

Lineární algebra

doc. Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, FEI

petr.beremlijski@vsb.cz, místnost EA 534

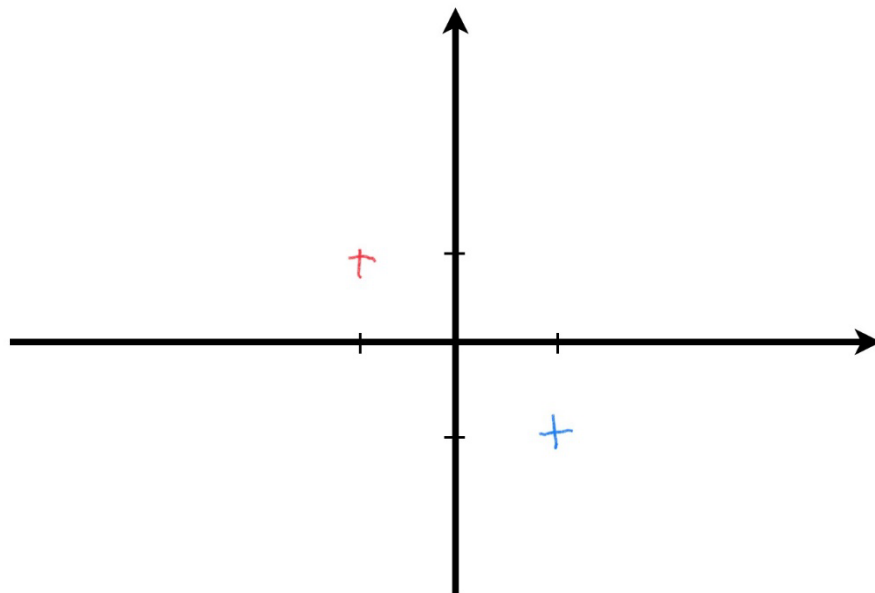
https://www.fei.vsb.cz/470/cs/osobni-stranky/beremlijski/vyuka/la_vam/la_vam_prez

Aplikace I: geometrická zobrazení

- Středová souměrnost
- Osová souměrnost
- Rotace
- Posunutí
- Stejnolehlost

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Středová souměrnost** se středem S je zobrazení, které zobrazí:
 - každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' ,
 - bod S na $S' = S$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Středová souměrnost** se středem $S = [0,0]$ může být popsána pomocí maticového násobení.

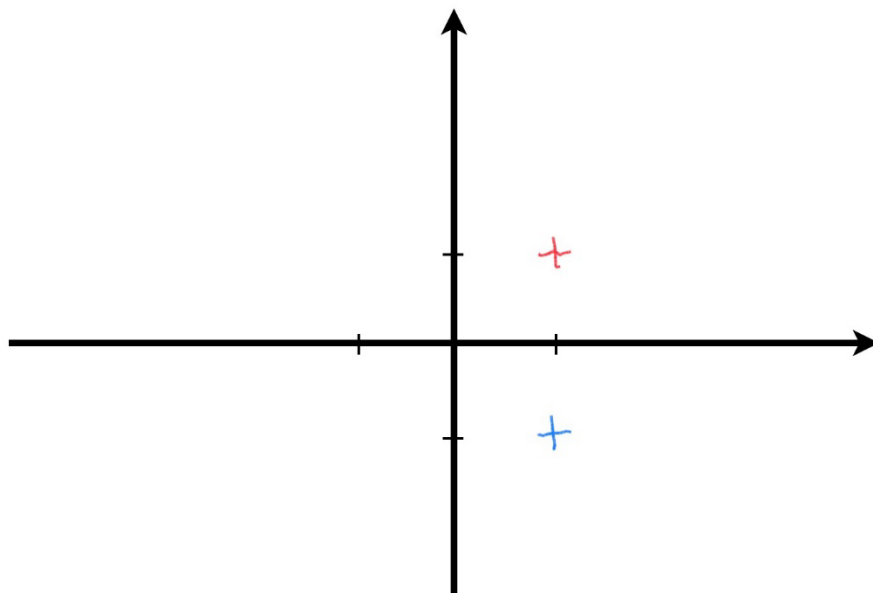
$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Osová souměrnost** s osou o je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod $X \notin o$ na bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o ,
 - každý bod $Y \in o$ na bod $Y' = Y$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Osová souměrnost** s osou $o = x$ může být popsána pomocí maticového násobení.

$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

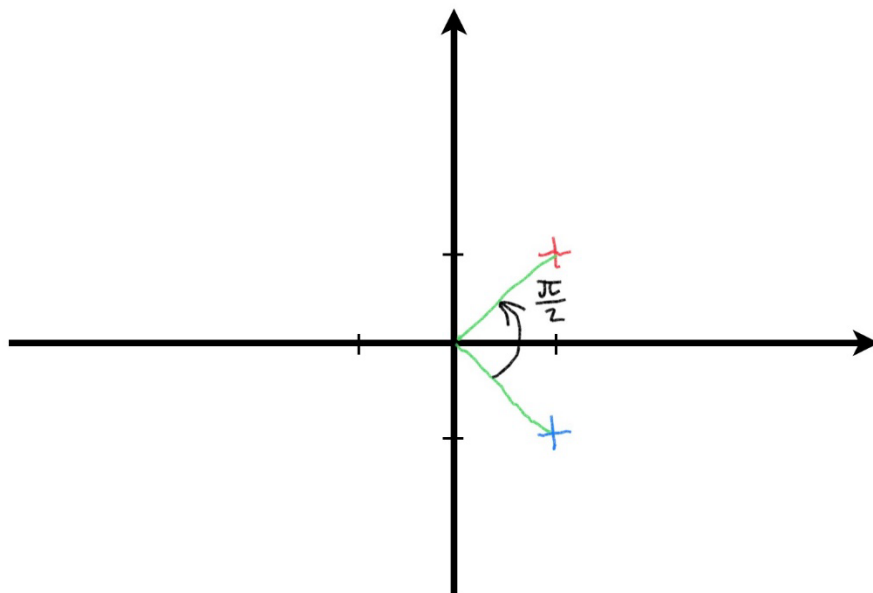
$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Rotace** kolem středu S o úhel φ je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ má velikost φ
 - bod S na $S' = S$.

Rotace proti směru hodinových ručiček se chápe v kladném smyslu, ve směru hodinových ručiček ji chápeme v záporném smyslu.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Rotace** kolem středu S může být popsána pomocí maticového násobení.

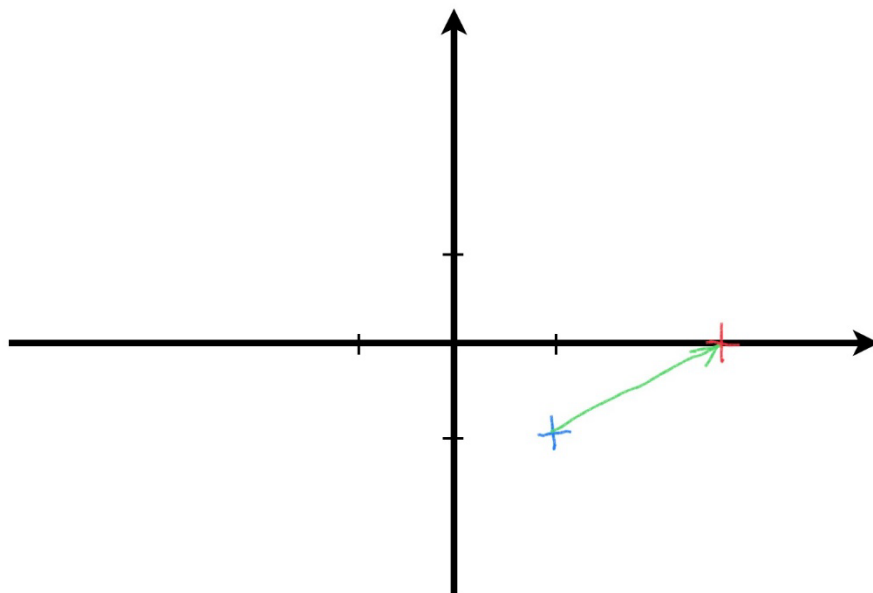
$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ a } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Posunutí** o vektor S je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod X na bod X' tak, že $X' = X + S$.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Posunutí** o vector S může být popsáno pomocí součtu matic.

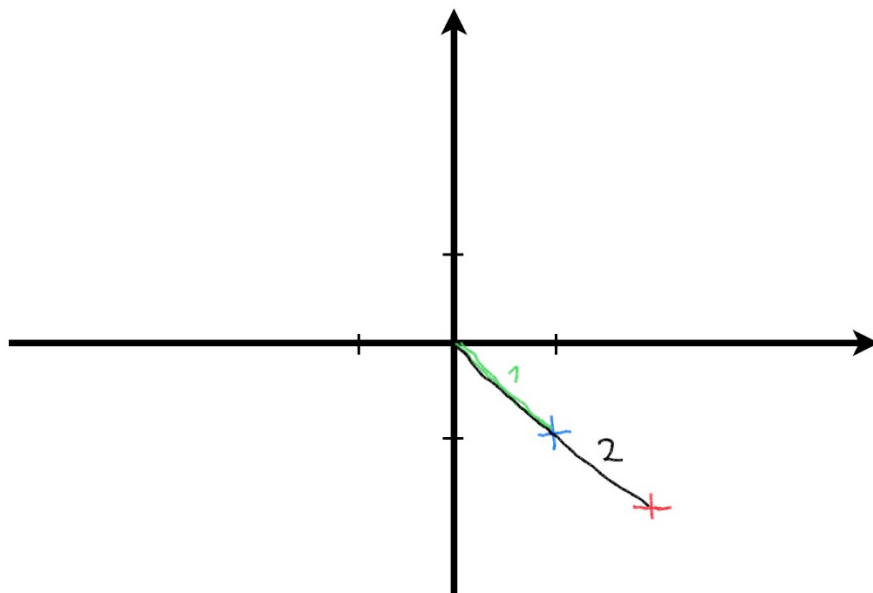
$$P' = P + S$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ a } S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pak } P' = P + S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Stejnolehlost** se středem S a koeficientem κ ($\kappa \neq 0$) je zobrazení, které zobrazí
 - každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $SX' = \kappa SX$,
 - bod S na $S' = S$.



