta), y f_x(\vec{t}_\Delta), f_y(\vec{t}_\Delta), x f_y(\vec{t}_\Delta), y f_y(\vec{t}_\Delta)] \Delta S \mathbf{N}_{\Delta_{ijm}} \mathbf{u}_{\diamond_{ijm}} - \sum_{\substack{\forall i, j: i, j \in \Gamma_N, i < j \\ i \text{ je soused } j}} \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{2} [h_x(\vec{x}_i), h_y(\vec{x}_i), h_x(\vec{x}_j), h_y(\vec{x}_j)] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$\vec{t}_\Delta \dots$  je těžiště trojúhelníku  $ijm$

Sumy v předešlých vzorcích lze postihnout jedinou maticí. Pokud diskretizované těleso obsahuje  $z$  bodů, tak dostáváme

$$J(\vec{u}) = J(u_1, v_1, \dots, u_z, v_z) = \frac{1}{2} [u_1, v_1, \dots, u_z, v_z] \mathbf{K} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_z \\ v_z \end{bmatrix} - [u_1, v_1, \dots, u_z, v_z] \mathbf{f}$$

Všimněme si, že neznámou, kterou se snažíme vypočítat, už nehledáme jako libovolnou vektorovou funkci  $\vec{u}(x, y)$  souřadnic  $x$  a  $y$ , ale jako po částech lineární funkci danou parametry  $x_1 \dots x_z$ . Pokud zjistíme  $x_1 \dots x_z$ , můžeme vypočítat funkční hodnotu v libovolném bodě tělesa. Matice  $\mathbf{K}$  bývá nazývána jako *matice tuhosti*. Vektor  $\mathbf{f}$  (neplést s  $f$  nebo  $\vec{f}$ ) postihuje silové působení na těleso. Ve vektoru  $\mathbf{f}$  je popsána Neumanova okrajová podmínka (působení vnějších sil), a působení objemových sil na těleso.

Je zajímavé, že vlastnosti matice tuhosti souvisí se skutečným fyzikálním modelem natolik, že neobsahuje takzvané tuhé pohyby, což jsou posun celého tělesa ve směru osy  $x$ , ve směru osy  $y$  a rotace. Toto se v ní projeví tak, že tři její řádky jsou lineární kombinací zbývajících. Pokud je na části hranice předepsaná Dirichletova okrajová podmínka, tak (podle toho jak je předepsaná) snižuje počet lineárně závislých řádků, nebo odstraňuje singularitu. Dirichletova okrajová podmínka říká, které body fixujeme v jednom (nebo také obou) ze směrů os  $x$  a  $y$ . Do matice tuhosti a do vektoru  $\mathbf{f}$  ji dostaneme například tak, že pokud chceme fixovat bod  $\vec{x}_i$  ve směru osy  $x$ , řádek a sloupec matice  $\mathbf{K}$  odpovídající prvku  $u_i$  nahradíme nulami. Na  $(2i-1, 2i-1)$ -tou pozici (odpovídající prvku  $u_i$ ) matice  $\mathbf{K}$  dosadíme nenulové větší číslo  $[10^6]$ . Do vektoru  $\mathbf{f}$  pak na  $(2i-1)$ -tou pozici dosadíme 0.

Matice tuhosti  $\mathbf{K}$  je symetrická (stejně jako byl symetrický elastický potenciál  $a(\vec{u}, \vec{v})$ ) a pozitivně definitní (respektive semidefinitní, pokud je singularní). Navíc je velmi řídká. Na každém řádku má nenulové prvky pouze na pozicích odpovídající indexům bodů, se kterými sousedí. Pro vhodnou indexaci bodů, je matice pásová. Takovýto tvar je vhodný pro výpočet inverzní matice (respektive inverzní matice její regulární submatice) pomocí LU, nebo Cholevského rozkladu.

### 3.4 Vztahy pro soustavu diskretizovaných těles

V této části se budeme zabývat popisem celé soustavy  $n$  těles. Od tohoto místa budeme pojivo, rozdělené dekompozicí na více oblastí, chápat jako více těles. Pro  $i$ -té těleso už umíme zkonstruovat matici tuhosti  $\mathbf{K}_i$ , a vektor  $\mathbf{f}_i$ . Z nich lze sestavit matici tuhosti  $K$  a vektor  $f$  celé soustavy. Připomínám, že  $\mathbf{K}_i$  jsou většinou singularní matice

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix}$$

Matice  $K$  a vektor  $f$  však nezaručují podmínku nepronikání těles, ani nepopisují skutečnost, že v důsledku dekompozice zde máme dvojice bodů, které jsou ve skutečnosti shodné (spojitost pojiva).

Linearizovanou podmínku nepronikání zajistíme omezením  $B_I u \geq 0$ , kde  $B_I$  bude  $m \times n$ ,  $m < n$  matice s hodnotí  $m$ . Pro každé dva body  $a$  a  $b$ , které byly na počátku u sebe, bude mít  $B_I$  jeden řádek. Řádky  $b_i$  matice  $B_I$  budou nulové, s vhodně umístěnými souřadnicemi vnějších normál v těchto dvou bodech (označeny jako  $[n_x^a, n_y^a], [n_x^b, n_y^b]$ ). Omezení zajistí, že se dva původně sousedící body vlákna a pojiva mohou pouze vzdalovat. Hodnota  $c$  udávající původní normálovou vzdálenost bodů  $a$  a  $b$ , je v našem případě nulová.

$$b_i \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & n_x^a & n_y^a & \cdots & n_x^b & n_y^b & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ u_a \\ v_a \\ \vdots \\ u_b \\ v_b \\ \vdots \end{array} \right]}^u \end{array} \leq c = 0 \quad (3.5)$$

Protože je pojivo po dekompozici rozděleno do více oblastí, zbývá zajistit spojitost posunutí  $u$  bodů pojiva na hranicích které dekompozicí vznikly. Zajistíme to omezením ve tvaru  $B_E u = 0$ , kde pro každé dva body, které chceme ztotožnit, bude mít matice  $B_E$  dva nulové řádky s výjimkou čísel 1 a  $-1$  na příslušných místech. První řádek zamezí rozdílu v  $x$ -ových složkách posunutí, druhý pak v  $y$ -ových. Pokud budeme chtít body  $a$  a  $b$  ztotožnit, bude podmínka vypadat takto

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ u_a \\ v_a \\ \vdots \\ u_b \\ v_b \\ \vdots \end{array} \right]}^u \end{array} = 0$$

Řádky matice  $B_I$  musí být lineárně nezávislé. Určité komplikace nastávají v bodech, kde se stýká více oblastí.

Vektor posunutí  $u$  bodů ve vrcholech trojúhelníků pak bude řešením problému kvadratického programování

$$\frac{1}{2} u^T K u - f^T u \rightarrow \min \quad \wedge \quad B_I u \leq 0 \quad \wedge \quad B_E u = 0 \quad (3.6)$$

## Kapitola 4

# Duální problém

### 4.1 Převod do duálních proměnných

Přestože má formulace 3.6 tvar standardního problému kvadratického programování, není vhodná pro numerické řešení. Jeden z důvodů je ten, že matice  $K$  je typicky špatně podmíněná a v našem případě vždy singulární. A za druhé množina přípustných  $u$  daná omezeními v 3.6, je dost obecná na to, aby se dala použít projekce na tuto množinu. Z těchto důvodů je těžké získat ty složky řešení, jenž jsou na hranicích omezení  $B_I u \leq c = 0 \wedge B_E u = 0$ .

Výše zmíněné komplikace redukuje duální teorie konvexního programování. Jak jsem už naznačil, je matice  $K$  singulární. Má tedy neprázdný nulový prostor – jádro, což je způsobeno oblastmi nesvázanými Dirichletovou okrajovou podmínkou.

Lagrangian problému 3.6 vypadá

$$L(u, \lambda_I, \lambda_E) = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u + \lambda_I^T (B_I u - c) + \lambda_E^T B_E u$$

kde  $\lambda_I$  a  $\lambda_E$  jsou Lagrangeovy multiplikátory pro nerovnosti a rovnosti. Pro větší přehlednost zavedeme označení

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_I \\ \lambda_E \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_I \\ B_E \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potom můžeme Lagrangian zapsat zkráceněji jako

$$L(u, \lambda) = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u + \lambda^T (B u - \hat{c}) \quad (4.1)$$

Je známo, že řešení problému 3.6 je ekvivalentní s formulací

$$\text{Najdi } (\hat{u}, \hat{\lambda}) \text{ takové, že } L(\hat{u}, \hat{\lambda}) = \sup_{\lambda_I \geq 0} \inf_u L(u, \lambda) \quad (4.2)$$

