1. Matice a maticové operace

Matice a maticové operace

1. Aritmetické vektory
2. Operace s aritmetickými vektory
3. Matice
4. Násobení matice skalárem a sčítání matic
5. Transponované matice
6. Násobení matice a vektoru
7. Násobení matic

1.1 Aritmetické vektory

DEFINICE 1
n-rozměrný *aritmetický vektor* je uspořádaná n-tice čísel, jejíž prvky se nazývají *složky*. Tyto uspořádané n-tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců.

1.1 Aritmetické vektory

DEFINICE 1
n-rozměrný *aritmetický vektor* je uspořádaná n-tice čísel, jejíž prvky se nazývají *složky*. Tyto uspořádané n-tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců.

PŘÍKLAD 1 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1, \\ 3, \\ -2, \\ 4, \\ 0 \end{bmatrix}$

1.1 Aritmetické vektory

Jestliže $\mathbf{v}$ je aritmetický vektor, pak i-tou složku vektoru $\mathbf{v}$ budeme značit $[\mathbf{v}]_i$. Např. $[\mathbf{u}]_1 = u_1$, $[\mathbf{w}]_3 = -2$.
Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor $\mathbf{x} = [1, 2]$ je dvourozměrný, vektor $\mathbf{w}$ je pětirozměrný.

1.1 Aritmetické vektory

Jestliže $\mathbf{v}$ je aritmetický vektor, pak i-tou složku vektoru $\mathbf{v}$ budeme značit $[\mathbf{v}]_i$. Např. $[\mathbf{u}]_1 = u_1$, $[\mathbf{w}]_3 = -2$.
Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor $\mathbf{x} = [1, 2]$ je dvourozměrný, vektor $\mathbf{w}$ je pětirozměrný.

DEFINICE 2
Dva aritmetické vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$), jestliže mají stejnou dimenzi n a stejné odpovídající složky, tj. $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, \ldots, [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$. Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, které nejsou stejné, jsou *různé* (*píšeme* $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$).

1.1 Aritmetické vektory

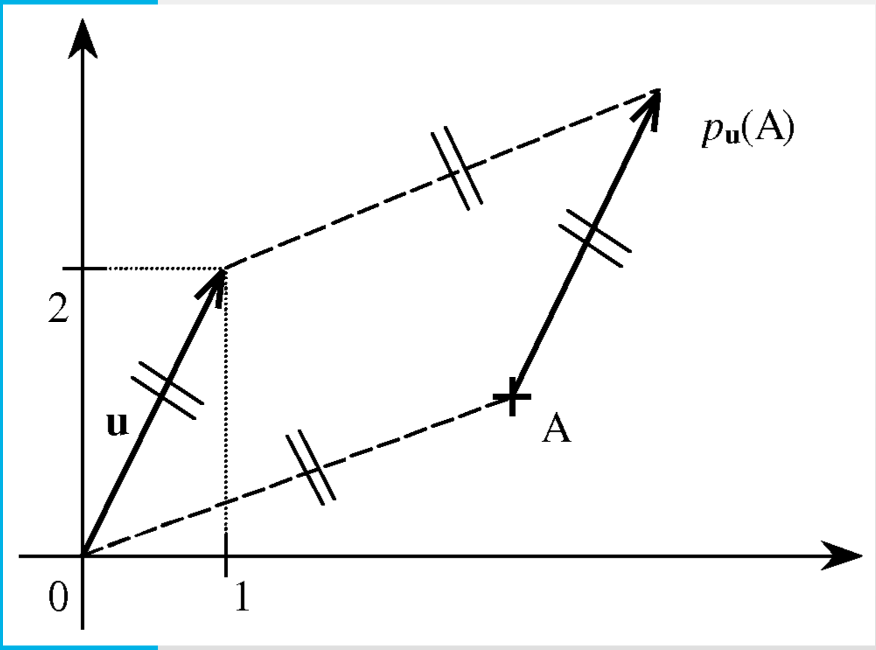
Jestliže $\mathbf{v}$ je aritmetický vektor, pak i-tou složku vektoru $\mathbf{v}$ budeme značit $[\mathbf{v}]_i$. Např. $[\mathbf{u}]_1 = u_1$, $[\mathbf{w}]_3 = -2$.
Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor $\mathbf{x} = [1, 2]$ je dvourozměrný, vektor $\mathbf{w}$ je pětirozměrný.