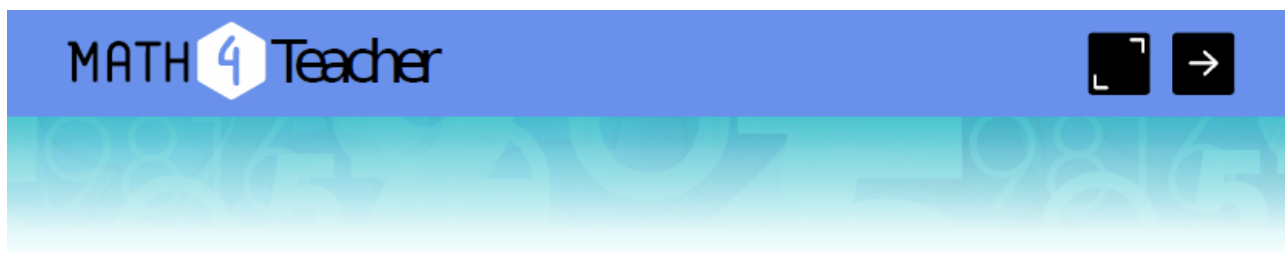
Aplikace I: geometrická zobrazení

- **Stejnolehlost** se středem S a koeficientem $\kappa = 2$ může být popsána pomocí maticového násobení.

$$P' = T \cdot P, \text{ kde } T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Např.: } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ pak } P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aplikace I: geometrická zobrazení



GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

Interaktivní test

Pro každou otázku v testu existuje právě jedna správná odpověď, kterou označíte kliknutím na příslušné políčko. Tlačítko Vyhodnotit slouží k ukončení testu, zobrazení výsledků a správných odpovědí.



Aplikace I: geometrická zobrazení

- Příklad**

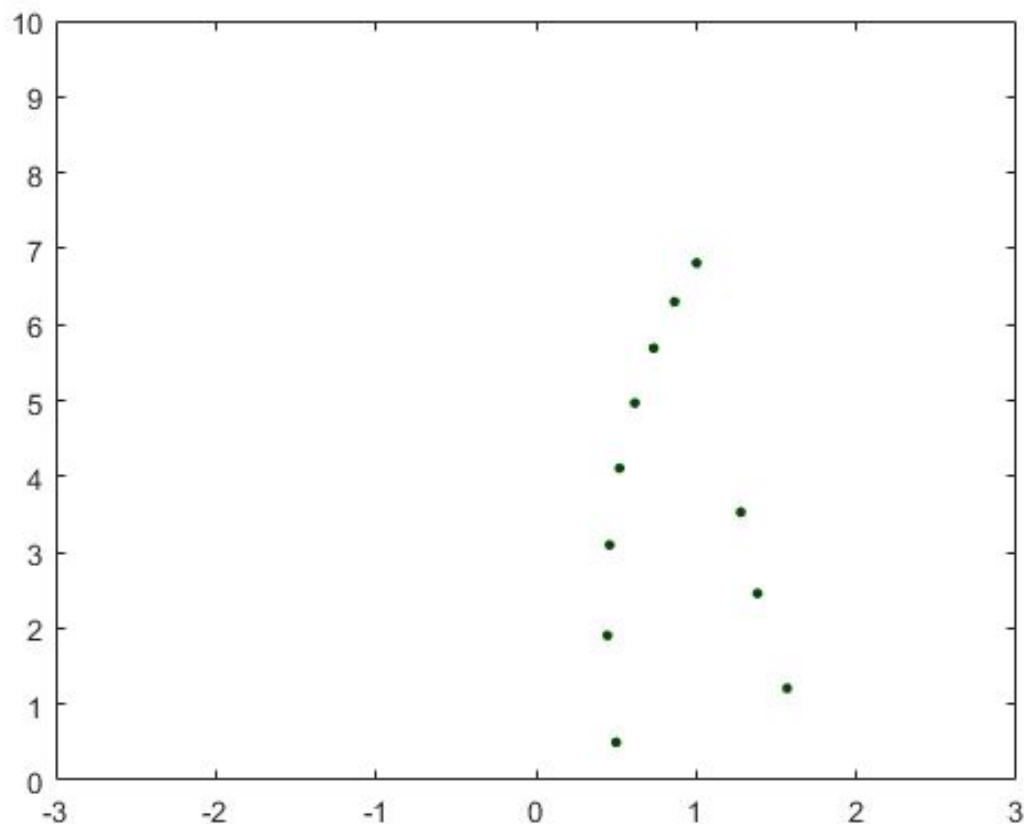
Vytvořte program, který v každé iteraci s danou pravděpodobností provede transformaci bodu z předchozí iterace podle následující tabulky:

Pravděpodobnost	κ (stejnolehlost)	φ (rotace)	S (posunutí)
85 %	0,85	-0,05	[0; 1,5]
7 %	0,3	1	[0; 1,5]
7 %	0,25	-1	[0; 0,5]
1 %	transformace definovaná maticí $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{bmatrix}$		

Jako počáteční iteraci volte bod [0,5; 0,5].

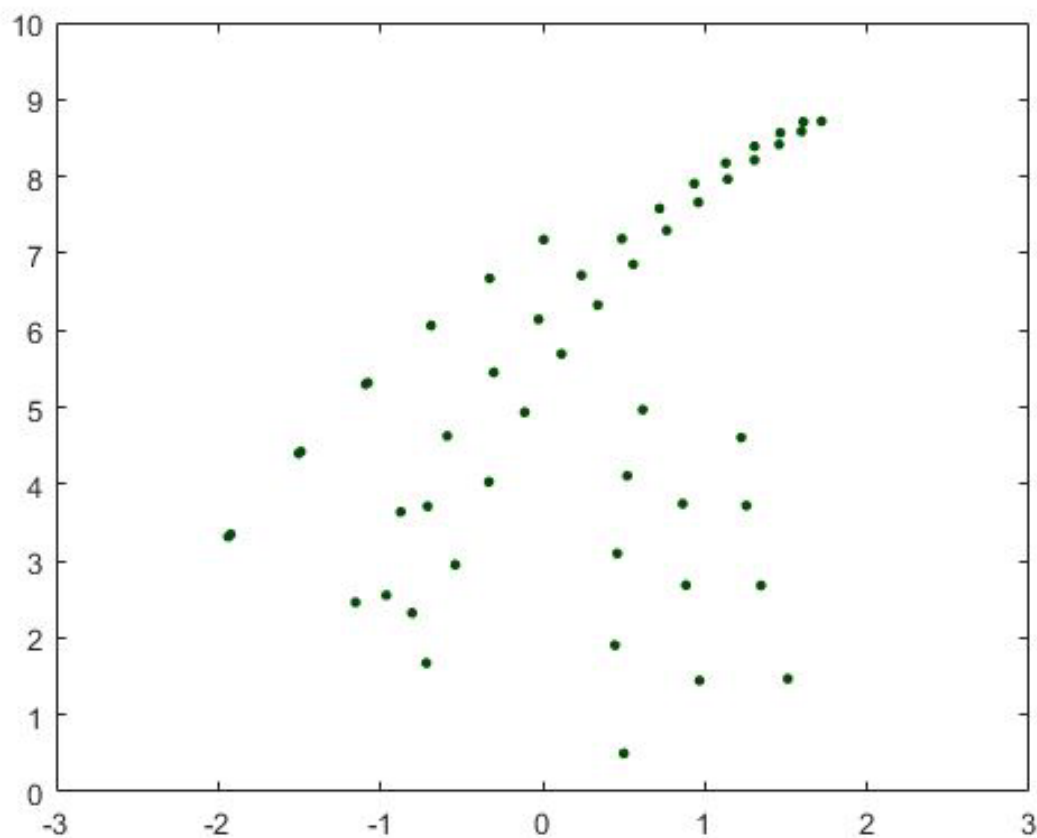
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 10 iteracích



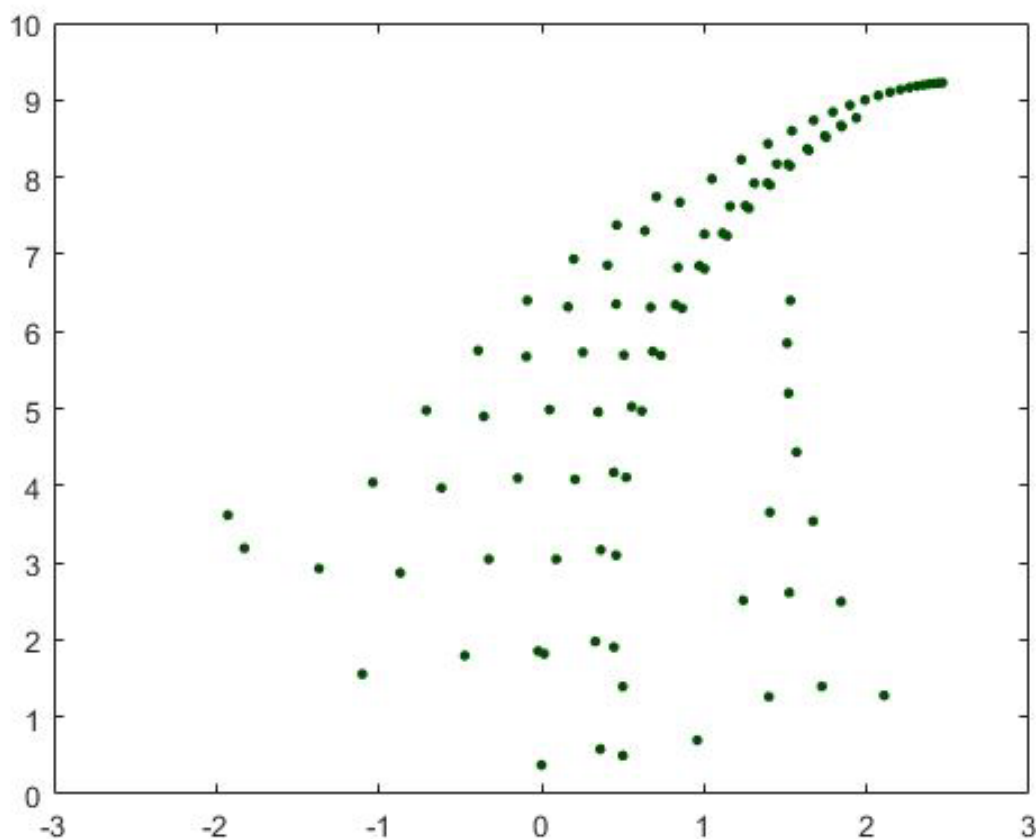
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 50 iteracích