Když fixujeme  $\lambda$ , je Lagrangeova funkce  $L(\cdot, \lambda)$  konvexní v první proměnné, a minimální  $u$  pro  $L(\cdot, \lambda)$  splňuje podmínku, nulovosti gradientu

$$Ku - f + B^T \lambda = 0 \quad (4.3)$$

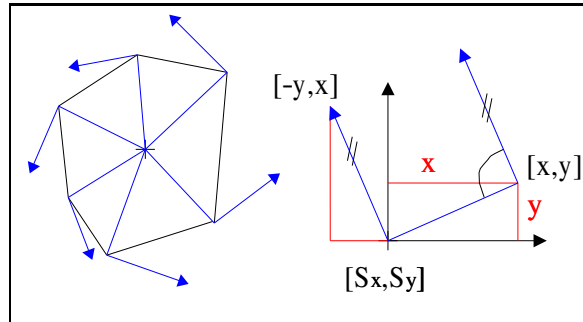
Rovnice 4.3 má netriviální (nenulové) řešení (nás zajímá nenulové řešení – předpokládáme, že k nějakému posunu v důsledku působení sil dojde), pokud  $\lambda$  splňuje

$$f - B^T \lambda \in \text{Im } K \quad (4.4)$$

což lze také vyjádřit, s použitím významu matice  $R$  jejíž sloupce tvoří bázi nulového prostoru matice  $K$ , jako

$$R^T (f - B^T \lambda) = 0 \quad (4.5)$$

Tato matice lze naštěstí lehce zkonstruovat. Zamyslíme-li se nad významem tuhých pohybů (posuny ve směru obou os, a rotace) způsobující lineárně závislé řádky v maticích  $\mathbf{K}_i$ , tedy i v  $K$ , budou sloupce  $R$  popisovat právě tyto pohyby. Pro posun ve směru osy  $x$  pro dané těleso, to bude vektor nul s jedničkami na pozicích  $u_{(i)}$ , pro indexy všech bodů tělesa. Pro směr v ose  $y$  to bude obdobné. Rotaci popíšeme tak, že na každou pozici pro posunutí  $[u_{(i)}, v_{(i)}]$   $i$ -tého bodu se souřadnicemi  $[x_i, y_i]$  zapíšeme  $[-(y_i - S_y), (x_i - S_x)]$ , kde  $[S_x, S_y]$  je přibližně střed oblasti tělesa. Posun středu rotace do středu tělesa je zde však pouze proti numerickým chybám. Pokud by totiž střed rotace byl daleko, vektory rotací jednotlivých bodů by byly téměř rovnoběžné. [Mimochodem tuto chybu jsem udělal, a nebylo snadné zjistit, v čem chyba je]. Pro lepší popis uvádím obrázek (4.1).



Obrázek 4.1: Přiblížení rotace ve sloupci  $R$

Nyní máme zajištěno, že  $\lambda$  splňuje 4.4. Označme  $K^\dagger$  generalizovanou inverzní matici k matici  $K$ . Tato matice splňuje

$$KK^\dagger K = K \quad (4.6)$$

Lze dokázat, že jestliže  $u$  řeší 4.3 (ekvivalentní s 4.5), pak se dá  $u$  dopočítat jako

$$u = K^\dagger (f - B^T \lambda) + R\alpha \quad (4.7)$$

Zbývá určit koeficient  $\alpha$ . Význam Lagrangeových multiplikátorů je popsán v sekci 4.2. Pokud vazby, které multiplikátory popisují praskly, budou multiplikátory nulové. Pokud nepraskly, bude podmínka popsána v řádku matice  $B$ , odpovídající nenulovému multiplikátoru, platit. Pro matici  $\tilde{B}$ , která vznikne vynecháním řádků odpovídajících nulovým koeficientům  $\lambda$ , bude platit  $\tilde{B}u = \hat{c}$ . Po přenásobení rovnice (4.7) zleva členem  $R^T \tilde{B}^T \tilde{B}$  bude

$$\alpha = (R^T \tilde{B}^T \tilde{B} R)^{-1} R^T \tilde{B}^T (\hat{c} - \tilde{B} K^\dagger (f - B^T \lambda)) \quad (4.8)$$

Po dosazení vztahu 4.7 do problému 4.2, úpravě při níž vezmeme v úvahu následující vztahy a vztah 4.5,

$$K = K^T \Rightarrow (K^\dagger)^T = K^\dagger$$

$$(K^\dagger)^T K K^\dagger = K^\dagger$$

$$R^T K = K R = 0 \text{ (nulová matice)}$$

po změně znamének (z toho plyne změna suprema na minimum), a po vynechání pro minimalizaci nepodstatného členu  $\frac{1}{2} f^T K^\dagger f$ , dostáváme vztah 4.9, ve kterém už figuruje pouze proměnná  $\lambda$ .

$$\min \Theta(\lambda) \text{ za podmínek } \lambda_I \geq 0 \wedge R^T (f - B^T \lambda) = 0 \quad (4.9)$$

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T B K^\dagger B^T \lambda - \lambda^T (B K^\dagger f - \hat{c})$$

Je dokázáno, že můžeme použít matice  $K^\dagger$ , která nemusí nutně splňovat všechny podmínky More-Penroseovy pseudoinverze. Vypočte se jako

$$K^\dagger = \text{diag}(\mathbf{K}_1^\dagger, \dots, \mathbf{K}_s^\dagger)$$

kde  $s$  je počet oblastí, a  $\mathbf{K}^\dagger$  je pro regulární matici  $\mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}^{-1}$ , pro singulární se spočítá následovně. Vynecháním určitého řádku a sloupce stejného indexu se počet lineárně závislých řádků vzniklé submatice sníží. Takto postupujeme, dokud nezískáme regulární submatice. Spočteme inverzi takto vzniklé submatice, a dosadíme ji na pozice, které jí odpovídaly. Na vynechaná místa doplníme nuly. Je dokázáno, že takto vzniklá matice odpovídá podmínce 4.6.

Pokud má mít problém 4.9 jednoznačné řešení, nesmí být matice  $R^T B^T$  singulární. Plyne to ze vztahu 4.5. Tuto podmínku však naše matice nesplňují. Bylo to celkem překvapení a museli jsme do problému zavést dodatečnou podmínku. O tom se zmíním v sekcích 4.3 a 4.5.

## 4.2 Fyzikální význam Lagrangeových multiplikátorů

Matice  $B$  popisuje podmínky nepronikání mezi vláknem a pojivem, a ztotožnění bodů, které vznikly dekompozicí z jednoho bodu. Lagrangeovy multiplikátory vystupují ve členu  $\lambda^T (Bx - \hat{c})$  rovnice 4.2 ( $\hat{c}$  je u nás 0). Matice  $B$  popisuje omezení, která klademe na soustavu. Člen  $\lambda^T (Bx - \hat{c})$  má význam penalty za narušení omezujících podmínek. Lagrangeovu funkci  $L(u, \lambda)$  maximalizujeme vzhledem k  $\lambda$ . Čím Lagrangeova funkce větší, tím je soustava ve stavu s vyšší energií.

Fyzikálně to lze interpretovat, jako že  $\lambda$  mají obdobu sil, které působí na každou dvojici bodů, popsanych v řádku matice  $B$ , aby byly splněny podmínky kladené na soustavu. Protože  $\lambda^T (Bx - \hat{c})$  maximalizujeme vzhledem k  $\lambda$ , můžeme předpokládat, že omezující podmínky budou bezesbýtku splněny.

Podmínky dané v  $B_I$  popisují *normálové* síly na kontaktu vlákna a pojiva. Omezení  $\lambda_I \geq \vec{0}$  zamezuje tahu na jejich hranici kontaktu. Povoluje pouze tlak. To odpovídá situaci, kdy obě tělesa nejsou slepena. Pokud změníme omezení na  $\lambda_I \geq \lambda_{\min}$ , dostaneme do soustavy lepení.

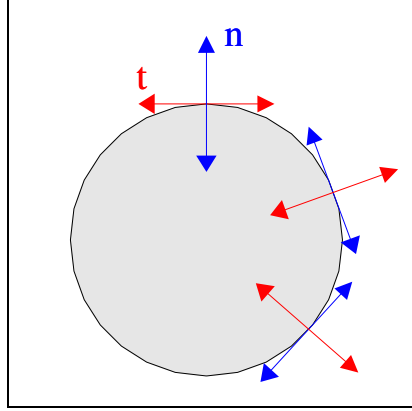
## 4.3 Nutná modifikace úlohy s lepením – přidání tečného lepení

Nyní vysvětlím proč má matice  $R^T B^T$ , tak jak jsem doposud definoval  $R^T$  a  $B^T$ , lineárně závislé řádky. Řádky matice  $B$  popisují omezení na  $\lambda$ , to jest omezení na body, které jsou na hranicích oblastí. Řádky matice  $R^T$  zase popisují mimo jiné rotaci oblastí. Když si představíme, že omezení v  $B$  jsou ve směru vnějších normál, kdežto směr rotace v  $R$  je vždy tečný, jak je vidět na obrázku 4.2, tak je kolmost některých řádků v  $R^T$  a  $B$  zřejmá. Nic na tom nezmění ani když vezmeme rotaci kolem jiného středu. Ta se dá popsat pomocí rotace kolem těžiště tělesa a posunutí. Posunutí je však v  $R$  popsáno taky.

Zde je taky vidět, že kdybychom zvolili vlákna jiného průřezu než přibližně kruhového, tento jev by nenastal, rotace by neměla směr tečen. S touto skutečností, která byla objevena při testování implementace nebylo na počátku počítáno, a tak jsme museli dodat další podmínku.