DEFINICE 2
Dva aritmetické vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$), jestliže mají stejnou dimenzi n a stejné odpovídající složky, tj. $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, \dots, [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$. Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, které nejsou stejné, jsou *různé (píšeme* $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$*)*.

Jestliže $\mathbf{u} = [1, 2]$ a $\mathbf{v} = [2, 1]$, pak $[\mathbf{u}]_1 = 1$, $[\mathbf{v}]_1 = 2$, takže $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

1.1 Aritmetické vektory

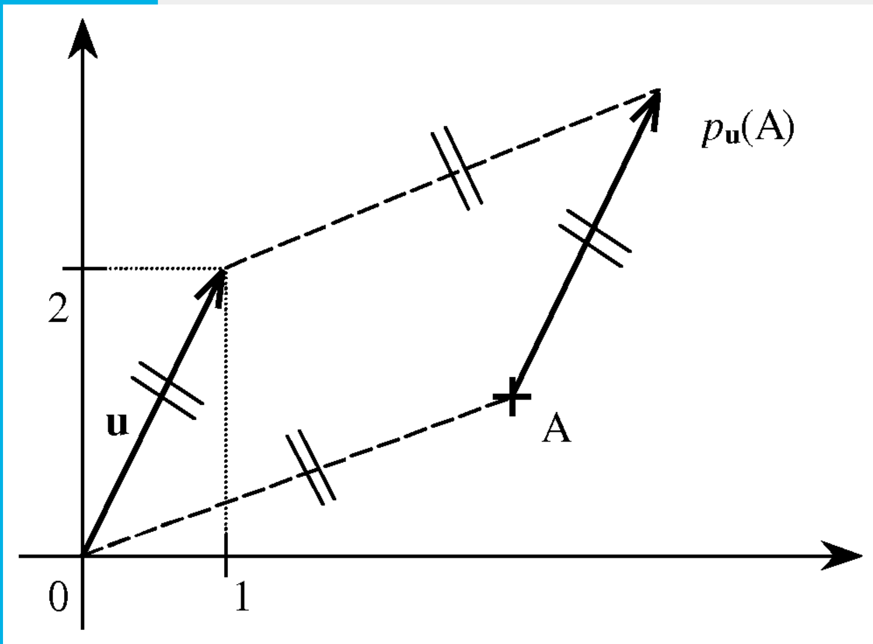
Dvou a třírozměrné vektory
- *polohové vektory*