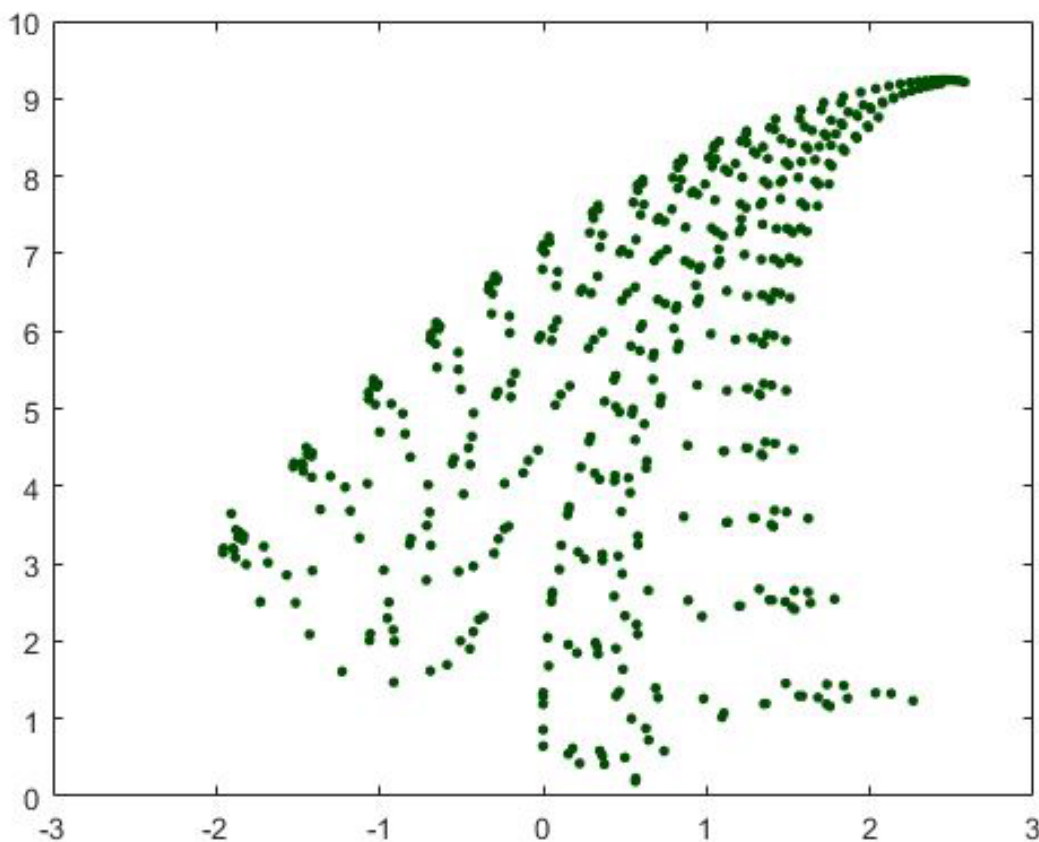
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 100 iteracích



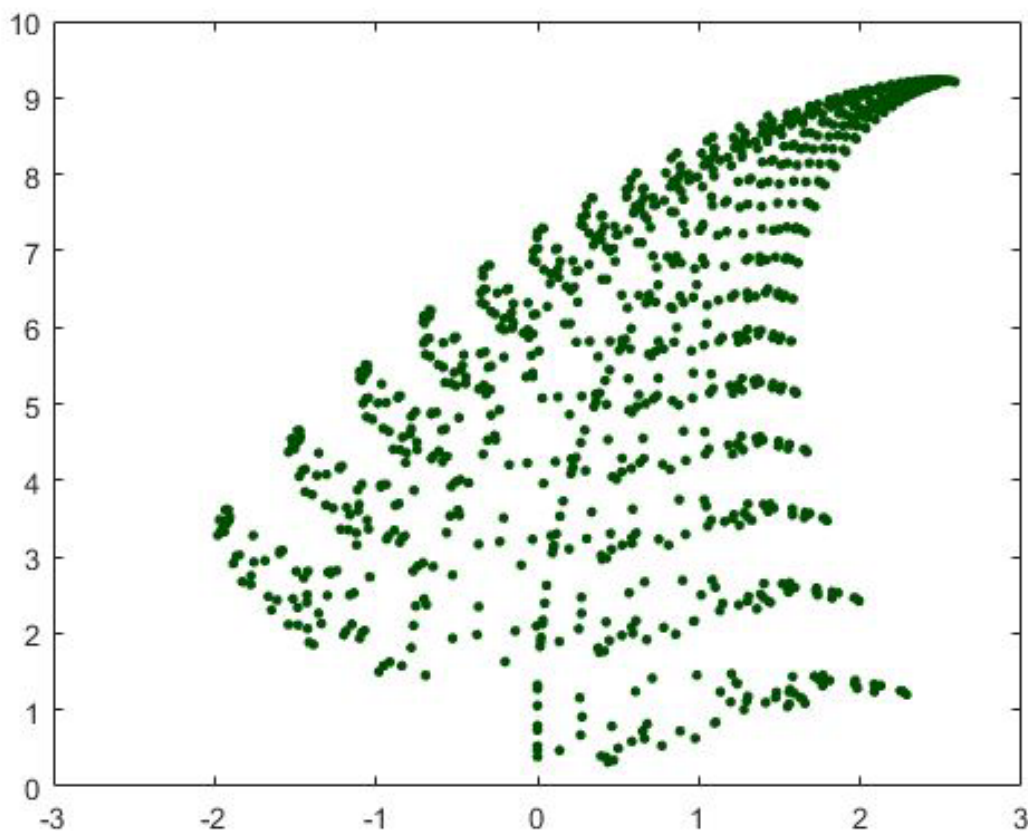
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 500 iteracích



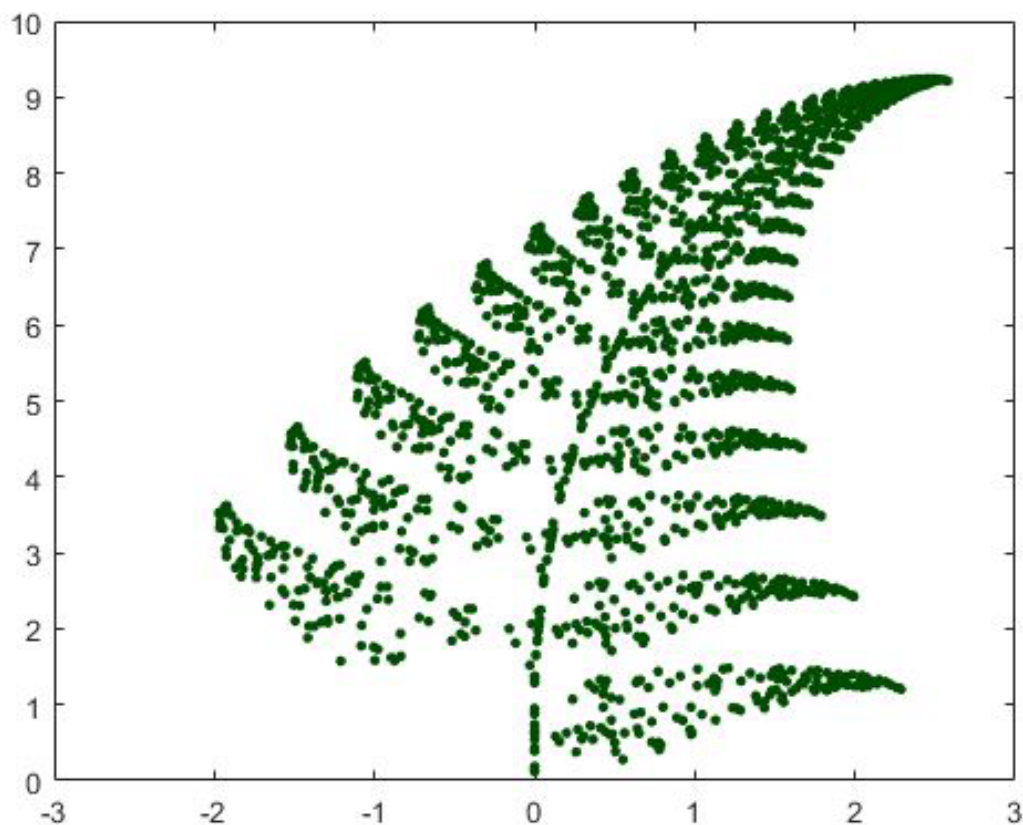
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 1 000 iteracích



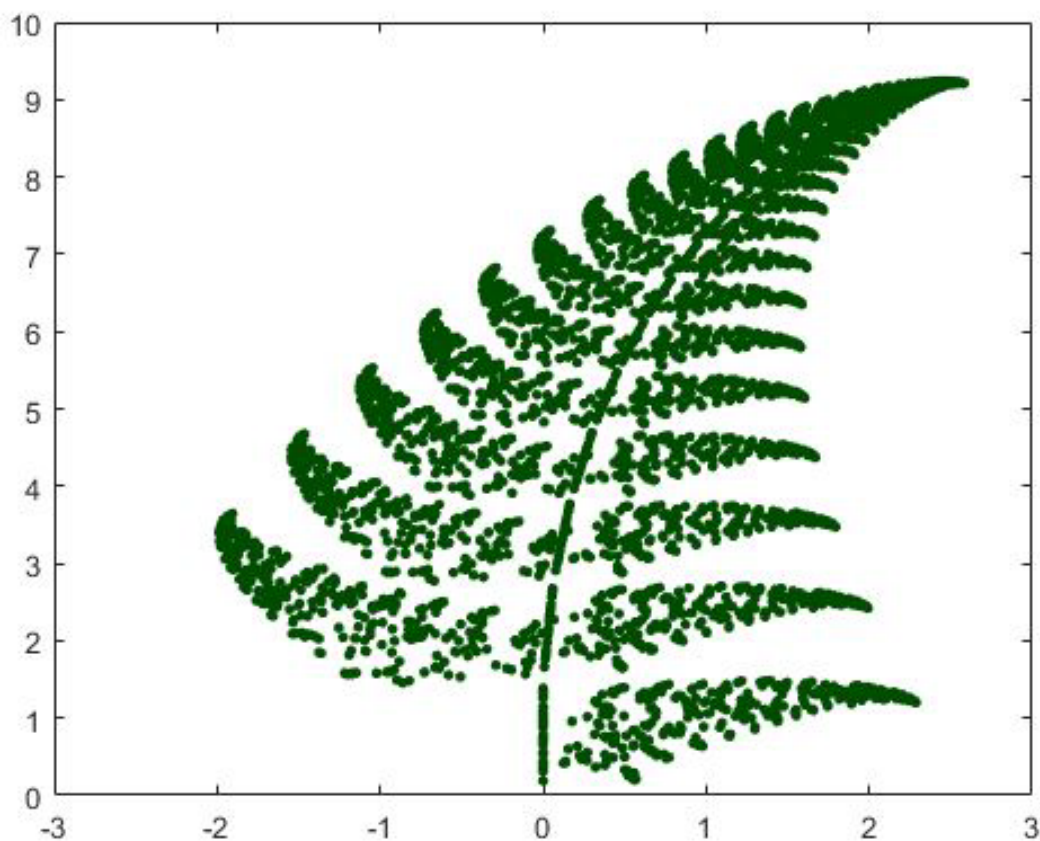
Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 2 000 iteracích