Protože  $B_I$  popisuje vzájemné působení tělesa a vlákna pouze ve směru vnějších normál, nabízí se v případě s lepením také omezení ve směru tečném. To odpovídá lepení v tečném směru. Matici  $B_I$  proto rozšíříme na

$$B_I = \begin{bmatrix} B_{I_n} \\ B_{I_T} \end{bmatrix}$$



Obrázek 4.2: Směry vektorů rotace kolem středu a vektorů normál jsou na kruhu kolmé

kde  $B_{I_n}$  je původní matice  $B_I$  a  $B_{I_t}$  je matice popisující tečné síly. Ty budou omezeny na maximum a minimum. Ve shodě s notací vzorce (3.5), bude podmínka vypadat takto

$$-\lambda_{I_t}^{max} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -n_y^a & n_x^a & \dots & -n_y^b & n_x^b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}^{B_{I_t}} \overbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ u_a \\ v_a \\ \vdots \\ u_b \\ v_b \\ \vdots \end{bmatrix}}^u \leq \lambda_{I_t}^{max}$$

Konečně vztah (4.9) rozšířený o tečné lepení bude vypadadat takto

$$\min \Theta(\lambda) \text{ za podmínek } \lambda_{I_n} \geq 0 \wedge -\lambda_{I_t}^{max} \leq \lambda_{I_t} \leq \lambda_{I_t}^{max} \quad (4.10)$$

$$\text{a } R^T (f - B^T \lambda) = 0$$

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T B K^\dagger B^T \lambda - \lambda^T (B K^\dagger f - \hat{c})$$

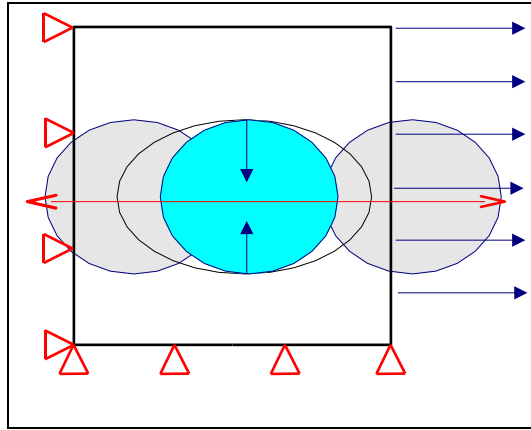
#### 4.4 Odtrhávání slepených částí

Pokud normálové tahové síly překročí určitou mez, dojde na této části původně slepené hranice k odtržení vlákna od pojiva. Stejně tak to platí i pro síly tečné. Musí se také na to, aby se po přetržení normálové vazby v určitém bodě přetrhla v témže bodě i vazba tečná a naopak. Dále o tomto problému v kapitole 6.3.

### 4.5 Nutná modifikace úlohy bez lepení

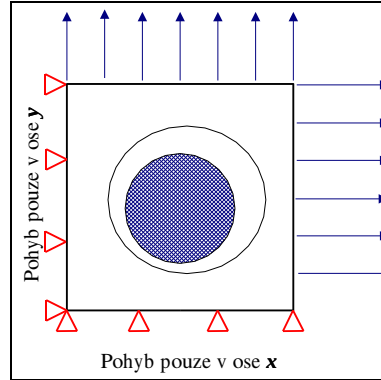
V úloze bez lepení, kde neuvažujeme tření mezi vláknem a pojivem, může k pojivu nijak nepřichycené vlákno rotovat jakkoli. Proto je správné vynechat v matici  $R$  řádky, které rotaci popisují. Zdálo by se, že tím je vše vyřešené, a obejdeme se bez tečného lepení. Matice  $R^T B$  nemá lineárně závislé řádky, a zdálo by se, že zde žádný problém nehrozí. Opak je pravdou. Problémy nastávají při zpětné rekonstrukci. Nemáme totiž nijak zaručeno, že matice  $R^T \tilde{B}^T \tilde{B} R$  ze vztahu (4.8), potřebná k výpočtu  $\alpha$  bude regulární. Nyní si ukážeme, ve kterých případech k singularitě  $R^T \tilde{B}^T \tilde{B} R$  dochází.

V prvním případě je matice  $R^T \tilde{B}^T \tilde{B} R$  singulární. Tento jev vzniká, když na vlákno působí síla jen v jednom bodě, nebo ve dvou, které jsou naproti sobě. Matice  $\tilde{B}$  pak popisuje pouze posun tohoto (resp. těchto) bodů v normálovém směru. To ale nepopisuje posun ve směru kolmém k normálovému. Na obrázku 4.3 je tyrkysově určena správná poloha vlákna, šedě pak některé polohy, které můžeme získat. [MATLAB by jako řešení ponechal vlákno v původní poloze.]



Obrázek 4.3: Nelze jednoduše rekonstruovat posun ve směru osy  $x$

Druhý případ nastane, když jsou všechny normálové multiplikátory nulové. To odpovídá matici  $R^T \tilde{B}^T \tilde{B} R$ , složené ze samých nul. MATLAB řešení takto zadané soustavy vypočte jako nulový vektor. Tahem vnějších sil vzniká štěrba větší než vlákno, na vlákno nevzniká žádná normálová síla. Příklad, kdy k tomu dojde, je naznačen na obrázku 4.4. Při rekonstrukci pak může být vlákno kdekoli. Polohu vlákna ve štěrbině nelze určit. V praxi však vždy na vlákno působí objemová síla (gravitace). Jejím zavedením pak dostaneme normálovou sílu alespoň v jednom bodě vlákna. To pak odpovídá prvnímu případu. Její působení je vidět na obrázku 4.5.



Obrázek 4.4: Bez objemových sil nelze určit polohu vlákna

Pro vyřešení prvního případu pak využijeme tečného lepení z případu s lepením. Velikost tečného lepení dáme velmi malou, takže neovlivní řešení v normálovém směru. Tečné vazby pro nulové normálové zrušíme (praskly), pro nenulové normálové je necháme. Po této úpravě bude matice  $R^T \tilde{B}^T \tilde{B} R$  regulární.

Správné by ovšem bylo dopočítat  $\alpha$  z posunutí odpovídajícího bodu po-  
jiva. Nemuseli bychom počítat s tečnými silami, snížil by se tak rozměr  
úlohy.

## 4.6 Modifikace

Přestože je problém (4.10) mnohem vhodnější pro numerické řešení než (3.6), může být ještě vylepšen (pomiňme rozdíl způsobený přidáním tečného lepení). Označme

$$\begin{aligned} F &= BK^\dagger B^T & \tilde{d} &= BK^\dagger f \\ \tilde{G} &= R^T B^T & \tilde{e} &= R^T f \end{aligned}$$

a necht  $T$  je regulární matice která popisuje ortonormalizační proces řádků matice  $\tilde{G}$ , takže matice

$$G = T \tilde{G}$$

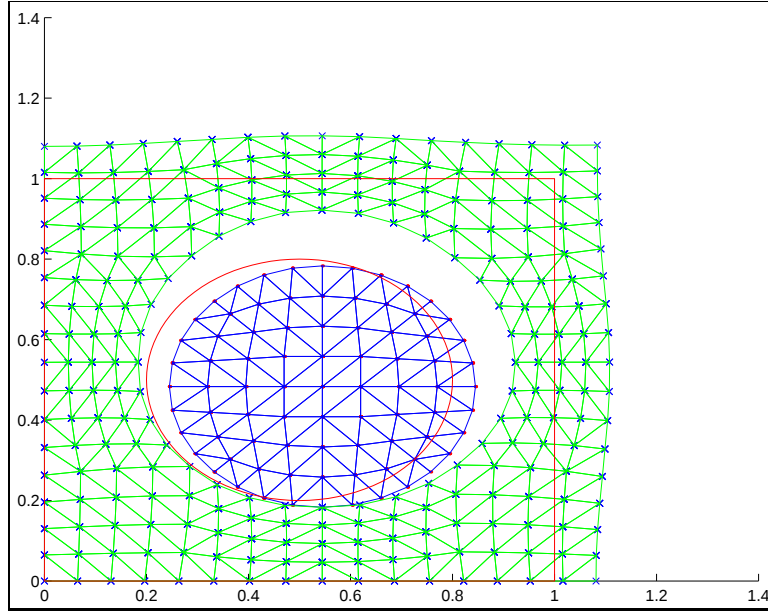
má ortogonální řádky. Dále označíme

$$e = T \tilde{e}$$

problém (4.10) pak vypadá

$$\min \frac{1}{2} \lambda^T F \lambda - \lambda^T \tilde{d} \quad (4.11)$$

$$\text{za podmínek } \lambda_{I_n} \geq 0 \wedge -\lambda_{I_t}^{max} \leq \lambda_{I_t} \leq \lambda_{I_t}^{max} \wedge G\lambda = e$$



Obrázek 4.5: Po zavedení objemových sil je poloha určena

Podmínky na  $\lambda_{I_t}$  a  $\lambda_{I_n}$  se dají sjednotit (omezení mohou zahrnovat i  $\pm\infty$ ):

$$-\lambda_I^{max} \leq \lambda_I \leq \lambda_I^{max}$$

Nyní hledejme řešení 4.11 ve tvaru

$$\lambda = \mu + \bar{\lambda} \quad (4.12)$$

kde  $G\bar{\lambda} = e$ . Protože

$$\frac{1}{2}\lambda^T F \lambda = \frac{1}{2}\mu^T F \mu - \mu^T (\tilde{d} - F\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^T F \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^T \tilde{d}$$

problém (4.11) po návratu do starého značení (tj.  $\mu$  označíme jako  $\lambda$ , ale nezapomeneme na substituci (4.12) a po vyřešení 4.13 k řešení přičteme  $\bar{\lambda}$ ) vypadá takto

$$\min \frac{1}{2}\lambda^T F \lambda - \lambda^T d \quad (4.13)$$

$$\text{za podmínek} \quad -\lambda_I^{max} \leq \lambda_I - \bar{\lambda}_I \leq \lambda_I^{max} \quad \wedge \quad G\lambda = 0 \quad \wedge \quad d = \tilde{d} - F\bar{\lambda}$$

Nyní srovnáme Hessiany  $H_1 = F + \rho\tilde{G}^T\tilde{G}$  a  $H_2 = F + \rho G^T G$  Lagrangeových funkcí problémů (4.10) a (4.13). Nechť všechna vlastní čísla  $F$  náležejí intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nenulová vlastní čísla matice  $\tilde{G}^T\tilde{G}$  náležejí intervalu  $\langle c, d \rangle$ . Potom spektrum Hessianů leží v intervalech

$$\sigma(H_1) \subseteq \langle a, b \rangle \cup \langle a + \rho c, b + \rho d \rangle \quad \sigma(H_2) \subseteq \langle a, b \rangle \cup \langle a + \rho, b + \rho \rangle$$

Pokud je  $\rho$  dost velké (což odpovídá velké přesnosti v omezení na rovnost), a  $c < d$ , potom je spektrum  $H_1$  rozděleno do dvou intervalů, z nichž ten pravý je větší. Jak dokazuje pan Axelsson, počet iterací sdružených gradientů pak závisí na  $\rho$ . V druhém případě mají oba intervaly stejnou velikost. Počet iterací sdružených gradientů  $k$  pak podle článku [1] vzrůstá s číslem podmíněnosti  $\bar{\kappa}(H_2) = 4b/a$ , a pro přesnost  $\epsilon$  je

$$k \leq \frac{1}{2} \text{int} \left( \sqrt{\frac{4b}{a}} \ln \left( \frac{2}{\epsilon} \right) + 1 \right)$$

Je vidět, že nezávisí na  $\rho$ .