Volné a vázané vektory

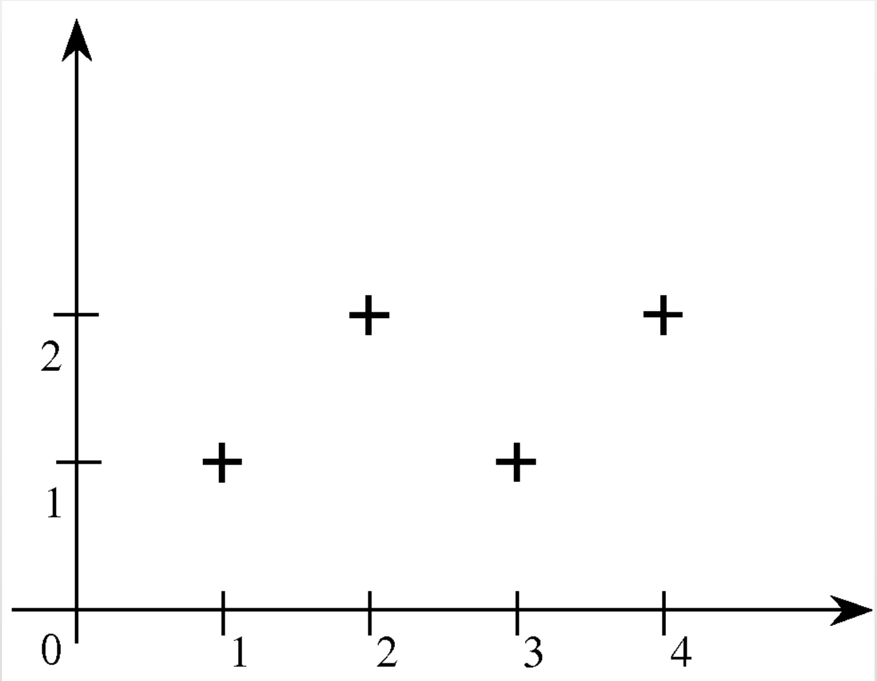
1.1 Aritmetické vektory

Dvou a třírozměrné vektory - *polohové vektory*



Volné a vázané vektory

Vícerozměrné vektory:



Znázornění vektoru $[1, 2, 1, 2]$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 3
Součin skaláru (čísla) α *a aritmetického vektoru* $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ je vektor $\alpha\mathbf{u}$ definovaný předpisem

$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, ..., \alpha u_n].$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 3
Součin skaláru (čísla) α *a aritmetického vektoru* $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ je vektor $\alpha\mathbf{u}$ definovaný předpisem

$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, ..., \alpha u_n].$$

Pro složky $\alpha\mathbf{u}$ tedy platí

$$[\alpha\mathbf{u}]_i = \alpha[\mathbf{u}]_i, \quad i = 1, ..., n,$$

například

$$3[1,2] = [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [3,6],$$

$$\big[3[1,2]\big]_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad \big[3[1,2]\big]_2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 4
Součet aritmetických vektorů $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ a $\mathbf{v} = [v_1, ..., v_n]$ stejné dimenze je vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ definovaný předpisem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, ..., u_n + v_n].$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 4
Součet aritmetických vektorů $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ a $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_n]$ stejné dimenze je vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ definovaný předpisem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n].$$

Pro složky $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tedy platí

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Například

$$[1, 2] + [2, 3] = [1 + 2, 2 + 3] = [3, 5],$$
$$\big[[1, 2] + [2, 3]\big]_1 = 1 + 2 = 3,$$
$$\big[[1, 2] + [2, 3]\big]_2 = 2 + 3 = 5.$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 4
Součet aritmetických vektorů $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ a $\mathbf{v} = [v_1, ..., v_n]$ stejné dimenze je vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ definovaný předpisem

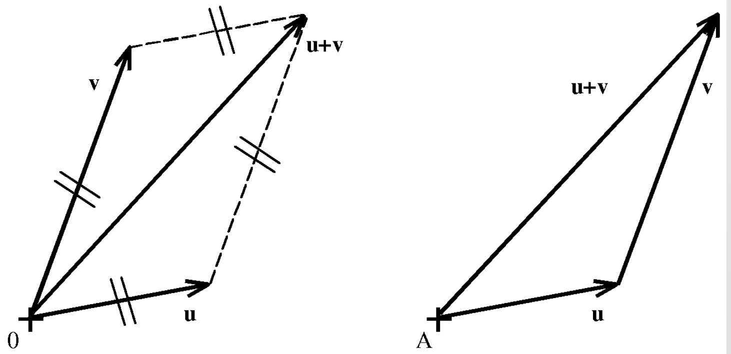
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, ..., u_n + v_n].$$

Pro složky $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tedy platí

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Například

$$[1, 2] + [2, 3] = [1 + 2, 2 + 3] = [3, 5],$$
$$\big[[1, 2] + [2, 3]\big]_1 = 1 + 2 = 3,$$
$$\big[[1, 2] + [2, 3]\big]_2 = 2 + 3 = 5.$$



a) Vázané vektory   b) Volné vektory

1.2 Operace s aritmetickými vektory

VĚTA 1
Pro libovolná čísla α, β a vektory **u**,**v**,**w** stejné dimenze platí:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \tag{1}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{2}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \tag{3}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \tag{4}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \tag{5}$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \tag{6}$$

DŮKAZ: (6) $[1u]_i = 1[u]_i = [u]_i$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

Vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými vektory.

1.2 Operace s aritmetickými vektory

Vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými vektory.