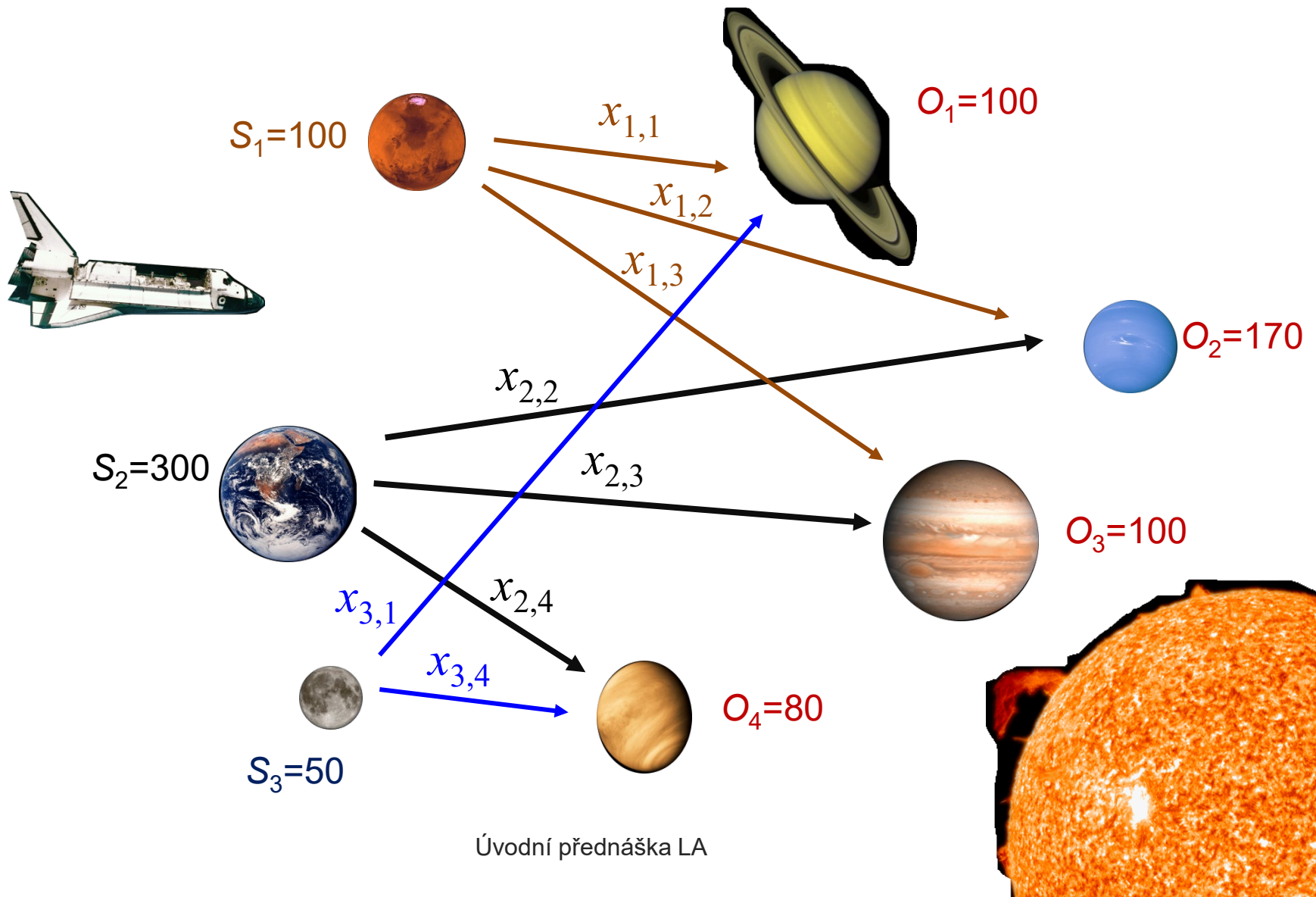


Aplikace I: geometrická zobrazení

Po 5 000 iteracích



Aplikace II: dopravní problém



Aplikace II: dopravní problém

$$\begin{array}{rcl}
 x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} & & = 100 \\
 & x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & = 300 \\
 & & x_{3,1} + x_{3,4} = 50 \\
 x_{1,1} & & + x_{3,1} = 100 \\
 & x_{1,2} + x_{2,2} & = 170 \\
 & & x_{1,3} + x_{2,3} = 100 \\
 & & & x_{2,4} + x_{3,4} = 80
 \end{array}$$