Poslední krok modifikace pak vychází z pozorování, že Lagrangián problému (4.13) lze rozložit ortogonálními projektory

$$Q = G^T G \quad \text{a} \quad P = I - Q \quad (4.14)$$

na prostor obrazů  $G^T$  (pomocí  $Q$ ) a nulový prostor  $G$  (pomocí  $P$ ). Problém (4.13) je ekvivalentní s

$$\min \frac{1}{2} \lambda^T P F P \lambda - \lambda^T P d \quad (4.15)$$

$$\text{za podmíněk} \quad -\lambda_I^{max} \leq \lambda_I - \bar{\lambda}_I \leq \lambda_I^{max} \quad \wedge \quad G\lambda = 0 \quad \wedge \quad d = \tilde{d} - F\tilde{\lambda}$$

a Hessian  $H_3 = P F P + \rho Q$  přidruženého Lagrangiánu

$$L(\lambda, \mu, \rho) = \frac{1}{2} \lambda^T (P F P + \rho Q) \lambda - \lambda^T P d + \mu^T G \lambda$$

je projektory  $P$  a  $Q$  rozdělen na invariantní podprostory. Z toho plyne, když označíme  $\langle a_p, b_p \rangle$  interval, ve kterém se nacházejí všechny nenulová vlastní čísla matice  $P F P$ , že vlastní čísla  $H_3$  splňují

$$\sigma(H_3) \subseteq \langle a_p, b_p \rangle \cup \{\rho\} \quad \text{a} \quad \langle a_p, b_p \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$$

a vzoreček pro počet iterací sdružených gradientů problému (4.15) pak vypadá

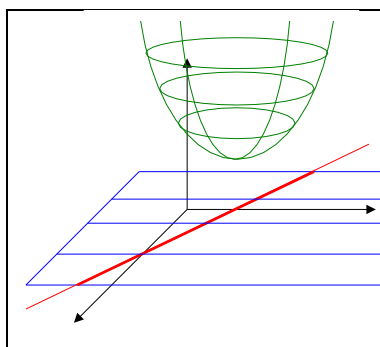
$$k \leq \frac{1}{2} \text{int} \left( \sqrt{\frac{b_p}{a_p}} \ln \left( \frac{2}{\epsilon} \right) + 3 \right)$$

## Kapitola 5

# Řešení problému kvadratického programování omezeného na rovnost a nerovnost

### 5.1 Přiblížení problému

Připomene si znění problému (4.10). Hledá se v něm minimum  $n$ -rozměrné kvadratické funkce s omezením na rovnost a nerovnosti. Obrázek 5.1 se to snaží přiblížit. Omezení na rovnost omezuje přípustnou množinu řešení na podprostor definičního oboru kvadratické funkce. My zde máme jako definiční obor rovinu, a podprostor přibližuje červená přímka. Omezení na nerovnosti je tvaru  $\lambda_i^{min} \leq \lambda_i \leq \lambda_i^{max}$ , pro každé  $i$ . Konstanty  $\lambda_i^{min}$  (resp.  $\lambda_i^{max}$ ) mohou nabývat i hodnoty  $-\infty$  (resp.  $\infty$ ). Na obrázku je to přiblíženo modrým „pulpásem“. Minimum pak hledáme na průniku obou omezení (tučná červená úsečka). V této práci bude pouze naznačen princip řešení. Vše ostatní je v článku [2]



Obrázek 5.1: Přiblížení problému (4.10) ve 3D

## 5.2 Popis řešení QP problému

Problém se budeme snažit řešit numericky. Omezení na rovnost zahrneme do minimalizované funkce, omezení na nerovnost pak budeme kontrolovat v každém iteračním kroku. Pro přehlednost označíme  $F_P = PFP$  a  $d_P = Pd$ . Pak tedy bude Lagrangian problému (4.10) vypadat

$$L(\lambda, \mu, \rho) = \frac{1}{2} \lambda^T F_P \lambda - \lambda^T d_P + \mu^T G \lambda + \frac{1}{2} \rho \|Q\lambda\|^2$$

a gradient Lagrangiánu

$$g(\lambda, \mu, \rho) = F_P \lambda - d_P + G^T (\mu + \rho G \lambda)$$

Přípustné řešení je omezeno nerovnostmi. Dále má omezení na nerovnosti pěkný tvar. Omezena je každá složka zvlášť, a tak se přípustnost řešení nejen snadno ověřuje, ale také je snadná projekce do nerovnostmi přípustné množiny. Řešení a jednotlivé iterace mohou ležet na hranici přípustné množiny. Téměř všechny úlohy z praxe jsou takové, že vždy budou. Množinu všech indexů, které jsou na hranici omezení označme  $\mathcal{A}$ . Bude nás zajímat také *projektovaný gradient*  $g^P = g^P(\lambda, \mu, \rho)$  Lagrangiánu  $L$ , který pro složky na hranici nevede v těchto složkách pryč z nerovnostmi přípustné množiny, a v bodě  $\lambda$  je dán jako

$$\begin{aligned} g_i^P &= g_i & \text{pro } \lambda_i^{min} - \bar{\lambda}_i &\leq \lambda_i \leq \lambda_i^{max} - \bar{\lambda}_i & \text{nebo } i &\notin \mathcal{A} \\ g_i^P &= g_i^\pm & \text{pro } \lambda_i &= \lambda_i^{min} - \bar{\lambda}_i \wedge \lambda_i = \lambda_i^{max} - \bar{\lambda}_i & \text{nebo } i &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$g_i^\pm = \begin{cases} \min(g_i, 0), & \lambda_i = \lambda_i^{min} - \bar{\lambda}_i \\ \max(g_i, 0), & \lambda_i = \lambda_i^{max} - \bar{\lambda}_i \end{cases}$$

Postup řešení bude následující. Množinu indexů rozdělíme na dvě části. V první, označené jako  $\mathcal{A}$ , si budeme uchovávat indexy na hranici omezení na nerovnosti. V druhé, označené  $\mathcal{F}$ , bude zbytek.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \{i \in \mathcal{N} : \lambda_i = \lambda_i^{min} - \bar{\lambda}_i \text{ nebo } \lambda_i = \lambda_i^{max} - \bar{\lambda}_i\} \\ \mathcal{F}(\lambda) &= \{i \in \mathcal{N} : \lambda_i^{min} - \bar{\lambda}_i < \lambda_i < \lambda_i^{max} - \bar{\lambda}_i\} \end{aligned}$$

Kde  $\mathcal{N}$  je množina indexů vektoru  $\lambda$ . Gradient pak rozdělíme také podle těchto složek na

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda) &= g_i^P & \text{pro } i &\in \mathcal{F}(\lambda) & \varphi_i(\lambda) &= 0 & \text{pro } i &\in \mathcal{A}(\lambda) \\ \beta_i(\lambda) &= g_i^P & \text{pro } i &\in \mathcal{A}(\lambda) & \beta_i(\lambda) &= 0 & \text{pro } i &\in \mathcal{F}(\lambda) \end{aligned}$$

Část  $\beta$  jsou jakési „nechtěné“ složky gradientu. Snaží se dostat indexy na hranici zpět dovnitř. Postup iterací pak rozdělíme na dva procesy. V prvním budeme postupovat podle směrů  $\varphi$ , a případně rozšiřovat množinu  $\mathcal{A}$ .

Zde použijeme metodu sdružených gradientů. Pokud násobek  $\beta$  překročí  $\varphi$ , nastane proces zvaný *proportioning*. Zde budeme naopak indexy z  $\mathcal{A}$  uvolňovat. Uvolníme však jen ty, které mají nenulové  $\beta$ . V procesu proportioningu budeme dbát na to, abychom neopustili přípustnou množinu. Pokud krok sdružených gradientů bude mířit ven z přípustné množiny, bude situace složitější. Zjistíme hodnotu funkce  $L$  ve předešlém kroku, a v projekci kroku sdružených gradientů na přípustnou množinu. Pokud se hodnota sníží, vezmeme jako následující iteraci hodnotu po projekci. Pokud ne, zkrátíme krok tak, abychom se nedostali z přípustné množiny ven.

To celé pak bude ve smyčce, která bude stále zpřesňovat omezení na rovnost. Zde se bude měnit  $\mu$ , a zvyšovat hodnota  $\rho$ .

Následující algoritmus je pouze naznačením skutečného. Nejsou v něm popsány procesy v jednotlivých krocích. Vše potřebné lze nalézt v [2].