Operace $\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ totiž potřebuje $2n$ operací násobení skaláru se složkami obou vektorů a n operací součtů složek vektorů, tj. celkem $3n$ operací, výraz $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ potřebuje n při součtu obou vektorů a n operací násobení složek vektorů skalárem, tj. celkem $2n$ operací, tedy pouze $\frac{2}{3}$ původního počtu operací.

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 5
Vektor $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$ se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze n budeme značit $\mathbf{o}_n$.
Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, ..., -u_n] = (-1)\mathbf{u}$ nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 5
Vektor $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$ se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze n budeme značit $\mathbf{o}_n$.
Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, ..., -u_n] = (-1)\mathbf{u}$ nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

Je-li $\mathbf{u}$ libovolný n-rozměrný vektor, pak $\mathbf{u} + \mathbf{o}_n = \mathbf{u}$.
Opačný vektor splňuje $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 5
Vektor $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$ se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze n budeme značit $\mathbf{o}_n$.
Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, ..., u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, ..., -u_n] = (-1)\mathbf{u}$ nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

Je-li $\mathbf{u}$ libovolný n-rozměrný vektor, pak $\mathbf{u} + \mathbf{o}_n = \mathbf{u}$.
Opačný vektor splňuje $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Jestliže $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor $\mathbf{x}$, který splňuje $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}.$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 5
Vektor $\mathbf{o} = [0, \ldots, 0]$ se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze n budeme značit $\mathbf{o}_n$.
Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, \ldots, -u_n] = (-1)\mathbf{u}$ nazývá *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$.

Je-li $\mathbf{u}$ libovolný n-rozměrný vektor, pak $\mathbf{u} + \mathbf{o}_n = \mathbf{u}$.
Opačný vektor splňuje $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Jestliže $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor $\mathbf{x}$, který splňuje $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}.$$

Rozdíl aritmetických vektorů: $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$

1.3 Matice

DEFINICE 6

Nechť jsou dány prvky $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ z dané množiny $\mathcal{F}$. *Matice typu* (m, n) (stručně $m \times n$ matice) je obdélníková tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

která má mn *prvků* a_{ij} uspořádaných do m *řádků* $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ a n *sloupců* $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$, takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}\right],$$

$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, \ldots, a_{in}], \quad \mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se $\mathbf{A}$ nazývá *čtvercová matice* řádu n.

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se **A** nazývá *čtvercová matice* řádu n.
- Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n.

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se $\mathbf{A}$ nazývá *čtvercová matice* řádu n.
- Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n.
- Matici typu $(m, 1)$ nazýváme *sloupcovým vektorem* řádu m.

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se $\mathbf{A}$ nazývá *čtvercová matice* řádu n.
- Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n.
- Matici typu $(m, 1)$ nazýváme *sloupcovým vektorem* řádu m.
- Prvky $a_{11}, \ldots, a_{ss}$, $s = \min\{m, n\}$ tvoří *diagonálu* matice $\mathbf{A}$.

1.3 Matice

- Prvky množiny $\mathcal{F}$ nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny $\mathcal{F}$ budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se $\mathbf{A}$ nazývá *čtvercová matice* řádu n.
- Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n.
- Matici typu $(m, 1)$ nazýváme *sloupcovým vektorem* řádu m.
- Prvky $a_{11}, \ldots, a_{ss}$, $s = \min\{m, n\}$ tvoří *diagonálu* matice $\mathbf{A}$.
- Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ značíme $[\mathbf{A}]_{ij}$.

1.3 Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reálná matice typu (7,8), tj. $A \in \mathbb{R}^{7,8}$.
- Diagonála: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0.$
- $[A]_{63} = 1.$

1.3 Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Reálná matice typu (7,8), tj. $A \in \mathbb{R}^{7,8}$.
- Diagonála: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$.
- $[A]_{63} = 1$.

1.3 Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

- Reálná matice typu (7,8), tj. $A \in \mathbb{R}^{7,8}$.
- Diagonála: $1, 0, 0, 1, 1, 0, 0$.
- $[A]_{63} = 1$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Reálná čtvercová matice řádu 5, tj. $A \in \mathbb{R}^{5,5}$.
- Diagonála: $2, 2, 2, 2, 2$.
- $[A]_{43} = -1$.

1.3 Matice

DEFINICE 7
Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj. $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$).