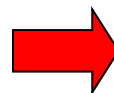


$$x_{1,1} = 50 + q, x_{1,2} = -50 + p - q, x_{1,3} = 100 - p$$

$$x_{2,2} = 220 - p + q, x_{2,3} = p, x_{2,4} = 80 - q$$

$$x_{3,1} = 50 - q, x_{3,4} = q$$

$$\text{pro lib. } p, q \geq 0 \text{ a } p \leq 100, q \leq 50$$

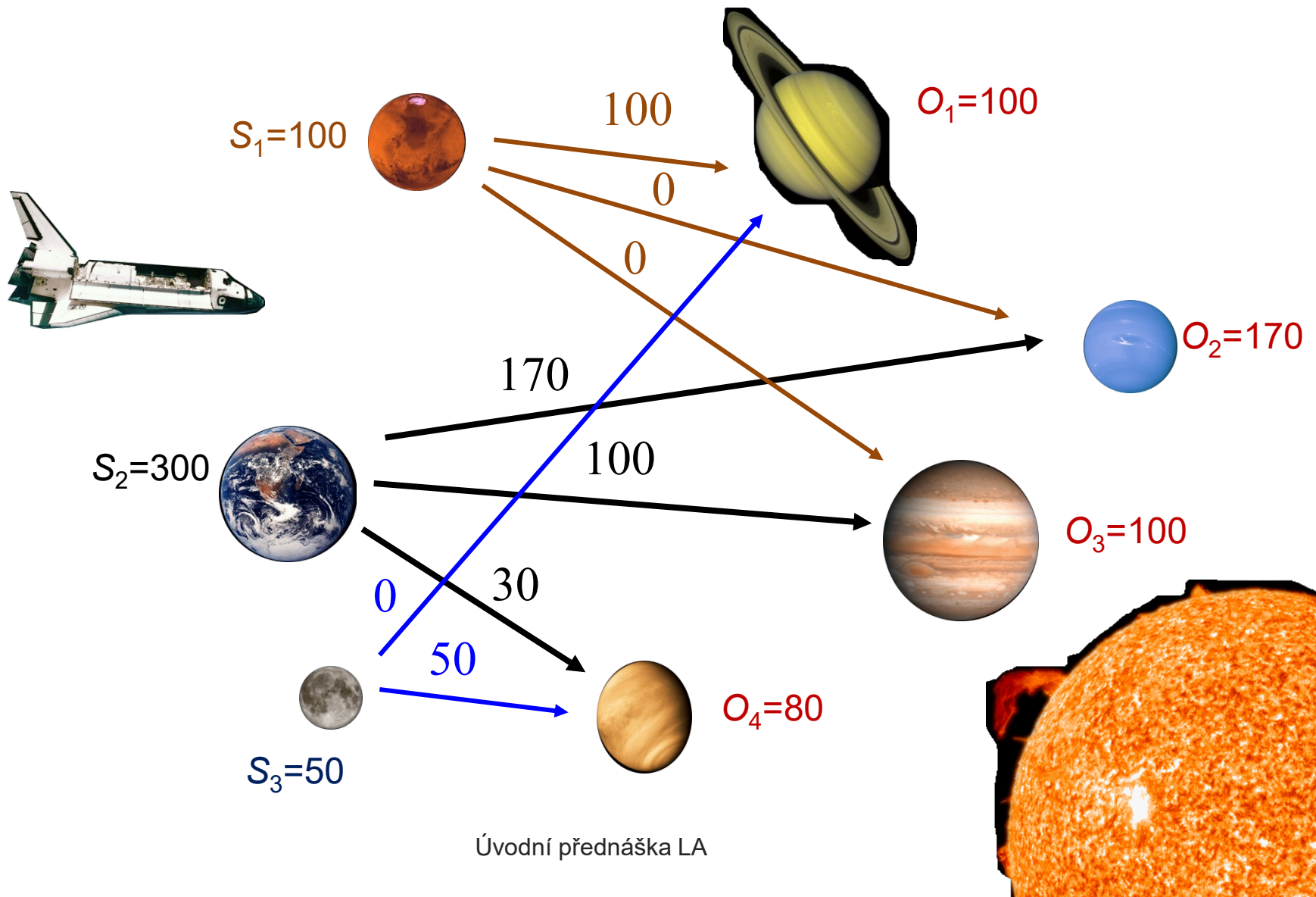


$$x_{1,1} = 100, x_{1,2} = 0, x_{1,3} = 0$$

$$x_{2,2} = 170, x_{2,3} = 100, x_{2,4} = 30$$

$$x_{3,1} = 0, x_{3,4} = 50$$

Aplikace II: dopravní problém



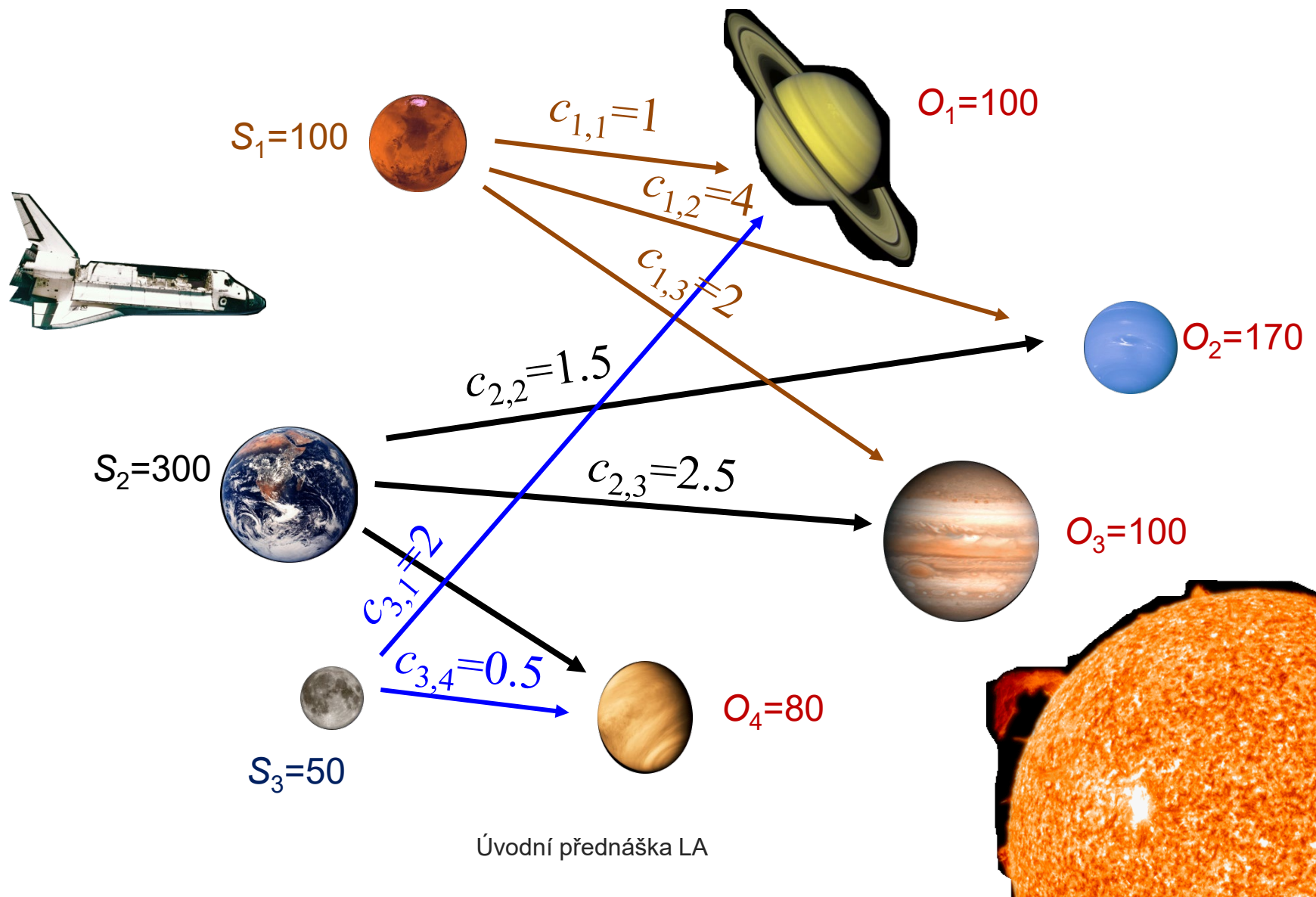
Aplikace II: dopravní problém

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 50 \\ 100 \\ 170 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

- Řešitelnost soustavy
 - soustava nemá řešení (zboží nelze rozvést)
 - soustava má jediné řešení (zboží lze rozvést jediným způsobem)
 - soustava má nekonečně mnoho řešení (zboží lze rozvést různým způsobem
 - možno dále specifikovat jakým)

Aplikace II: dopravní problém



Aplikace II: dopravní problém

Optimalizační úloha:

Nalézt $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,1}, x_{3,4} \geq 0$ tak, aby

$$1x_{1,1} + 4x_{1,2} + 2x_{1,3} + 1.5x_{2,2} + 2.5x_{2,3} + 0.5x_{2,4} + 2x_{3,1} + 0.5x_{3,4}$$

bylo co nejmenší, a zároveň

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = 100$$

$$x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 300$$

$$x_{3,1} + x_{3,4} = 50$$

$$x_{1,1} + x_{3,1} = 100$$

$$x_{1,2} + x_{2,2} = 170$$

$$x_{1,3} + x_{2,3} = 100$$

$$x_{2,4} + x_{3,4} = 80$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \\ c_{2,4} \\ c_{3,1} \\ c_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Maticový zápis:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Aplikace III: seznam receptů

- R1: Čočka po orientálsku
 - **Ingredience:** cca 1/4 kg čočky, 2 rajčata, 1 mrkev, 1 větší cibule, kousek celeru (nemusí být), sůl, olej, špetka saturejky, kari podle chuti
- R2: Fazole s klobásou
 - **Ingredience:** 300 g bílých fazolí, 2 bobkové listy, 200 g klobásy, 1 velká cibule, 2 lžíce hladké mouky, 1 lžíce mleté papriky, 4 lžíce kečupu, 1 palička česneku, majoránka
- R3: Klobásový koláč se špenátem
 - **Ingredience:** 250 g polohrubé mouky, 140 g másla, sůl, 1 cibule, 300 g mraženého špenátu, pepř, muškátový oříšek, 2 lžíce strouhanky, 500 g bílé klobásy v celku, 1 lžíce oleje, 100 g strouhaného sýra (např. goudy), 3 vejce, 6 lžic mléka

Aplikace III: seznam receptů II

- R4: Chilli con carne
 - **Ingredience:** 500 g mletého hovězího masa, 200 g červených fazolí, 2 lžíce oleje, 1 cibule, 2 zelené papriky, 500 g rajčat, 2 stroužky česneku, 1 lžíce sladké papriky, 1/2 lžička chilli, 1/2 lžičky oregana, 1/4 lžičky pepře, bobkový list, petželka, sůl
- R5: Argentinská čočka
 - **Ingredience:** 350 g čočky, olej, 2-3 velké cibule, 1 klobása, ostrý kečup Hamé, sůl, pepř
- R6: Čočka s kuřecím masem a mandlemi
 - **Ingredience:** 200 g čočky, 500 g kuřecích prsíček, 2 cibule, 100 g plátků mandlí, sůl, kari koření, 2 bobkové listy, olej

Recepty převzaty z www.recepty.cz

Aplikace III: klíčová slova

- Fazole (Fazolí)
- Čočka (Čočky)
- Kuřecí (Kuřecího)
- Hovězí (Hovězího)
- Klobása (Klobásy)
- Česnek (Česneku)

Je třeba provést indexování



Aplikace III: matice klíčových slov a dokumentů

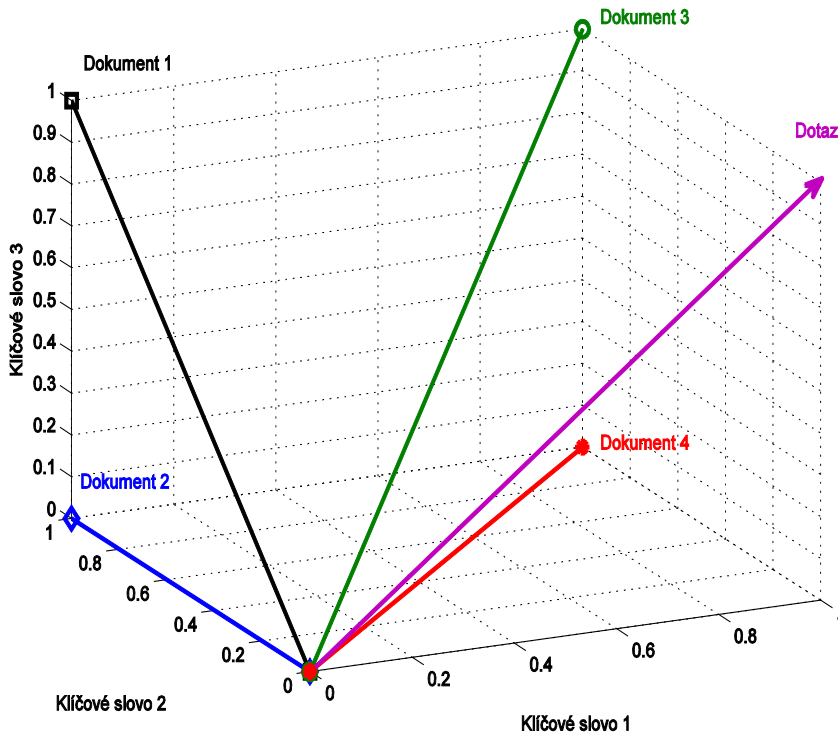
- Řádky matice reprezentují klíčová slova
- Sloupce reprezentují dokumenty
- Prvky matice představují počty výskytů klíčových slov v dokumentech
- Slupcové vektory pak představují výskyt klíčových slov v dokumentech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplikace III: dotazy

- Vyber „zdravý“ recept, tj. který bude obsahovat fazole, čočku a nebo kuřecí maso
 - Vektorový zápis: $q1=[1,1,1,0,0,0]$
- Vyber „nezdravý“ leč „chutný“ recept, který obsahuje klobásku a česnek
 - Vektorový zápis: $q2=[0,0,0,0,1,1]$
- Výběr receptů tak závisí na „blízkosti“ dotazů $q1$, $q2$ k jednotlivým sloupcům matice A
 - popisují výskyty klíčových slov v jednotlivých dokumentech

Aplikace III: test blízkosti



- Vzdálenost bodu dotazu od bodu definovaného sloupcem matice A

$$\|q - s_i^A\| = \sqrt{\sum_{k=1}^6 (q_k - s_{i,k}^A)^2}, i = 1, \dots, 6$$

- Cosinus úhlu mezi vektorem dotazu a sloupcem matice A

$$\cos \alpha_i = \frac{(q, s_i^A)}{\|q\| \cdot \|s_i^A\|}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Aplikace III: výsledek vyhledávání

- Test blízkosti: cosinus úhlu mezi vektorem dotazu a sloupcem matice A

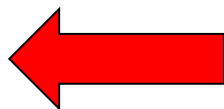
Dotaz q_1

$\cos \alpha_1 = 0.5774$
 $\cos \alpha_2 = 0.3333$
 $\cos \alpha_3 = 0$
 $\cos \alpha_4 = 0.3333$
 $\cos \alpha_5 = 0.4082$
 $\cos \alpha_6 = 0.8165$



Dotaz q_2

$\cos \alpha_1 = 0$
 $\cos \alpha_2 = 0.8165$
 $\cos \alpha_3 = 0.7071$
 $\cos \alpha_4 = 0.4082$
 $\cos \alpha_5 = 0.5000$
 $\cos \alpha_6 = 0$