### 5.3 Algoritmus

*Krok 0* {inicializace parametrů}

nastav  $0 < \alpha < 1$  [0.1] pro zpřesňování rovnosti,

$1 < \gamma$  [10] pro zvyšování penalty,

$\rho_0 > 0$  [50] jako počáteční penaltu,

$\eta_0$  [0.1] pro počáteční přesnost na rovnost,

$M > 0$  [100] jako vyvažovací poměr,

$\mu_0$  [ $\vec{0}$ ] a  $k = 0$

*Krok 2* {sdružené gradienty a proportioning}

najdi  $\lambda^k$  tak, že  $\|\varphi + \beta\| \leq M \|G\lambda^k\|$

*Krok 3* Jestliže  $\|\varphi + \beta\|$  a  $\|G\lambda^k\|$  jsou dostatečně malé, pak  $\lambda^k$  je řešení

*Krok 4* if  $\|G\lambda^k\| \leq \eta_k$

then  $\mu^{k+1} = \mu^k + \rho_k G\lambda^k$ ,  $\rho_{k+1} = \rho_k$ ,  $\eta_{k+1} = \alpha\eta_k$

else  $\mu^{k+1} = \mu^k$ ,  $\rho_{k+1} = \gamma\rho_k$ ,  $\eta_{k+1} = \eta_k$

*Krok 5*  $k = k + 1$  jdi na krok 1.

## Kapitola 6

# Implementace

### 6.1 Popis programu

Pro implementaci byl zvolen program MATLAB, na který má škola licenci. Programové prostředí MATLAB bylo vhodné snadnou vyjadřitelnost matematických operací. Vlastní program je rozdělen do několika částí.

Hlavní a řídicí je skript **test\_matrice**. Obsahuje všechny parametry úlohy, volání podprogramů pro generaci potřebných matic, volá řešič QP problému, řeší odtrhávání, a vykresluje výsledky. Ostatní funkce jsem seskupil podle témat, kterých se týkají. Zde je jejich hrubý popis.

#### Generování sítě

**sit\_bez\_diry\_kruh**—Vrací souřadnice sítě kruhu o daném středu, poloměru a daném stupni diskretizace.

**sit\_s\_dirou\_ctverec\_kruh**—Vrací souřadnice sítě pojiva. Volitelná je délka čtverce, poloměr a střed vlákna a stupeň diskretizace.

**sit\_bez\_diry\_to\_bunky4b**—Spočte matici popisující čtyřúhelníky diskretizace. Dále pak identifikuje vnější hranici.

**sit\_s\_dirou\_to\_bunky4b**—totéž pro pojivo. Hranice je rozdělena na vnitřní a čtyři vnější.

**bunky4b\_to\_bunky3b**—Matici popisující čtyřúhelníky diskretizace převede na matici popisující trojúhelníky. Čtyřúhelníky rozděluje po kratší úhlopříčce.

#### Generování matic

**matice\_tuhosti**—Počítá matici tuhosti, a vektor  $f$  pravých stran.

**matrice**—Konstruuje matice  $A$ ,  $f$ ,  $R^T$ ,  $B$  a omezení na  $\lambda$  pro celý materiál.

## Operace s maticemi

**pseudoinverse**—Počítá pseudoinverzi matice  $A$ . Pozor funguje jen v rámci tohoto programu.

**ortonormalizace**—Gramm–Schmidtovým ortonormalizačním procesem ortonormalizuje řádky obdélníkové matice. Má faktoriální složitost. Pro větší úlohy nutno přeprogramovat.

## QP problém

**qpe**—Algoritmus řešiče.

**qpe\_f**—Počítá funkční hodnotu Lagrangeovy funkce.

**qpe\_fs**—Zkracuje krok sdružených gradientů na přípustnou množinu.

**qpe\_proj**—Provádí projekci vektoru do přípustné množiny.

**qpe\_r**—Počítá gradient (residuum).

**qpe\_res**—Rozděluje residuum na komponenty.

**qpe\_sets**—Nastavuje volnou a aktivní množinu.

## Kreslící procedury

**plot\_bunky3b**—Kreslí trojúhelníky diskretizace.

**kresli\_reseni**—Vykreslí deformovanou síť, a zobrazí původní rozložení materiálu.

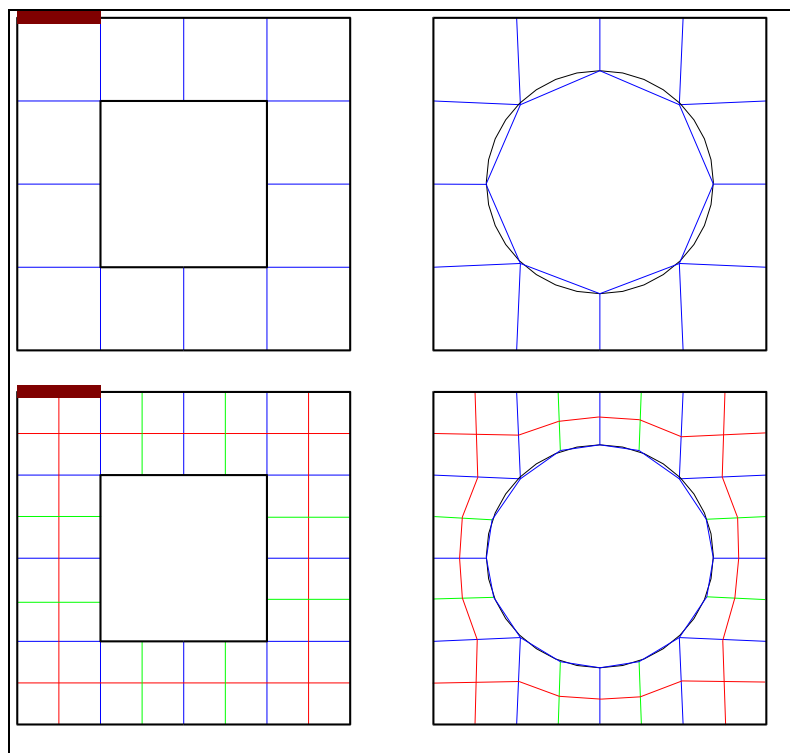
**kresli\_sily**—Vykresluje multiplikátory popisující síly působící na vlákno.

## 6.2 Diskretizace elementu

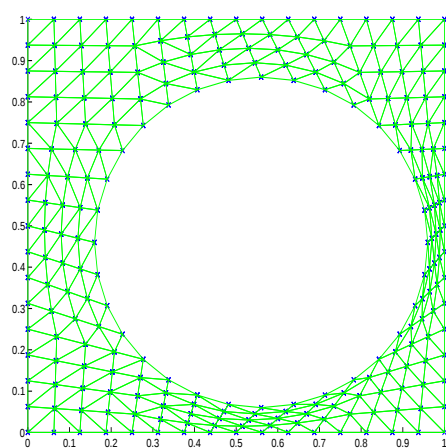
Pro metodu konečných prvků je potřeba rozdělit element na trojúhelníky. Ty by měly být řádově stejné velikosti, a neměly by mít tupé úhly. Po očíslování všech vrcholů by měl být největší rozdíl čísel vrcholů v trojúhelníku co nejmenší. Matice tuhosti pak bude pásová, o co nejmenší šířce pásu.

### Diskretizace pojiva

Pro vytvoření sítě pojiva jsem se pokusil „namapovat“ čtvercovou síť s vyjmutým vnitřkem na čtverec s kruhovou dírou uprostřed (viz obrázek 6.1). Hustotu diskretizace zvyšuji tak, že tlustě vyznačený úsek rozdělím na 2, 3, ... bodů. Na obrázku 6.1 je vidět stupeň diskretizace 1 (nahore) a 2 (dole). Vnitřní body vnitřního čtverce se pravidelně (dělení úhlu) rozprostou na kruh. Tím získám modře a zeleně naznačené úsečky. Ty pak rozdělím podle stupně diskretizace na shodné délky, a pospojuji (červené čáry). No a tím jsem hotov. Je potřeba dodat, že generátor sítě umí generovat i síť pro vlákno, které není ve středu elementu (viz obrázek 6.2).

