

## Výroky a logické spojky

Výrok ... je to věta, která je možno přiřadit jednu ze dvou pravdivostních hodnot: pravda (0), nepravda (1)

Př.: "Auto je modré." je výrok; "Otevři okno!" není výrok

Negace výroku: Negací výroku  $A$  je výrok "Není pravda, že  $A$ ." Značíme:

$\text{non } A$  ;  $\neg A$  ;  $A'$ . Pravdivostní tabulka: 

| $A$ | $A'$ |
|-----|------|
| 1   | 0    |
| 0   | 1    |

Konjunkce výroků: Tvoříme ji pomocí logické spojky "a zároveň" ( $\wedge$ ).

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| 1 | 1 | 1            |
| 1 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 0            |
| 0 | 0 | 0            |

Konjunkce výroků  $A \wedge B$  je pravdivá pouze pokud jsou oba výroky pravdivé.

Disjunkce výroků: Tvoříme ji pomocí logické spojky "nebo" ( $\vee$ ).

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| 1 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 0 | 1 | 1          |
| 0 | 0 | 0          |

Disjunkce výroků  $A \vee B$  je pravdivá pokud je pravdivý alespoň jeden z výroků  $A, B$ .

Implikace výroků: Tvoříme ji pomocí logické spojky "jestliže - pak" ( $\Rightarrow$ ).

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| 1 | 1 | 1                 |
| 1 | 0 | 0                 |
| 0 | 1 | 1                 |
| 0 | 0 | 1                 |

Implikace výroků  $A \Rightarrow B$  je nepravdivá pouze v případě, že  $A$  je pravda a  $B$  je nepravda.

Ekvivalence výroků: Tvoříme ji pomocí logické spojky "přesně tehdy když" ( $\Leftrightarrow$ )

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| 1 | 1 | 1                     |
| 1 | 0 | 0                     |
| 0 | 1 | 0                     |
| 0 | 0 | 1                     |

$A \Leftrightarrow B$  je logický ekvivalentní s  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ .

| VÝROK                 | JEHO NEGACE                        |
|-----------------------|------------------------------------|
| $A'$                  | $A$                                |
| $A \wedge B$          | $A' \vee B'$                       |
| $A \vee B$            | $A' \wedge B'$                     |
| $A \Rightarrow B$     | $A \wedge B'$                      |
| $A \Leftrightarrow B$ | $(A \wedge B') \vee (B \wedge A')$ |

## Kvantifikované výroky

Kuantifikasi logis:  $\forall$  ... prokaidé!

$\exists \dots$  postoji

3! ... existuje právě jeden (jedno)

Výroková forma: je to věta obsahující jednu, nebo více proměnných.

Například: a) Auto x je modré.

b) Pro reálná čísla  $x$  a  $y$  platí, že  $x < y$ .

Kvantifikovaný výrok:  $\exists x \forall y (x + y = y + x)$  vznikne spojením kvantifikátorů a výrokové formy.

Napier's Rule:

" Pro každé reálné číslo  $x$  platí, že  $x^2 \geq 0$ . "

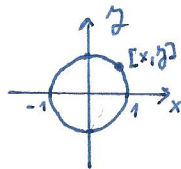
$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

| Výrok                                       | Negace                                                                                                           |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\forall x \in A : V(x)$                    | $\exists x \in A : \text{non } V(x)$                                                                             |
| $\exists x \in A : V(x)$                    | $\forall x \in A : \text{non } V(x)$                                                                             |
| $\exists! x \in A : V(x)$                   | $(\forall x \in A : \text{non } V(x)) \vee (\exists x \in A \exists y \in A : x \neq y \wedge V(x) \wedge V(y))$ |
| $\forall x \in M \forall y \in Z : V(x, y)$ | $\exists x \in M \exists y \in Z : \text{non } V(x, y)$                                                          |
| $\forall x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$ | $\exists x \in M \forall y \in Z : \text{non } V(x, y)$                                                          |
| $\exists x \in M \forall y \in Z : V(x, y)$ | $\forall x \in M \exists y \in Z : \text{non } V(x, y)$                                                          |
| $\exists x \in M \exists y \in Z : V(x, y)$ | $\forall x \in M \forall y \in Z : \text{non } V(x, y)$                                                          |
| $\exists y \in Z \exists x \in M : V(x, y)$ |                                                                                                                  |
| $\forall y \in Z \forall x \in M : V(x, y)$ |                                                                                                                  |
| $\exists y \in Z \forall x \in M : V(x, y)$ |                                                                                                                  |

Pr. Rozhodněte o pravdivosti výroků.