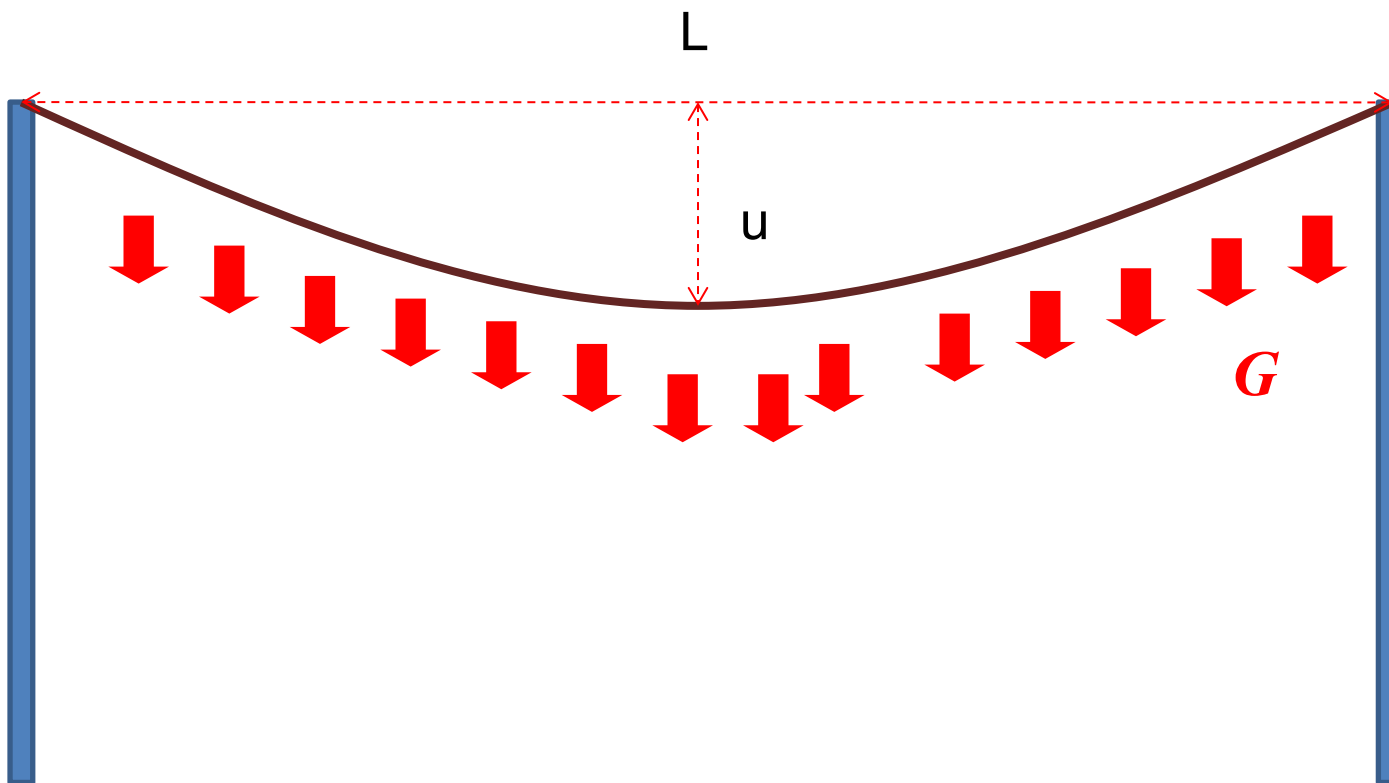
Čočka s kuřecím masem a mandlemi

Fazole s klobásou

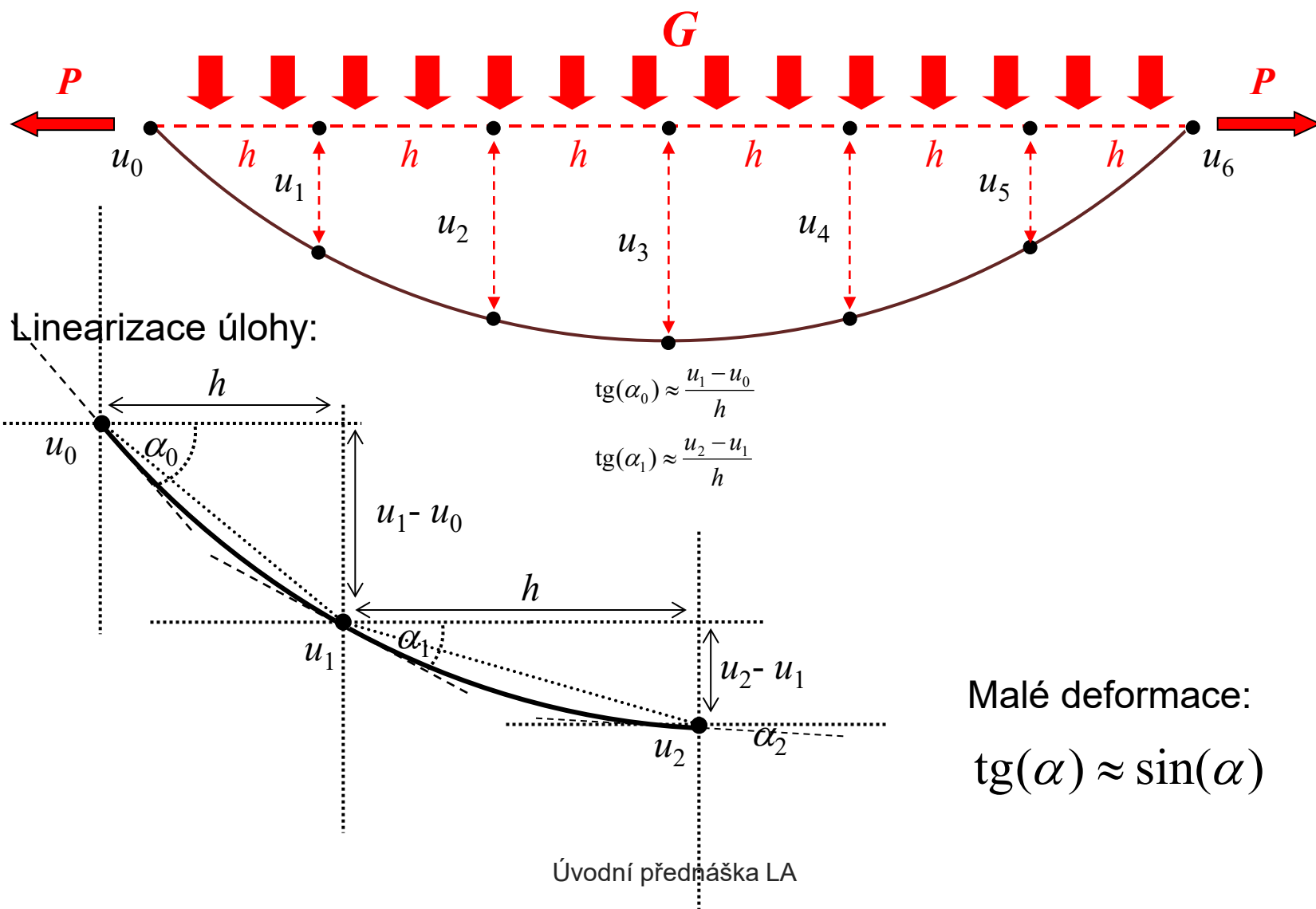


Aplikace IV: délka vodiče

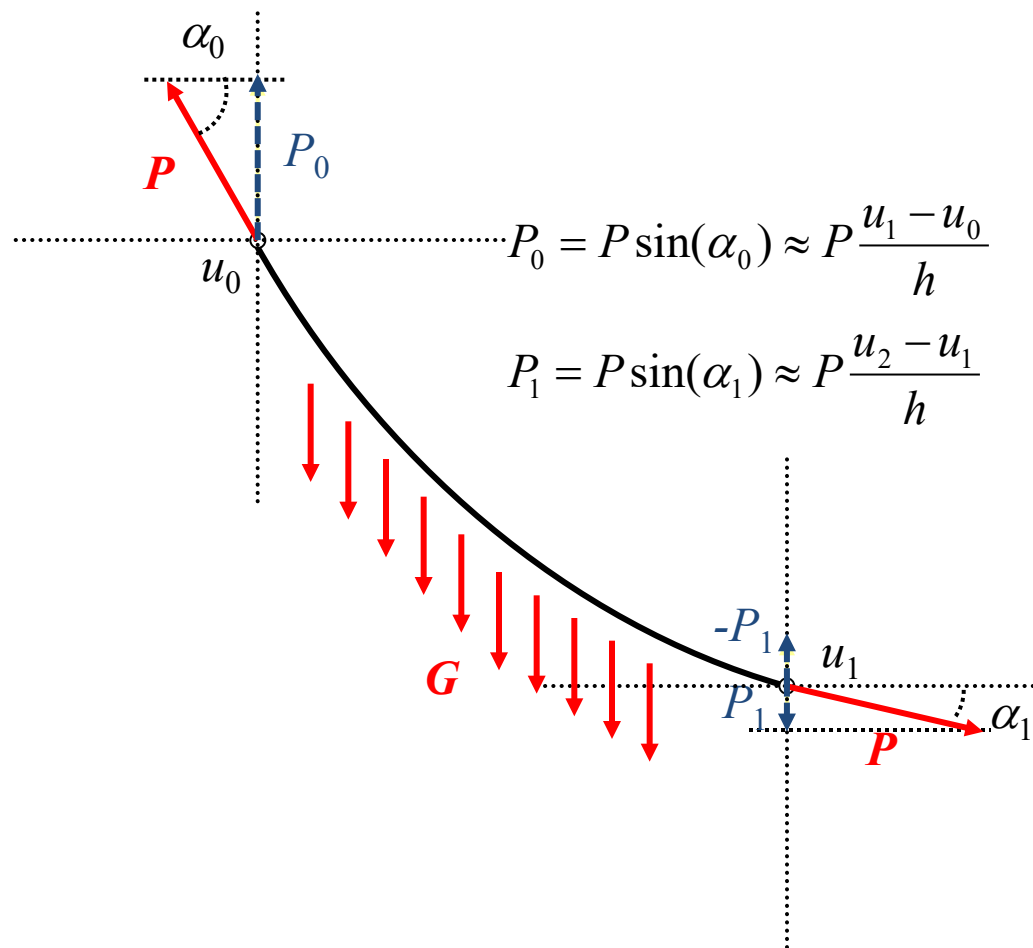
Určete potřebnou délku vodiče zavěšeného na sloupech vysokého napětí, pokud jsou sloupy od sebe vzdáleny 12 metrů.