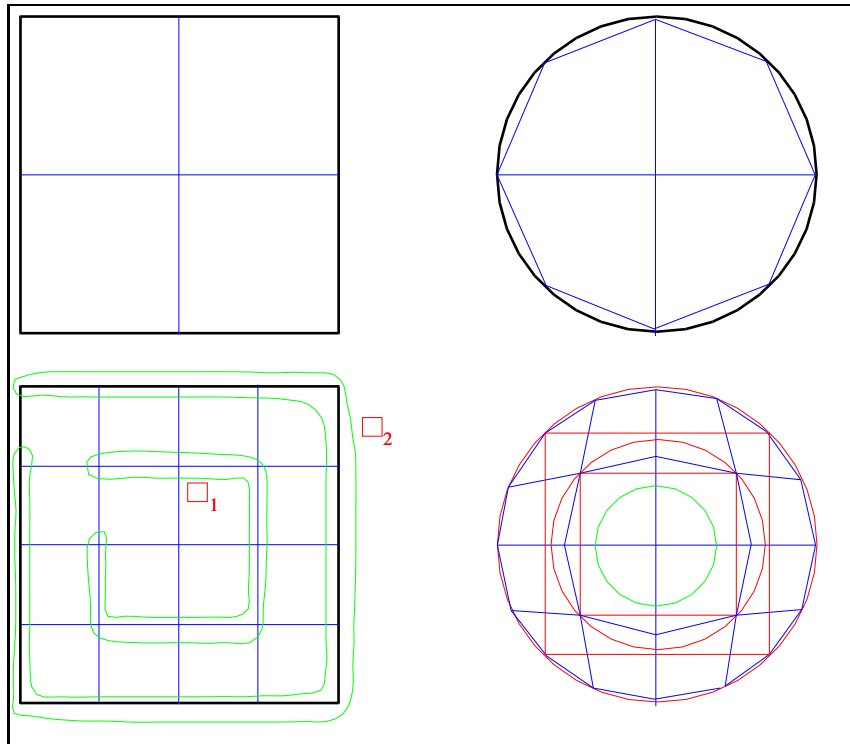


Obrázek 6.1: Mapování čtvercové sítě s vyjmutým vnitřkem na síť pojiva



Obrázek 6.2: Střed vlákna lze v elementu posunout

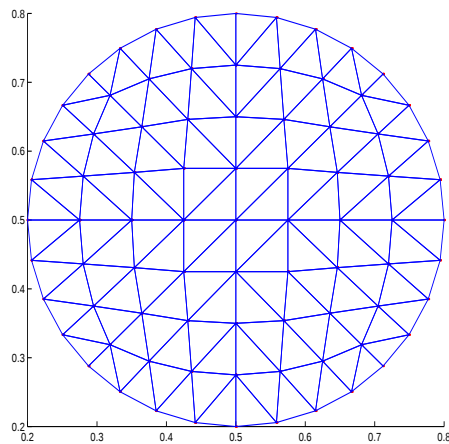
## Diskretizace vlákna



Obrázek 6.3: Mapování čtvercové sítě na síť vlákna

Pro vytvoření sítě vlákna jsem se pokoušel namapovat čtverec na kruh. Chtěl jsem, aby body byly rozloženy rovnoměrně, spíše pak k okraji vlákna. Body ve čtvercové síti mohou rozdělit na skupiny po středově souměrných čtvercích (na obrázku 6.3 vlevo dole naznačeno zeleně). Tyto skupiny označím  $\square_i$   $i = 1 \dots n$ . Dále pomyslně zkonstruuji  $n + 1$  kružnic, kde  $n$  je počet skupin bodů na čtverci. Každá  $i$ -tá kružnice bude mít poloměr  $r * i / (n + 1)$  (na obrázku 6.3 vpravo dole vyznačeny červenou a zelenou barvou). Na nejvnitřnější kružnici (zelenou) zapomenou. Pak všem kružnicím vepíšu čtverec.

Body náležící skupině  $\square_n$  namapuji přímo na vnější kruh. Body skupin  $\square_i$   $i < n$  pak namapuji o něco složitěji. Pro každý bod  $x \in \square_i$  zjistím jeho souřadnice na kruhu odpovídající skupině  $\square_i$  a na čtverci vepsanému tomuto kruhu. Tyto dva body určují úsečku, na kterém se výsledná poloha bodu  $x \in \square_i$ . Poloha na úsečce  $ab$  pak bude ve vzdálenosti  $\|ab\|(n - i)/(n + 1)$  od bodu úsečky na kružnici. Výsledek pro stupeň diskretizace 4 je vidět na obrázku 6.4.



Obrázek 6.4: Diskretizace vlákna

### 6.3 Úloha s lepením – řešení odtrhávání

Při úloze s lepením může docházet k postupnému odtrhávání původně přilepeného vlákna od pojiva. Síla v bodě na hranici nesmí překročit určitou mez. Tečné síly jsou omezeny v obou směrech, normálové jsou omezeny na tah. To je zajištěno omezením na  $\lambda$ . Vyřeší se tedy QP problém. Pokud  $\lambda$  nabývá hodnoty svého omezení, vazba praskne. To je u tečných sil zajištěno změnou omezení shora i zdola na nulu. Správné by bylo vynechat příslušné řádky v matici  $B$ , ale to by bylo algoritmicky náročnější. U normálových sil pak prasknutí zajistíme omezením  $\lambda$  zdola na nulu. Pokud praskla nějaká vazba, bude se řešit QP problém znovu. Pokud ne, máme výsledek.

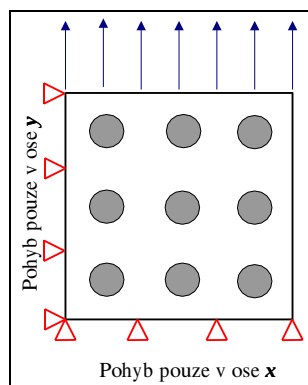
V programu je také zajištěno, že pokud praskne normálové lepení, praskne také příslušné lepení tečné, a naopak.

## Kapitola 7

# Numerické experimenty

### 7.1 Úloha bez lepení

Pokud mezi vlákny kompozitu neexistuje lepení, bude mít materiál odlišné vlastnosti v tahu od vlastností v tlaku. Uvažujme, že pojivo je velmi pružné, a snadno deformovatelné. Naopak vlákna budou nepružná, a z velmi těžce deformovatelného materiálu. Vezměme si situaci z obrázku 7.1. Kompozitní materiál je zde namáhán v tahu. Dále uvažujme průřez (úsečku) rovnoběžný s osou  $x$ . Tahem vnějších sil vznikají mezi vláknem a pojivem štěrbinky. Ty pak v myšleném průřezu nekladou tahu odpor, a ten jde na úkor pojiva na zbytku průřezu. Kompozitní materiál by se měl prodloužit více, než materiál pojiva stejných rozměrů.



Obrázek 7.1: Kompozit namáhán tahem ve směru osy  $y$

Naopak, pokud bude těleso namáháno v tlaku, budou se pevná vlákna deformaci bránit. Materiál s vlákny by měl být naopak hůře deformovatelný, než materiál jednolitý. Z těchto vlastností plyne, že zvolený kompozitní materiál má jiný Youngův modul pružnosti v tlaku, a jiný v tahu.

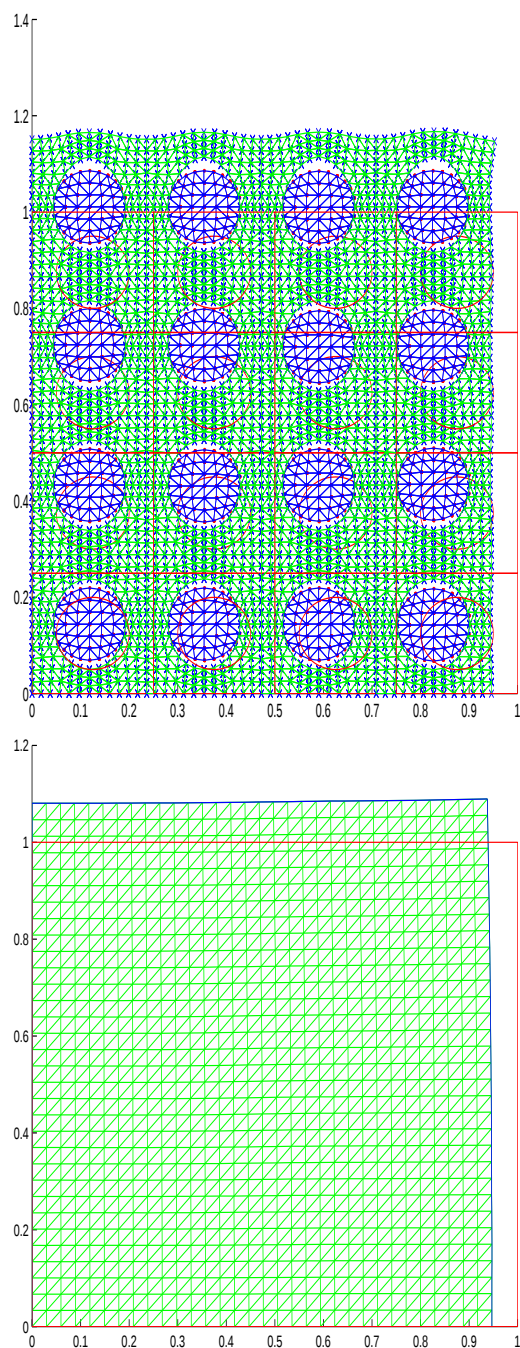
Pro demonstraci takovýchto vlastností jsem provedl výpočet pro kompozitní materiál, a jednoduší s podobným stupněm diskretizace. Na oba jsem nechal působit stejné síly, a výsledné posunutí jsem zvětšil, aby deformace byla snáze pozorovatelná. Výsledek jsem zobrazil na obrázcích 7.2 a 7.3. Červenými obrysy je u kompozitního materiálu zobrazena původní poloha. Obrázky potvrzují to, co jsme předpokládali. Na obrázku 7.4 jsou pak zobrazeny síly působící na vlákno v bodech dotyku s pojivem. Křížky pak označují volné body. Pro úplnost dodám parametry:

$$\begin{array}{llll}
 E_{\text{vlákno}} : & 1e3 & \text{síla:} & 10 \\
 E_{\text{pojivo}} : & 1e5 & \text{vnější diskretizace :} & 4 \times 4 \\
 \kappa_{\text{vlákno}} : & 0,2 & \text{vnitřní diskretizace :} & 2 \\
 \kappa_{\text{pojivo}} : & 0,4 & & 
 \end{array}$$