a)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

nepřavda

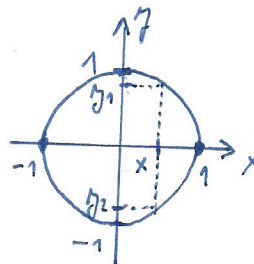


např. pro  $x=2$  takové  $y$  není:  
 $2^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = -3 !!!$

b)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

pravda

ano, například  $x=1, y=0$



c)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

pravda

ano, pro  $x=1$  a také pro  $x=-1$  máme jen jedno  $y$  tak, aby  $x^2 + y^2 = 1$

d)  $\exists! x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

nepřavda

ne, v předchozích příkladech jsme viděli, že takové  $x$  jsou dvě, ne jediné!

e)  $\exists! x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

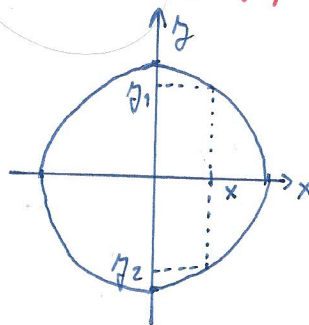
nepřavda

ne, pro libovolné  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  existuje takové  $y$ .

f)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

nepřavda

ne, pro libovolné  $x$  musí být  $y$  z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ .  
 nebo také proto, že je pravda jeho negace:  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \neq 1$



$y_1 = \sqrt{1-x^2}$

$y_2 = -\sqrt{1-x^2}$

Pro  $x \notin \langle -1, 1 \rangle$  by tyto odmocniny nebyly definovány (bylo by u nich zdp. číslo) ale pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  ano.

a)  $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$

pravda

Pv  
Pr.  
min Učete negaci výroku.

$$1.) \forall x \in \{1, 2, 3, 4\} : x \leq 2$$

$$\text{negace: } \exists x \in \{1, 2, 3, 4\} : \text{non}(x \leq 2) \Rightarrow \underline{\underline{\exists x \in \{1, 2, 3, 4\} : x > 2}}$$

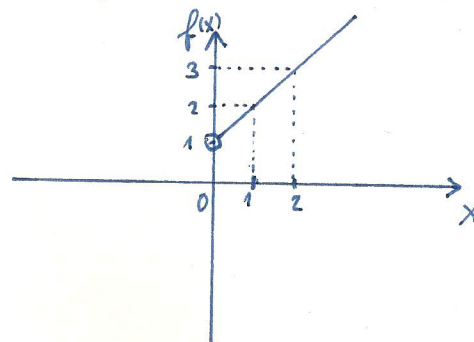
$$2.) \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$$

$$\text{negace: } \forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{\text{non}(x^2 + 1 < 0)}_{\text{to se musí stát jen tak, že}} \Rightarrow \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0}}$$

3.) Funkce  $f$  je zadána předpisem  $f(x) = x + 1$  a definičním oborem  $D(f) = (0, \infty)$ .

$$\text{výrok: } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$$

*Zobrazení je jasné, že je to nepravdivý výrok například pro  $x = -1$  není splněno  $f(x) \geq 0$ .*



*Pozor!  $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$  také není pravda  $\Rightarrow$  není to negace zadaného výroku!*

$$\text{negace: } \exists x \in \mathbb{R} : \text{non}(f(x) \geq 0)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : (f(x) < 0) \vee (f(x) \text{ neexistuje})$$

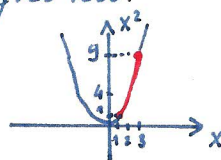
$$\underline{\underline{\exists x \in \mathbb{R} : (f(x) < 0) \vee (x \notin D(f))}}$$

$$4.) \forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\text{neg: } \exists x \in \mathbb{R} : \left( \frac{1}{x^2} \leq 0 \right) \vee \left( \frac{1}{x^2} \text{ není def.} \right)$$

Př: Rozhodněte o pravdivosti výroku.

1.)  $\forall x \in \langle 1, 3 \rangle : x^2 < 9$



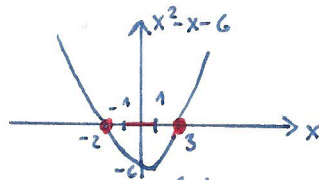
pro  $x=3 \in \langle 1, 3 \rangle$   
neplatí  $x^2 < 9$

není pravdivý

( $\Rightarrow$  pravdivá je jeho negace :  $\exists x \in \langle 1, 3 \rangle : x^2 \geq 9$ )