Aplikace IV: délka vodiče



Aplikace IV: délka vodiče



$$P_0 = P \sin(\alpha_0) \approx P \frac{u_1 - u_0}{h}$$

$$P_1 = P \sin(\alpha_1) \approx P \frac{u_2 - u_1}{h}$$

$$P_0 + (-P_1) = hG$$

$$P \frac{u_1 - u_0}{h} - P \frac{u_2 - u_1}{h} = hG$$

$$-u_0 + 2u_1 - u_2 = \frac{h^2 G}{P}$$

Aplikace IV: délka vodiče

Soustava lineárních rovnic:

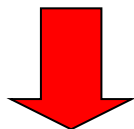
$$\begin{array}{rcl}
 -u_0 & +2u_1 & -u_2 & = h^2 F \\
 & -u_1 & +2u_2 & -u_3 & = h^2 F \\
 & & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & = h^2 F \\
 & & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = h^2 F \\
 & & & & -u_4 & +2u_5 & -u_6 & = h^2 F
 \end{array}$$

$$F = \frac{G}{P} = \frac{\rho_l g}{\text{"tuhost"}}$$

$$F = \frac{0.85 \cdot 9.81}{300} = 0.0278$$

$$L = 12m \Rightarrow h = \frac{L}{6} = 2m$$

$$u_0 = u_6 = 0$$



$$\begin{array}{rcl}
 2u_1 & -u_2 & = 0.1112 \\
 -u_1 & +2u_2 & -u_3 & = 0.1112 \\
 & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & = 0.1112 \\
 & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = 0.1112 \\
 & & & -u_4 & +2u_5 & = 0.1112
 \end{array}$$

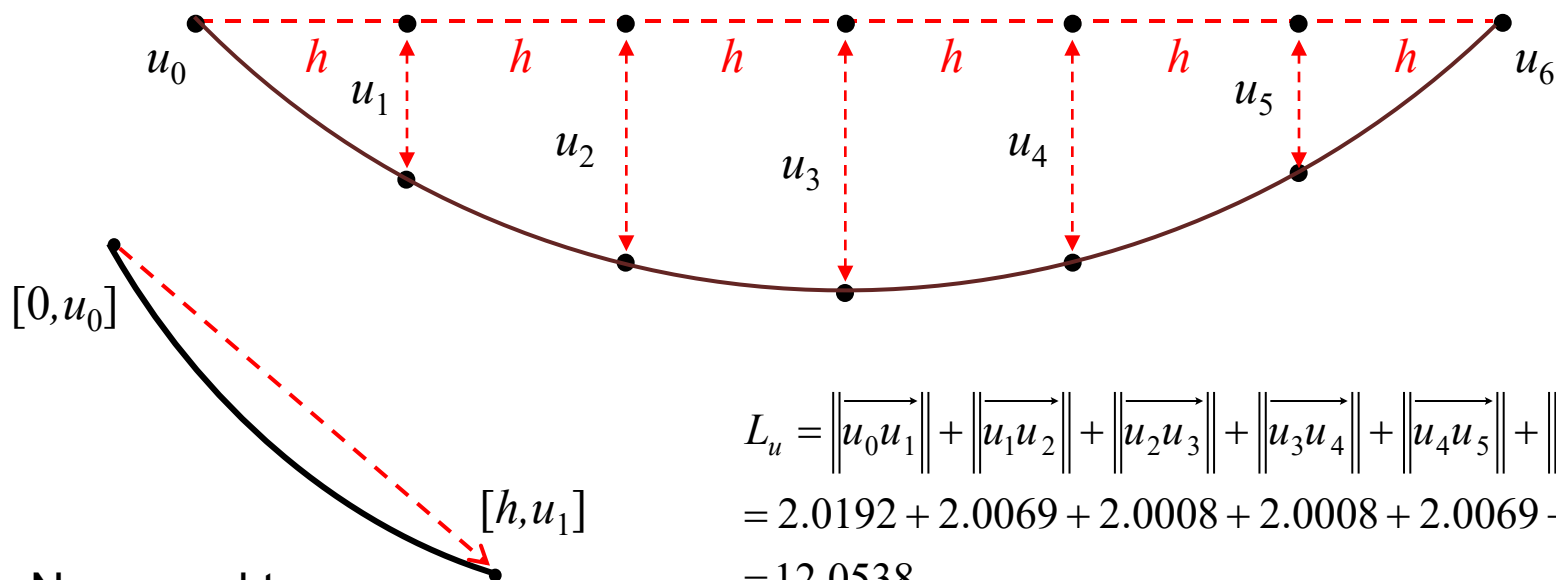
$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{b}$$



$$\begin{array}{l}
 u_1 = 0.2780 \\
 u_2 = 0.4448 \\
 u_3 = 0.5004 \\
 u_4 = 0.4448 \\
 u_5 = 0.2780
 \end{array}$$

Aplikace IV: délka vodiče

Výpočet délky:



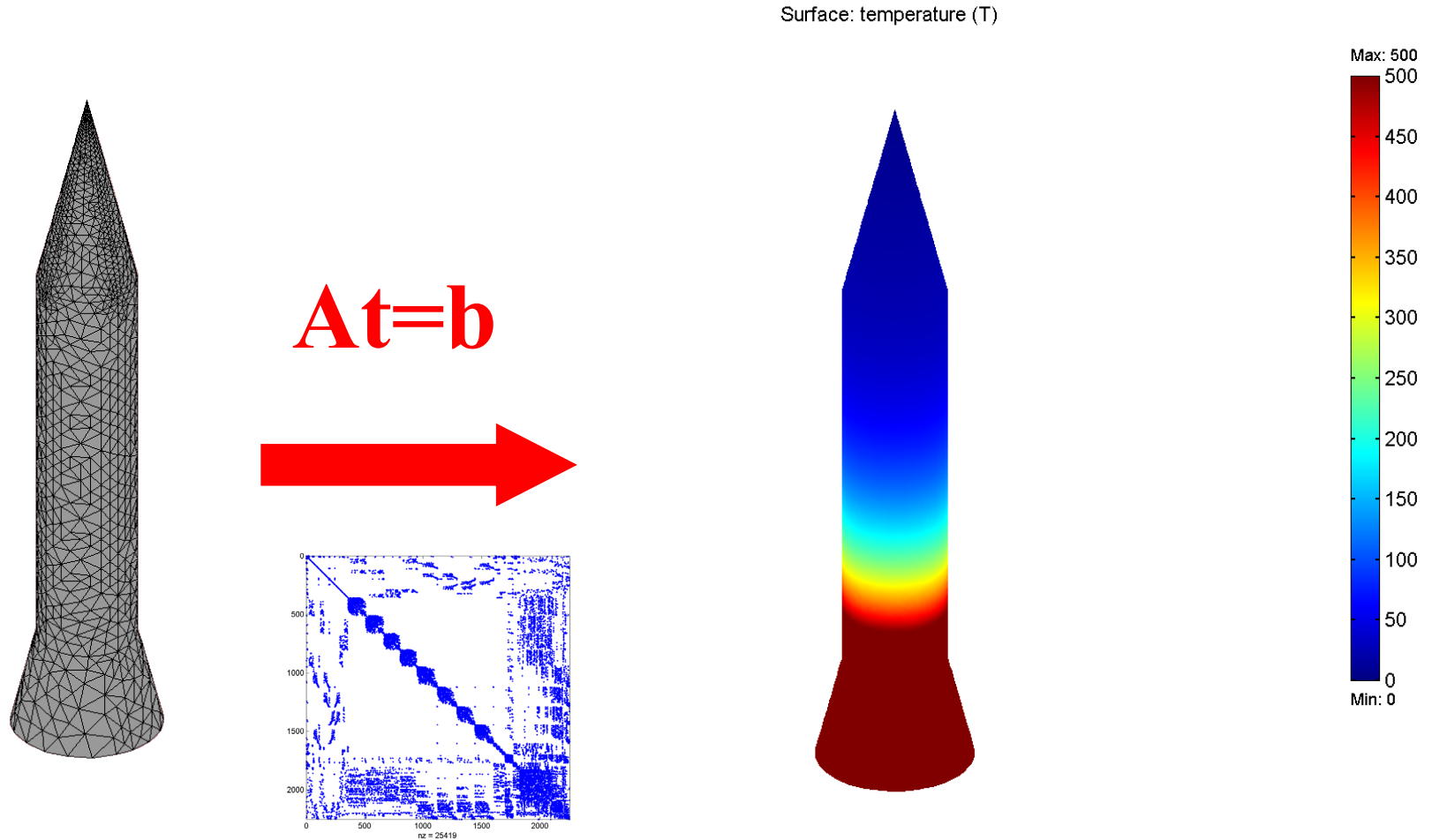
Norma vektoru:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u_0 u_1}\| &= \sqrt{(h-0)^2 + (u_1 - u_0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 0.278^2} = 2.0192 \end{aligned}$$

