ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 0.1A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & -7 \\ -x_1 & & & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & -x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & -2 \end{array}$$

2. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = -x^2 - 6x + 4$ lineární kombinací polynomů

$$q(x) = -2x^2 + x, \quad r(x) = -2x + 1, \quad s(x) = -x^2 - x + 1.$$

   Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to P_2$ ($P_2 = \{p(x) = a_1x + a_0 \colon a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:

$$\mathcal{A}([-2;1;0]) = -x + 1, \ \ \mathcal{A}([0;-2;-1]) = 3x - 2, \ \ \mathcal{A}([1;1;1]) = 5x - 3$$

   Určete $\mathcal{A}([-3;2;0])$.

5. Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory matice

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

6. Uveďte definici vektorového podprostoru $\mathcal{U}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$

7. Určete a zdůvodněte, zda-li zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + 1]$$

   je lineární.

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 0.2A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 3 \\ -x_1 & & & -x_4 & = & 1 \\ & x_2 & & +4x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & & +x_3 & +5x_4 & = & -6 \end{array}$$

2. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = 2x^2 + 1$ lineární kombinací polynomů

$$q(x) = -x^2 + x - 1, \quad r(x) = 3x^2 - 6x + 4, \quad s(x) = 2x^2 - 7x + 4.$$

Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : P_3 \to P_3$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, definované předpisy:

$$\mathcal{A}\left(x^2 + x + 1\right) = -2x^2 - x, \;\; \mathcal{A}\left(-x^2 - 2x - 2\right) = 2x^2 + 1, \;\; \mathcal{A}\left(2x^2 - x\right) = -x^2 + x - 1$$

Určete $\mathcal{A}\left(5x^2 + 4x + 5\right)$.

5. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Uveďte definici lineárního obalu.

7. Určete a zdůvodněte, zda-li množina $\mathcal{V} = \left\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 - x_2 = 0\right\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ (operace sčítaní a násobení skalárem jsou definovány standardním způsobem).

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 0.3A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} -x_1 & -x_2 & & -5x_4 & = & 7 \\ -x_1 & & & -4x_4 & = & 5 \\ & x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = & -8 \\ & & -x_3 & -2x_4 & = & 3 \end{array}$$

2. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = 3x^2 - 4x - 4$ lineární kombinací polynomů

$$q(x) = 2x^2 - x, \quad r(x) = 2x^2 - 2x - 1, \quad s(x) = x^2 - x - 1.$$

Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to P_3$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:

$$\mathcal{A}([-2;1;-2]) = -2x^2 - 2x - 1, \quad \mathcal{A}([-2;0;-1]) = -5x^2 - 5x - 3, \quad \mathcal{A}([1;-1;1]) = -5x^2 - 4x - 2$$

Určete množinu vzorů $-8x^2 - 9x - 6$.

5. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Uveďte definici vektorového podprostoru $\mathcal{U}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$

7. Určete a zdůvodněte, zda-li množina $\mathcal{V} = \left\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0 \wedge x_1 + x_2 = 2\right\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ (operace sčítaní a násobení skalárem jsou definovány standardním způsobem).

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 0.4A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic
$$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & -2 \\ -x_1 & & & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & & -x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \end{array}$$

2. Najděte inverzní matici k matici
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda je vektor $v = [-4, -7, -9]$ lineární kombinací vektorů
$$u_1 = [1, 1, 1], u_2 = [-3, -2, 0], u_3 = [0, -1, -2].$$
Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : P_3 \to \mathbb{R}^2$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:
$$\mathcal{A}\left(-2x^2 - x\right) = [1; -1]\,,\ \ \mathcal{A}\left(-2x^2 + 1\right) = [1; -2]\,,\ \ \mathcal{A}\left(x^2 - x - 1\right) = [3; -4]$$
Určete množinu vzorů $[-4; 6]$.

5. Vypočtěte determinant matice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Uveďte definici lineárního zobrazení.

7. Určete a zdůvodněte, zda-li zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisem
$$\mathcal{A}\left([x_1, x_2]\right) = \left[x_2, x_1^2\right]$$
je lineární.

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 0.5A

Čas na práci: 100 minut

Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} & 2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & 14 \\ -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & -8 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 7 \end{array}$$

2. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = -5x^2 + 4x + 4$ lineární kombinací polynomů

$$q(x) = -2x^2 - x, \quad r(x) = 2x^2 - 1, \quad s(x) = -x^2 + x + 1.$$

Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : P_3 \to \mathbb{R}^2$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:

$$\mathcal{A}\left(-2x^2 - x\right) = [1; -1]\,, \ \mathcal{A}\left(-2x^2 - 2x + 1\right) = [-3; 2]\,, \ \mathcal{A}\left(-x^2 - x + 1\right) = [-2; 1]$$

Určete množinu vzorů $[-5; 3]$.

5. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Uveďte definici dimenze vektorového prostoru.

7. Určete a zdůvodněte, zda-li množina $\mathcal{V} = \{[1, 2, 3]\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ (operace sčítaní a násobení skalárem jsou definovány standardním způsobem).