1.3 Matice

DEFINICE 7
Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj. $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$).

PŘÍKLAD 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq [1, 2], \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 8
Součin skaláru α *a matice* $\mathbf{A}$ je matice $\alpha\mathbf{A}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 8
Součin skaláru α *a matice* $\mathbf{A}$ je matice $\alpha\mathbf{A}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}.$$

PŘÍKLAD 3

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 9
Součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu je matice $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ definovaná předpisem

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 9
Součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ stejného typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ definovaná předpisem

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}.$$

PŘÍKLAD 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

VĚTA 2
Pro libovolné číselné matice **A**, **B**, **C** stejného typu a pro libovolné skaláry α, β platí vztahy:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{2}$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \tag{3}$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{4}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \tag{5}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{6}$$

DŮKAZ: (6) $[1A]_{ij} = 1[A]_{ij} = [A]_{ij}$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Obdobně jako v případě vektorů, vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými maticemi.

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Obdobně jako v případě vektorů, vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými maticemi.

Operace $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ se čtvercovou maticí řádu n totiž potřebuje $2n^2$ operací násobení skalárů se složkami matice a n^2 operací součtů složek matic, tj. celkem $3n^2$ operací, výraz $(\alpha + \beta)\mathbf{A}$ potřebuje 1 při součtu obou skalárů a n^2 operací násobení složek matice skalárem, tj. celkem $n^2 + 1$ operací, tedy pouze $\frac{1}{3}$ původního počtu operací.

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 10
Matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Nulová matice typu (m, n) se značí $\mathbf{O}_{mn}$.
Je-li $\mathbf{A}$ libovolná matice, pak matice $-\mathbf{A}$ se nazývá *opačná matice* k matici $\mathbf{A}$ a platí

$$[-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

VĚTA 3
Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ a nulovou matici stejného typu platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} \tag{2}$$

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \tag{3}$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

VĚTA 3
Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ a nulovou matici stejného typu platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} \tag{2}$$

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \tag{3}$$

DŮKAZ:

(1): $[\mathbf{A} + \mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + 0 = [\mathbf{A}]_{ij}$,

(2):

$[\mathbf{A} + (-\mathbf{A})]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [-\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + (-[\mathbf{A}]_{ij}) = 0 = [\mathbf{O}]_{ij}$,

(3): $[-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij} = (-1)[\mathbf{A}]_{ij} = [(-1)\mathbf{A}]_{ij}$.

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Jestliže matice **A** a **B** jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici **X**, která splňuje $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}.$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Jestliže matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici $\mathbf{X}$, která splňuje $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}.$$

Definujeme *odečítání matic* nebo též *rozdíl matic* předpisem

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}).$$

1.4 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Jestliže matice **A** a **B** jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici **X**, která splňuje $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}.$$

Definujeme *odečítání matic* nebo též *rozdíl matic* předpisem

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}).$$

PŘÍKLAD 5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.5 Transponované matice

DEFINICE 11

K dané matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) definujeme matici transponovanou $\mathbf{A}^\top$ typu (n, m) předpisem

$$\left[\mathbf{A}^\top\right]_{ij} = \left[\mathbf{A}\right]_{ji} .$$

1.5 Transponované matice

DEFINICE 11
K dané matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) definujeme matici transponovanou $\mathbf{A}^\top$ typu (n, m) předpisem

$$\left[\mathbf{A}^\top\right]_{ij} = \left[\mathbf{A}\right]_{ji} .$$

PŘÍKLAD 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1.5 Transponované matice

DEFINICE 11

K dané matici **A** typu (m, n) definujeme matici transponovanou $\mathbf{A}^\top$ typu (n, m) předpisem

$$\left[\mathbf{A}^\top\right]_{ij} = \left[\mathbf{A}\right]_{ji} \,.$$

PŘÍKLAD 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

VĚTA 4

Pro matice stejného typu a libovolný skalár platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \,, \tag{1}$$

$$(\alpha \mathbf{A})^\top = \alpha \mathbf{A}^\top \,. \tag{2}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Mějme soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & = & 0 \end{array}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Mějme soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad +x_2 & = & 2 \\ x_1 \quad -x_2 & = & 0 \end{array}$$