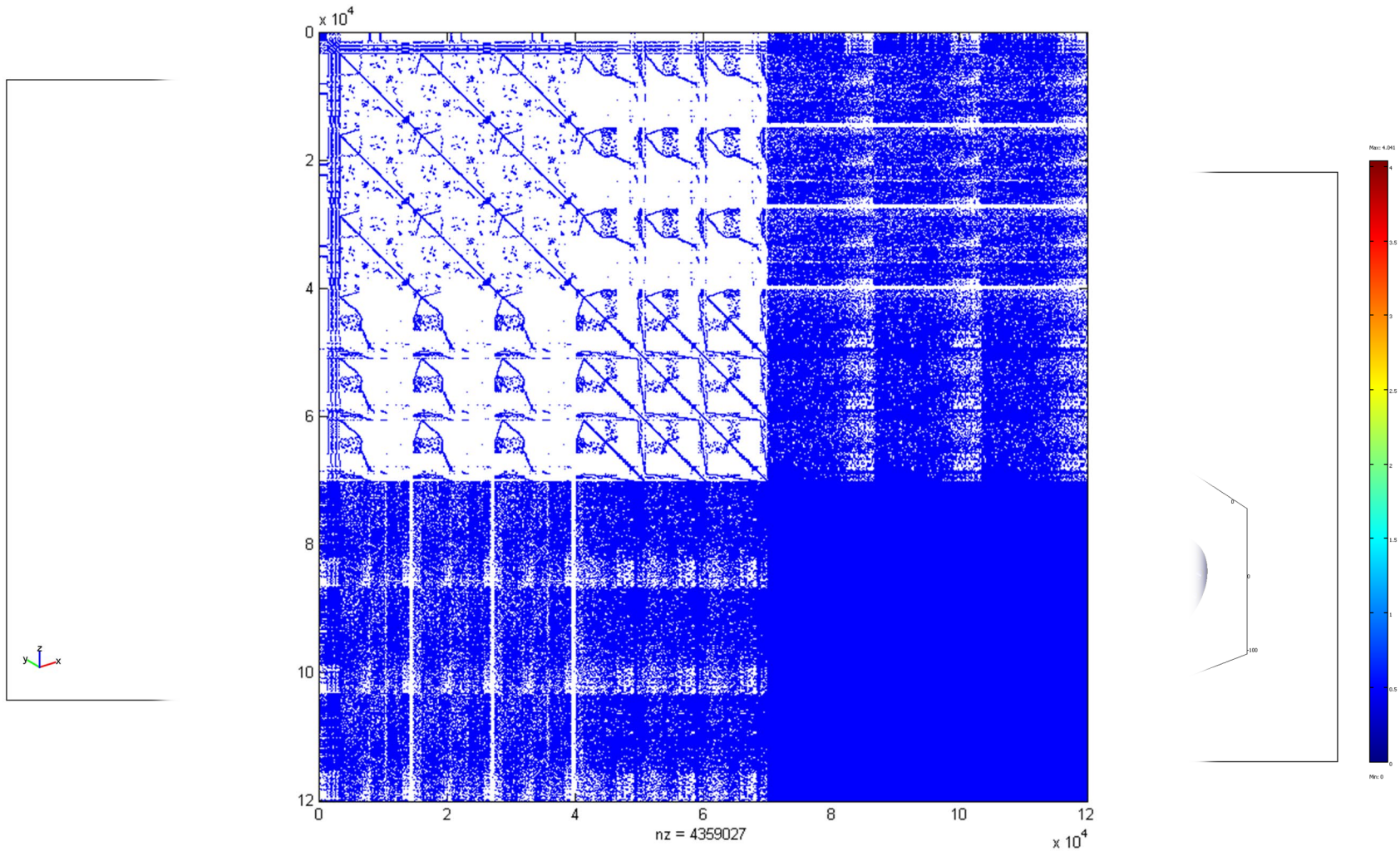
$$\begin{aligned} L_u &= \|\overrightarrow{u_0 u_1}\| + \|\overrightarrow{u_1 u_2}\| + \|\overrightarrow{u_2 u_3}\| + \|\overrightarrow{u_3 u_4}\| + \|\overrightarrow{u_4 u_5}\| + \|\overrightarrow{u_5 u_6}\| \\ &= 2.0192 + 2.0069 + 2.0008 + 2.0008 + 2.0069 + 2.0192 \\ &= 12.0538 \end{aligned}$$

Pokud jsou sloupy od sebe vzdáleny 12 metrů, potřebujeme 12.0538 metrů vodiče.

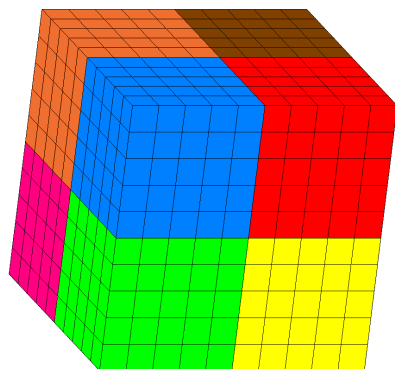
Aplikace V: složitější úloha



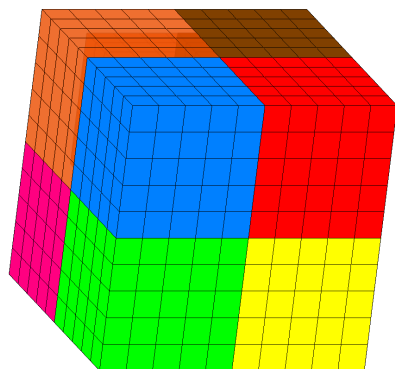
Aplikace VI: ještě složitější úloha



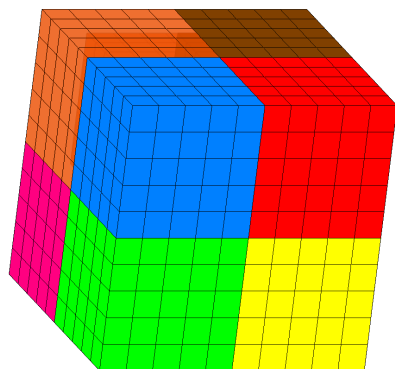
Paralelní řešení



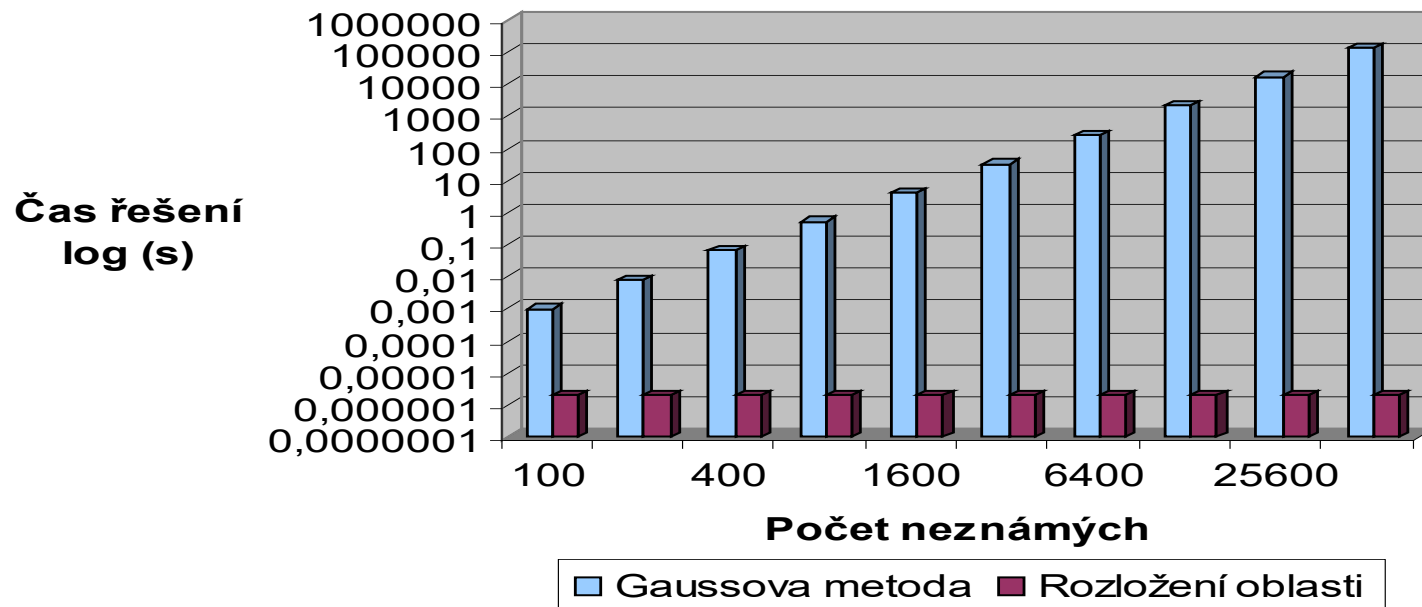
Paralelní řešení



Paralelní řešení



Škálovatelné algoritmy



Současné superpočítače

- **El Capitan**
- AMD (proc.)
- TOSS (OS)
- 11 039 616 jader
- 1 742 PetaFlops
- <http://www.top500.org> (06/2025)



Lawrence Livermore National Laboratory

IT4Innovations – superpočítač v Ostravě



<http://www.it4i.cz>

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě

- Anselm

- zprovozněn v květnu 2013, v provozu do roku 2021

- <https://www.it4i.cz/infrastruktura/anselm>

- Salomon

- zprovozněn v září 2015 (tehdy byl 40. nejvýkonnější superpočítač světa), v provozu do roku 2021

- <https://www.it4i.cz/infrastruktura/salomon>

- Barbora

- zprovozněn v říjnu 2019

- <https://www.it4i.cz/infrastruktura/barbora>

IT4Innovations – superpočítače v Ostravě

- Karolina

- uveden do provozu v roce 2021
- 195. nejvýkonnější superpočítač světa
(dle <http://www.top500.org> - 06/2025)
<https://www.it4i.cz/infrastruktura/karolina>

Obsah předmětu

- Operace s vektory a maticemi
 - vlastnosti těchto operací
- Řešení soustav lineárních rovnic
- Teorie vektorových prostorů
 - řešitelnost soustav lineárních rovnic
- Lineární zobrazení a transformace
 - zobecnění soustav lineárních rovnic
- Multilineární zobrazení, determinanty
- Úvod do spektrální analýzy

Organizace výuky

- Přednáška
- Cvičení

Hodnocení

- Cvičení (max. 30 bodů)
 - 2 písemné testy (každý za 12 bodů), minimálně 10 bodů je nutno získat
 - Domácí úkol (6 bodů)
 - Pro udělení zápočtu je nutno získat minimálně 10 bodů.

Hodnocení

- Zkouška (max. 70 bodů)
 - 50 bodů za písemnou zkoušku
 - 20 bodů za ústní zkoušku (minimálně je třeba získat 5 bodů)
- Celkem (max. 100 bodů)
 - nevyhověl (0-50 bodů)
 - dobře (51-65 bodů)
 - velmi dobře (66-85 bodů)
 - výborně (86-100 bodů)

Literatura

- Základní literatura
 - Z. Dostál, Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 2000
 - Z. Dostál, V. Vondrák, D. Lukáš, Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 2012
<http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra>
 - Sylaby přednášek na https://www.fei.vsb.cz/470/cs/osobni-stranky/beremlijski/vyuka/la_vam/la_vam_prez
- Doplnková literatura
 - L.Šindel, Sbírka úloh z algebry, VŠB-TU Ostrava 2006
 - B. Budinský, J. Charvát, Matematika I, SNTL Praha 1987
 - Sylaby cvičení na https://www.fei.vsb.cz/470/cs/osobni-stranky/beremlijski/vyuka/la_vam/la_vam_prez
- LMS Moodle
 - <https://lms.vsb.cz/course/view.php?id=135621>