1.4.1 Homomorfismy grup - DÚ

Toto je domácí úkol na týden 14. - 19. 4. 2020. Ručně vypracované řešení naskenujte (vyfoťte) a pošlete na mail: pavel.jahoda@vsb.cz . Termín odevzdání: nejpozději 21.4.2020.

1.

Zobrazení $f : M_{(2,3)} \mapsto M_{(3,2)}$ je dáno předpisem $f(A) = A^T$. Zobrazení f tedy přiřazuje dané matici A typu $(2,3)$ matici transponovanou (řádky změní na sloupce).

a) Určete $f(A)$, $f(B)$ a $f(A+B)$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Rozhodněte, zda je zobrazení f homomorfismem grupy $(M_{(2,3)}, +)$ do grupy $(M_{(3,2)}, +)$.

c) Pokud je zobrazení f homomorfismem grupy $(M_{(2,3)}, +)$ do grupy $(M_{(3,2)}, +)$, určete:

I.) $Ker\, f$.

II.) $M_{(2,3)}/Ker\, f$

III.) Rozhodněte, zda je faktorová grupa $(M_{(2,3)}/Ker\, f, +)$ izomorfní s grupou $(M_{(3,2)}, +)$ (to jest, zda existuje mezi těmito grupami nějaké izomorfní zobrazení).

2.

Zobrazení $f : M^*_{(2,2)} \mapsto M^*_{(2,2)}$ je dáno předpisem $f(A) = A^T$. Zobrazení f tedy přiřazuje matici A typu $(2,2)$ matici transponovanou (řádky změní na sloupce).

a) Určete $f(A)$, $f(B)$ a $f(A \cdot B)$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Rozhodněte, zda je zobrazení f homomorfismem grupy $(M^*_{(2,2)}, \cdot)$ do grupy $(M^*_{(2,2)}, \cdot)$, kde $M^*_{(2,2)}$ je množina reálných regulárních matic typu $(2,2)$ a $\cdot$ jejich obvyklé násobení.

c) Pokud je zobrazení f homomorfismem grupy $(M^*_{(2,2)}, \cdot)$ do grupy $(M^*_{(2,2)}, \cdot)$, určete:

I.) $Ker\, f$.

II.) $M^*_{(2,2)}/Ker\, f$

III.) Rozhodněte, zda je faktorová grupa $(M^*_{(2,2)}/Ker\, f, \cdot)$ izomorfní s grupou $(M^*_{(2,2)}/Ker\, f, \cdot)$ (to jest, zda existuje mezi těmito grupami nějaké izomorfní zobrazení).

1. Př: Zobrazení $f: M_{(2,3)} \to M_{(3,2)}$ je dáno předpisem $f(A) = A^T$.

a) Určete $f(A)$, $f(B)$, $f(A+B)$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(A) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}} \quad , \quad f(B) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$f(A+B) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(A) + f(B)$$

$\Rightarrow$ možná je to homomorfismus?

b) Rozhodněte, zda je zobrazení f homomorfismem grupy $(M_{(2,3)}, +)$ do $(M_{(3,2)}, +)$.

$$\forall A, B \in M_{(2,3)} : \quad f(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = f(A) + f(B) \Rightarrow$$

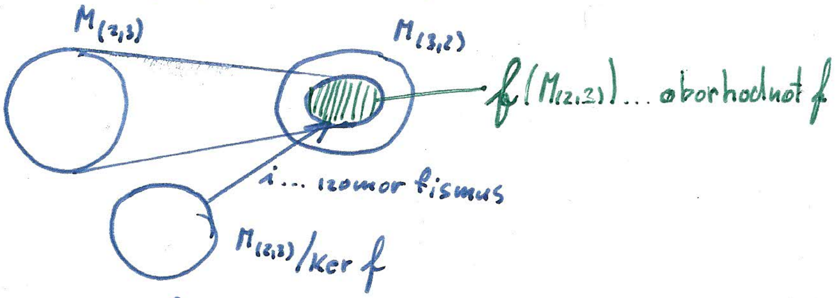
$\Rightarrow$ <u>je to homomorfismus</u>

c) Pokud je f homomorfismem grupy $(M_{(2,3)}, +)$ do $(M_{(3,2)}, +)$, určete:

I.) $\operatorname{Ker} f = \left\{ A \in M_{(2,3)} \mid f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}}$

II.) $M_{(2,3)}/\operatorname{Ker} f = \{ A + \operatorname{Ker} f \mid A \in M_{(2,3)} \} = \underline{\underline{\{ \{A\} \mid A \in M_{(2,3)} \}}}$

III.) Rozhodněte, zda je faktorová grupa $(M_{(2,3)}/\operatorname{Ker} f, +)$ izomorfní s grupou $(M_{(3,2)}, +)$.



Víme, že $(M_{(2,3)}/\operatorname{Ker} f, +)$ je izomorfní s $(f(M_{(2,3)}), +)$. Stačí ukázat, že $f(M_{(2,3)}) = M_{(3,2)}$. To jest, že f je surjektivní: a opravdu:

$$\forall A \in M_{(3,2)} \ \exists A^T \in M_{(2,3)} : \quad f(A^T) = (A^T)^T = A$$

2. Př: Zobrazení $f : M^*_{(2,2)} \to M^*_{(2,2)}$ je dáno předpisem $f(A) = A^T$.

a) Určete $f(A)$, $f(B)$ a $f(A \cdot B)$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$f(A) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}$ $\quad f(B) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}$

$f(A \cdot B) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}}$

Všimněme si, že $f(A) \cdot f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = f(A \cdot B)$ $\Rightarrow$ je to homomorfismus?

b) Rozhodněte, zda je zobrazení f homomorfismem grupy $(M^*_{(2,2)}, \cdot)$ do grupy $(M^*_{(2,2)}, \cdot)$, kde $M^*_{(2,2)}$ je množina reálných regulárních matic typu (2,2).

$f(A \cdot B) = (A \cdot B)^T = B^T A^T$ ale $f(A) \cdot f(B) = A^T B^T$!

Násobení matic není komutativní. Jistě najdeme $A, B \in M^*_{(2,2)}$ takové, že $B^T A^T \neq A^T B^T$. Například $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{B^T} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, ale

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{B^T}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ není homomorfismem } (M_{(2,2)}, \cdot) \text{ do } (M_{(2,2)}, \cdot).}}$