S využitím definice násobení vektoru skalárem a součtu vektorů:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Předchozí rovnici lze přepsat:

$$x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Předchozí rovnici lze přepsat:

$$x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

Ze sloupcových vektorů $\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}$ sestavíme matici

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Předchozí rovnici lze přepsat:

$$x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

Ze sloupcových vektorů $\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}$ sestavíme matici

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Levá strana rovnice $(*)$ definuje součin matice **A** a vektoru **x**, takže

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

DEFINICE 12

Součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m, n) *a sloupcového vektoru* $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze n nazýváme vektor dimenze m definovaný předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}.$$

1.6 Násobení matice a vektoru

DEFINICE 12

Součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m, n) *a sloupcového vektoru* $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze n nazýváme vektor dimenze m definovaný předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}.$$

Rozepsáním definice po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{x}.$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Definice 12
Součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m, n) *a sloupcového vektoru* $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze n nazýváme vektor dimenze m definovaný předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}.$$

Rozepsáním definice po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{x}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{y} & & \mathbf{A} & \mathbf{x} & \\ \begin{bmatrix} \\ y_i \\ \\ \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \longrightarrow & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \Bigg\downarrow \end{array}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & + & 1 \cdot 2 & + & 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & + & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & + & 1 \cdot 2 & + & 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & + & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

VĚTA 5

Pro libovolné matice **A**, **B** typu (m, n), n-rozměrné vektory **u**, **v** a skalár α platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \tag{2}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3}$$

1.6 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & + & 1 \cdot 2 & + & 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & + & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

VĚTA 5

Pro libovolné matice **A**, **B** typu (m, n), n-rozměrné vektory **u**, **v** a skalár α platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \tag{2}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{3}$$

DŮKAZ: (2) $\left[\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right]_i = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a_{i1}(u_1 + v_1) + \cdots + a_{in}(u_n + v_n) =$

$$= (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) =$$

$$= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{v} = [\mathbf{A}\mathbf{u}]_i + [\mathbf{A}\mathbf{v}]_i,$$

1.7 Násobení matic

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ libovolné čtvercové matice řádu 3, $\mathbf{x}$ vektor dimenze 3.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\left[x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}\right] = x_1\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}$$

Odtud můžeme definovat matici $\mathbf{A}\mathbf{B} = \left[\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}\right]$.

1.7 Násobení matic

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ libovolné čtvercové matice řádu 3, $\mathbf{x}$ vektor dimenze 3.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\left[x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}\right] = x_1\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}$$

Odtud můžeme definovat matici $\mathbf{AB} = \left[\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}\right]$.

DEFINICE 13

Jestliže $\mathbf{A}$ je matice typu (m, p) a $\mathbf{B}$ je matice typu (p, n), pak *součin matic* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{AB}$ typu (m, n) definovaná předpisem

$$\mathbf{AB} = \left[\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}}\right].$$

1.7 Násobení matic

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

1.7 Násobení matic

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

1.7 Násobení matic

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AB} & & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} \quad [AB]_{ij} \quad \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ & \longrightarrow & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{1j} & \\ \vdots & \downarrow \\ b_{pj} & \end{bmatrix} \end{array}$$

1.7 Násobení matic

PŘÍKLAD 7 Příklady násobení matic:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

1.7 Násobení matic

PŘÍKLAD 7 Příklady násobení matic:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

1.7 Násobení matic

PŘÍKLAD 7 Příklady násobení matic:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 0 & 0\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 3\cdot 0 & -2\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$ nelze násobit!!!

1.7 Násobení matic

Z definice lze ihned vidět, že pro libovolné matice **A**, **B** a vektor **x** je $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}$ pokud jsou tyto výrazy definovány.

1.7 Násobení matic

Z definice lze ihned vidět, že pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a vektor $\mathbf{x}$ je $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}$ pokud jsou tyto výrazy definovány. Obecněji platí následující vztahy.

VĚTA 6

Pro libovolný skalár α a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{1}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C} \tag{2}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{C} \tag{3}$$

kdykoliv jsou uvedené výrazy definovány.