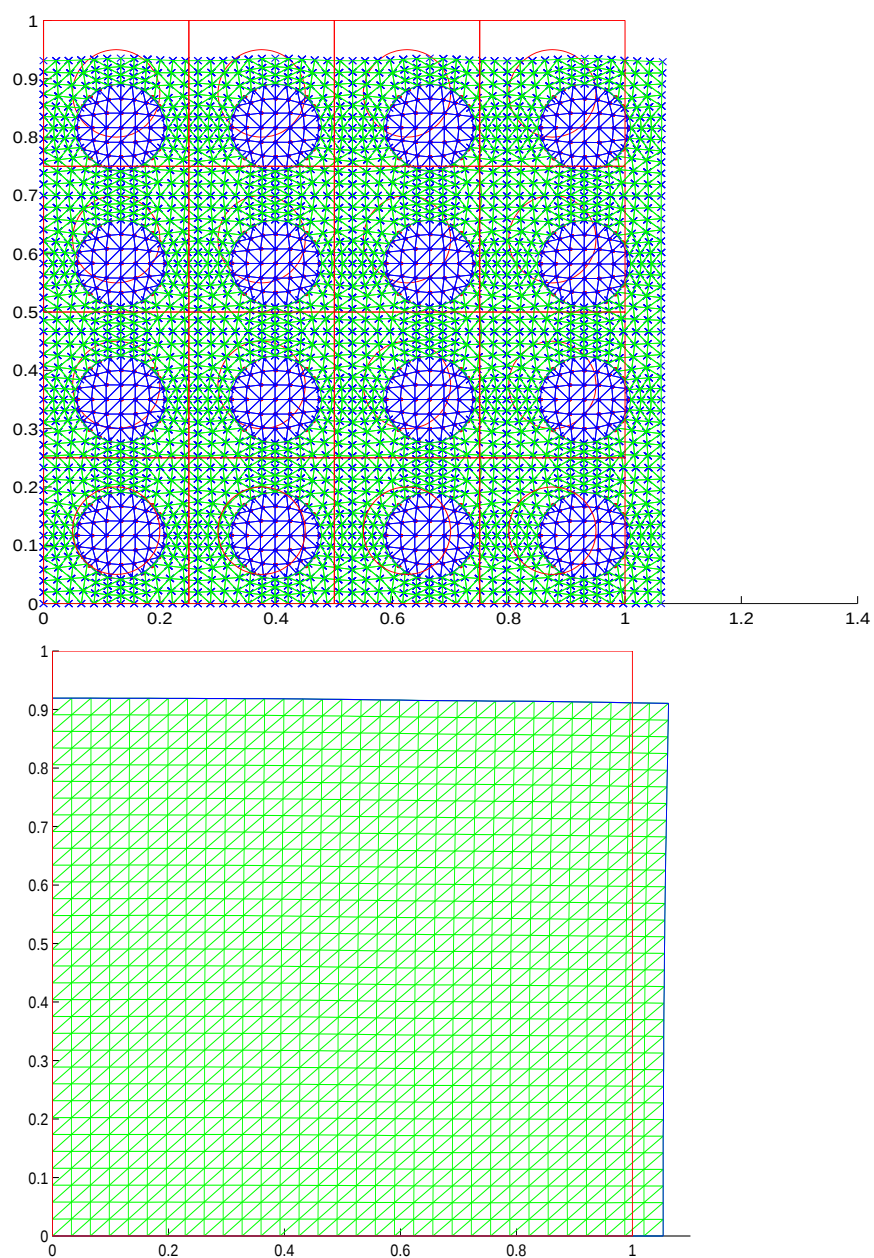
Dále jsem sledoval, jak se chová algoritmus QP problému při vzrůstající vnitřní diskretizaci elementu. Zvolil jsem si vždy dvě úlohy na  $3 \times 3$  elementech, a zvyšoval vnitřní diskretizaci. V tabulce pod sebou je vždy úloha na tlak a na tah. Sledoval jsem počty iterací sdružených gradientů, počty sekcí ve kterých se provádí proportioning, počty kontinuálních bloků sdružených gradientů a počet zpřesnění na rovnost. Položka vnitřní diskretizace udává jednak stupeň diskretizace, tak počet bodů na hraně elementu.

| Rozměr $u$<br>Rozměr $\lambda$ | $\rho_{\max}$<br>vnitř. disk. | kroků cg.<br>bloků cg. | proportioning<br>počet zpřesnění | čas(s)<br>flops              |
|--------------------------------|-------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| 594<br>256                     | 90<br>1/5                     | 390<br>24              | 6<br>4                           | 9<br>$7,6 \times 10^7$       |
| 594<br>256                     | 90<br>1/5                     | 220<br>21              | 4<br>4                           | 12<br>$7,8 \times 10^7$      |
| 1746<br>496                    | 810<br>2/9                    | 1462<br>506            | 7<br>4                           | 226<br>$1,7 \times 10^9$     |
| 1746<br>496                    | 810<br>2/9                    | 1158<br>151            | 17<br>4                          | 174<br>$1,2 \times 10^9$     |
| 3474<br>736                    | 810<br>3/13                   | 1086<br>69             | 6<br>4                           | 221<br>$1,8 \times 10^9$     |
| 3474<br>736                    | 810<br>3/13                   | 1671<br>201            | 26<br>4                          | 491<br>$3,8 \times 10^9$     |
| 5778<br>976                    | 810<br>4/17                   | 3211<br>782            | 7<br>4                           | 1425<br>$1,1 \times 10^{10}$ |
| 5778<br>976                    | 810<br>4/17                   | 944<br>102             | 10<br>4                          | 647<br>$4,2 \times 10^9$     |

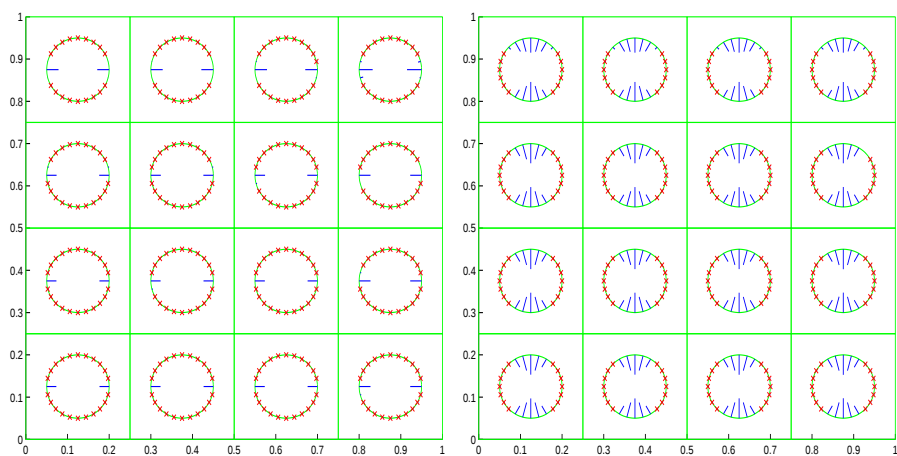
Sledoval jsem také, jak se mění náročnost QP algoritmu při změně počtu elementů, při stejném stupni diskretizace elementu. Byly sledovány tytéž veličiny. Měření probíhala pro materiály od  $1 \times 1$ , až po  $4 \times 4$  elementy při



Obrázek 7.2: Srovnání kompozitu a obyčejného materiálu v tahu shora



Obrázek 7.3: Srovnání kompozitu a obyčejného materiálu v tlaku shora



Obrázek 7.4: Srovnání silového působení pojiva na vlákno v tahu shora (vlevo), a v tlaku shora (vpravo)

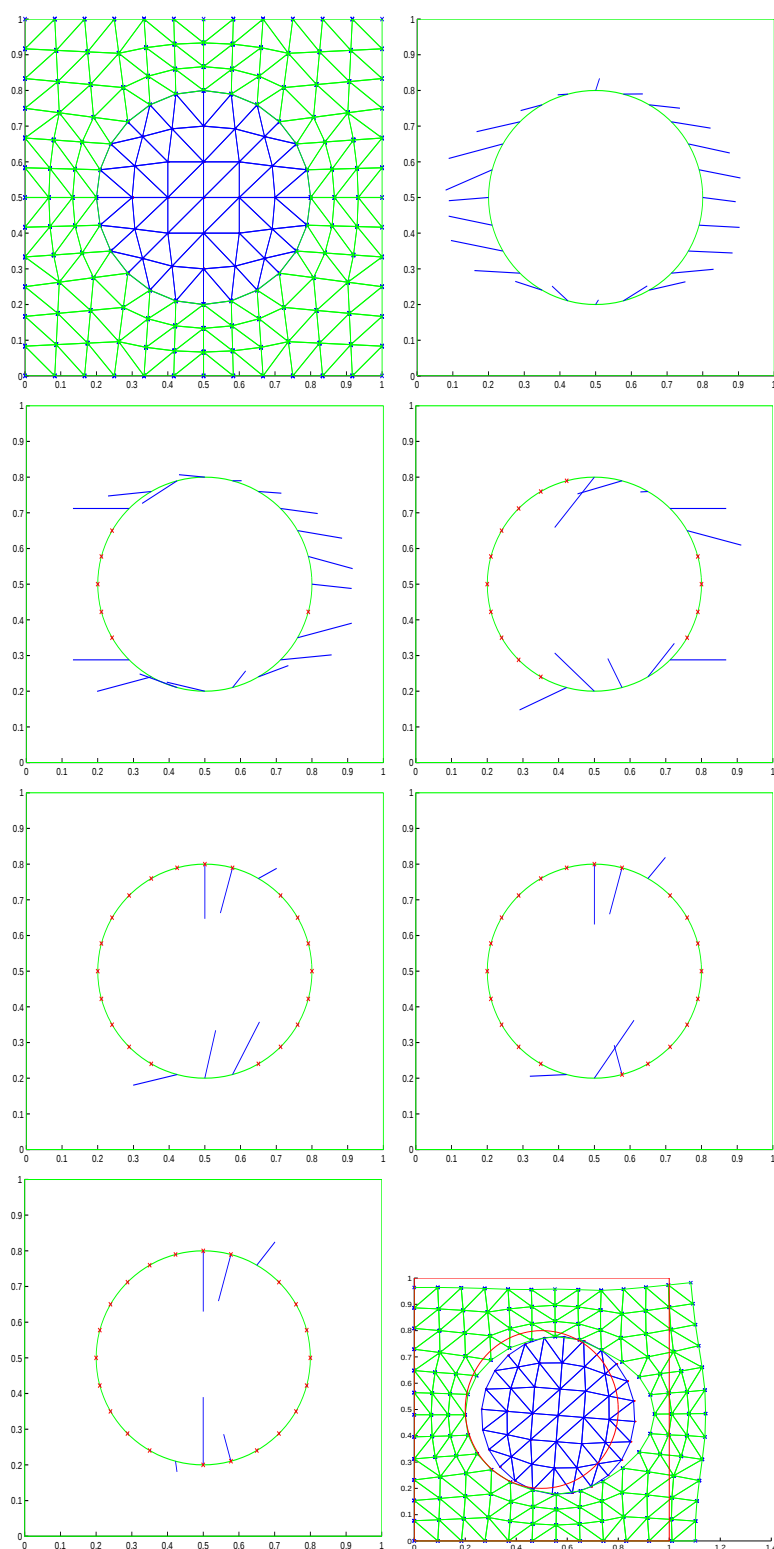
vnitřním stupni diskretizace 3. Při úloze na  $4 \times 4$  elementech počítač často swappoval, což je výrazně patrné na dosaženém čase. V tabulce pod sebou je vždy opět úloha na tlak a na tah.

| Rozměr $u$<br>Rozměr $\lambda$ | $\rho_{\max}$<br>elementů | kroků cg.<br>bloků cg. | proportioning<br>počet zpřesnění | čas(s)<br>flops               |
|--------------------------------|---------------------------|------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| 386<br>48                      | 90<br>$1 \times 1$        | 56<br>21               | 3<br>3                           | 0,2<br>$9 \times 10^5$        |
| 386<br>48                      | 90<br>$1 \times 1$        | 29<br>15               | 3<br>3                           | 0,2<br>$6 \times 10^5$        |
| 1544<br>294                    | 90<br>$2 \times 2$        | 291<br>37              | 5<br>3                           | 15<br>$1,1 \times 10^8$       |
| 1544<br>294                    | 90<br>$2 \times 2$        | 331<br>39              | 5<br>4                           | 17<br>$1,2 \times 10^8$       |
| 3474<br>736                    | 810<br>$3 \times 3$       | 1086<br>69             | 6<br>4                           | 221<br>$1,8 \times 10^9$      |
| 3474<br>736                    | 810<br>$3 \times 3$       | 1671<br>201            | 26<br>4                          | 491<br>$3,8 \times 10^9$      |
| 6176<br>1374                   | 810<br>$4 \times 4$       | 2258<br>94             | 5<br>4                           | 16220<br>$1,3 \times 10^{10}$ |
| 6176<br>1374                   | 810<br>$4 \times 4$       | 1612<br>36             | 5<br>4                           | 15715<br>$1,1 \times 10^{10}$ |

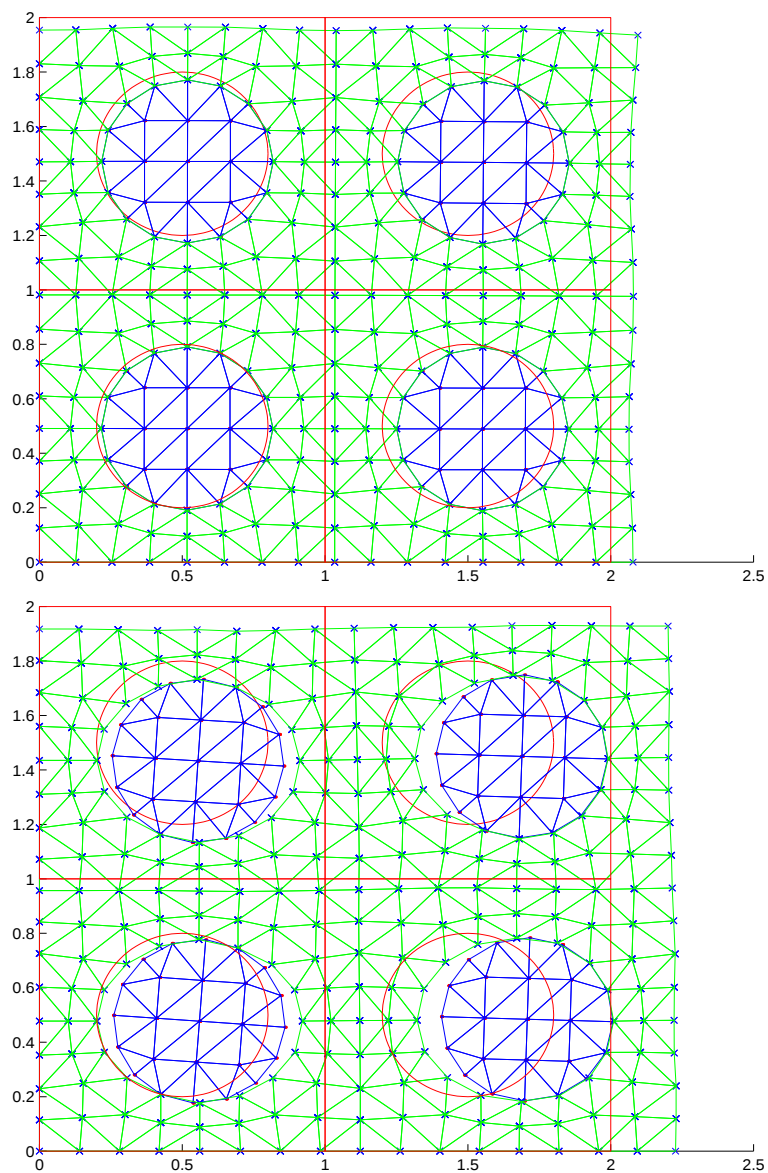
## 7.2 Úloha s lepením

Pokud zavedeme lepení, může materiál fungovat jako pojistka. Určitou sílu vydrží (deformace nebude zas tak velká), a po jejím překročení se začnou vlákna rychle odtrhávat (deformace se razantně zvětší). Podotýkám, že tato změna je nevratná. Příklad takového odtrhávání je zobrazen na obrázku 7.5. V kompozitním materiálu zde působí na pravou hranu síla v kladném směru osy  $x$ . Projděme si tento obrázek zleva doprava po řádcích. Nejprve zde máme materiál před deformací. Druhý obrázek udává velikost sil před odtrháváním. Na dalších obrázcích lepení praská v bodech, ve kterých síly překročily své maximum. Nakonec nastane situace, kdy se žádná vazba nepřetrhne (předposlední obrázek), a proběhne rekonstrukce z  $\lambda$  (poslední obrázek). Prasklé vazby jsou vyznačeny křížkem. Je vidět, že na dvou předposledních obrázcích praskají vazby v tečných směrech.

Nakonec bych ještě uvedl příklad, kdy nepatrnou změnou působící síly dochází k výrazné změně prodloužení (obrázek 7.6). Síla zde opět působí na pravou hranu kompozitu v kladném směru osy  $x$ . Změnou síly o 1,3% se prodloužení zdvojnásobí. V prvním případě ještě lepicí vazby vydrží, v druhém pak při nepatrném zvýšení působící síly lepení povolí.



Obrázek 7.5: Síly při odtrhávání



Obrázek 7.6: Materiál má vlastnost „tahové pojistky“

# Závěr

Náplní diplomové práce byla implementace modelového příkladu na deformační vlastnosti kompozitu. Hlavním cílem pak bylo namodelování materiálu s výrazně odlišnými vlastnostmi v tahu a tlaku. Do úlohy bylo dále zahrnuto lepení a odtrhávání vláken od pojiva kompozitu. V řešení bylo využito duální formulace úlohy na pružnost soustavy těles. Duální formulace výrazně snižuje rozměr úlohy. Dále zde byla podána metoda diskretizace kruhu, a čtverce s kruhovým otvorem na čtyřúhelníky.

Při řešení a implementaci se vyskytl problém ve formulaci úlohy s lepením. Ukázalo se totiž, že duální formulace pouze v normálových multiplikátorech není jednoznačná vzhledem k rotaci vláken. Problém byl vyřešen zavedením tečného lepení. Druhý problém se vyskytl při zpětné rekonstrukci z duálních proměnných v úloze bez lepení. V určitých případech nebyla správně určena poloha vláken v kompozitu. Řešením bylo zavedení tečných multiplikátorů limitně malé velikosti.

Materiál zde namodelovaný lze využít jako jeden ze stavebních prvků složitějšího kompozitního materiálu. Lze určit jeho vlastnosti v tlaku a tahu. Tento stavební prvek lze brát jako homogenní materiál s naměřenými vlastnostmi, a nemusí se dále dělit na části.

# Literatura

- [1] Zdeněk Dostál, Francisco A. M. Gomes Neto, Sandra A. Santos:  
*Solution of problems by FETI domain decomposition with natural coarse space projections*
- [2] Zdeněk Dostál:  
*Box constrained quadratic programming with proportioning and projections*  
SIAM 1997
- [3] Zdeněk Dostál, Francisco A. M. Gomes Neto, Sandra A. Santos:  
*Duality-based domain decomposition with natural coarse-space for variational inequalities*
- [4] Zdeněk Dostál:  
*Duality based domain decomposition with proportioning for the solution of free boundary problems*  
SIAM 1997
- [3] O. C. Zienkiewicz:  
*The finite element method in engineering science*  
McGrawHill 1971
- [4] Karel Rektorys:  
*Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*  
Academia 1999
- [5] Josef Škrášek, Zdeněk Tichý:  
*Základy aplikované matematiky I, II*  
SNTL 1989