1.7 Násobení matic

Z definice lze ihned vidět, že pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a vektor $\mathbf{x}$ je $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}$ pokud jsou tyto výrazy definovány. Obecněji platí následující vztahy.

VĚTA 6

Pro libovolný skalár α a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \tag{2}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} \tag{3}$$

kdykoliv jsou uvedené výrazy definovány.

DŮKAZ (2):

$$\left[A(B+C)\right]_{ij} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{s}_j^{\mathbf{C}}) =$$

$$= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_j^{\mathbf{C}} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij}$$

1.7 Násobení matic

Násobení matic je velmi výpočetně nákladné. Je proto velmi důležité operace dělat co nejefektivněji.

1.7 Násobení matic

Násobení matic je velmi výpočetně nákladné. Je proto velmi důležité operace dělat co nejefektivněji.

Operace násobení matic se čtvercovými maticemi řádu n totiž potřebuje $n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2$ operací, tj. výraz $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ potřebuje $4n^3 - 2n^2$ při součinech matic a n^2 operací pro součet matic, tj. celkem $4n^3 - n^2$ operací, zatímco výraz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$ potřebuje $2n^3$ tedy přibližně $\frac{1}{2}$ původního počtu operací.

1.7 Násobení matic

VĚTA 7

Pro násobení matice $\mathbf{A}$ typu (m, p), matice $\mathbf{B}$ typu (p, q) a matice $\mathbf{C}$ typu (q, n) platí také tzv. *asociativní zákon*, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

1.7 Násobení matic

VĚTA 7
Pro násobení matice **A** typu (m, p), matice **B** typu (p, q) a matice **C** typu (q, n) platí také tzv. *asociativní zákon*, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$$

DŮKAZ:
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathbf{A}\left[\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, \mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = \left[\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}})\right] =$$
$$= \left[(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}.$$

1.7 Násobení matic

VĚTA 7

Pro násobení matice **A** typu (m, p), matice **B** typu (p, q) a matice **C** typu (q, n) platí také tzv. *asociativní zákon*, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$$

DŮKAZ:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathbf{A}\left[\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \ldots, \mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = \left[\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}), \ldots, \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}})\right] =$$

$$= \left[(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \ldots, (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}\right] = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}.$$

Indukcí lze dokázat obdobné tvrzení i pro součin více než tří matic.

Odtud speciálně vyplývá, že *mocnina čtvercové matice*

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k}$$

je definována jednoznačně neboť nezáleží na uzávorkování.

1.7 Násobení matic

Definice 14

Čtvercová matice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*. Jednotková matice řádu n se značí $\mathbf{I}_n$.

1.7 Násobení matic

DEFINICE 14

Čtvercová matice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*. Jednotková matice řádu n se značí $\mathbf{I}_n$.

VĚTA 8

Jestliže $\mathbf{A}$ je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

1.7 Násobení matic

DEFINICE 14

Čtvercová matice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*. Jednotková matice řádu n se značí $\mathbf{I}_n$.

VĚTA 8

Jestliže $\mathbf{A}$ je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

DŮKAZ:

Např. $[AI]_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + \dots + a_{ij} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$

1.7 Násobení matic

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

1.7 Násobení matic

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

1.7 Násobení matic

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Pro násobení matic tedy *neplatí komutativní zákon* a *mocnina nenulové matice* může být *nulová matice*!

1.7 Násobení matic

VĚTA 9
Jestliže je $\mathbf{A}$ matice typu (m, p) a $\mathbf{B}$ je matice typu (p, n), pak platí:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

1.7 Násobení matic

VĚTA 9
Jestliže je $\mathbf{A}$ matice typu (m, p) a $\mathbf{B}$ je matice typu (p, n), pak platí:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}\left[(\mathbf{AB})^\top\right]_{ij} &= [\mathbf{AB}]_{ji} = \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_i^{\mathbf{B}} = \\ &= a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jp}b_{pi} = \\ &= b_{1i}a_{j1} + \cdots + b_{pi}a_{jp} = \\ &= \left(\mathbf{s}_i^{\mathbf{B}}\right)^\top \left(\mathbf{r}_j^{\mathbf{A}}\right)^\top = \left[\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top\right]_{ij}.\end{aligned}$$