1.5)  $\forall x \in (-1, 1) : x^2 - 3x + 2 > 0$

2.)  $\exists x \in (-1, 1) : x^2 - x - 6 = 0$

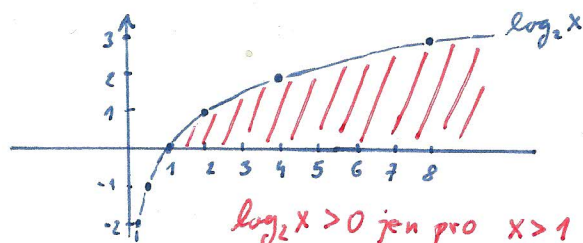


$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$  je splněno jen pro  $x=3$  nebo  $x=-2$

není pravdivý

( $\Rightarrow$  pravdivá je jeho negace :  $\forall x \in (-1, 1) : x^2 - x - 6 \neq 0$ )

3.)  $\forall x \in \mathbb{R} : \log_2 x > 0$



$\log_2 x > 0$  jen pro  $x > 1$



není pravdivý

( $\log_2 x = y \Leftrightarrow 2^y = x$ )

$2^0 = 1 \Rightarrow \log_2 1 = 0$

$2^1 = 2 \Rightarrow \log_2 2 = 1$

$2^2 = 4 \Rightarrow \log_2 4 = 2$

$2^3 = 8 \Rightarrow \log_2 8 = 3$

$2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} = -1$

$2^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = -2$

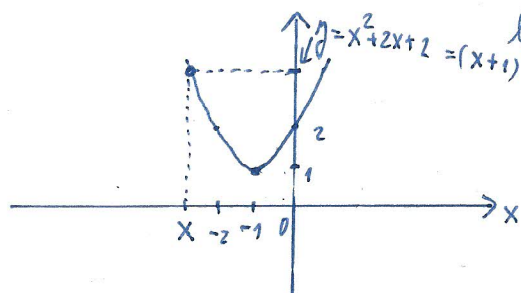
$\Rightarrow$  pravdivá je jeho negace :  $\exists x \in \mathbb{R} : \text{non}(\log_2 x > 0)$

$\exists x \in \mathbb{R} : (\log_2 x \leq 0 \vee x \notin D(f))$

(ale pravdivý je i výrok  $\exists x \in \mathbb{R} : \log_2 x \leq 0$  !)

$$4.) \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \text{rovnice } x^2 + 2x + 2 \text{ nemá kořeny!} \Rightarrow \text{grafem je parabola, která neprotíná osu } x:$$



$\Rightarrow$  Výrok je pravdivý

$$5.) \exists! x \in \mathbb{N} \exists! y \in \mathbb{N} : x \geq y$$

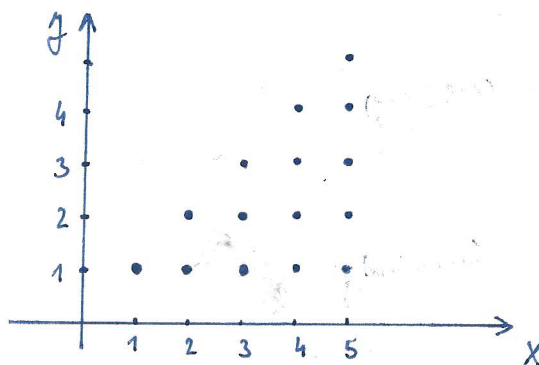
$$x=1 \geq y=1$$

$$x=2 \geq y=1, 2$$

$$x=3 \geq y=1, 2, 3$$

...

$\Rightarrow$  Výrok je pravdivý



$$6.) \exists! y \in \mathbb{N} \exists! x \in \mathbb{N} : x \geq y$$

$y=1$  to není, protože k němu existuje více (mnoho) ... 3, 2, 1 =  $x \geq y=1$

$y=2$  to není protože k němu existuje více (mnoho) ... 4, 3, 2 =  $x \geq y=2$

...

K danému  $y$  najdu jistě čísla  $y+1, y+2 \in \mathbb{N}$ , které jsou větší  $\Rightarrow$

nevyhovuje ani jedno  $y \in \mathbb{N} \Rightarrow$  neexistuje právě jedno takové  $y \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Výrok je nepravdivý

Poznámka: Z 5.) a 6.) plyne, že nemohu „prohazovat“  $\exists!$  a  $\exists!$ . Tzn. výrok

$$\exists! x \in A \exists! y \in B : \forall (x, y)$$

$$\text{a } \exists! y \in B \exists! x \in A : \forall (x, y)$$

**NEŘÍKAJÍ NUTNĚ TOTÉŽ !!**

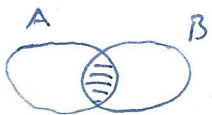
# Množiny

Značení :  $x \in A$  ....  $x$  náleží  $A$ ,  $x$  je prvkem  $A$ ,  
 $x$  patří do množiny  $A$



$A \subseteq B$  ....  $A$  je podmnožinou  $B$  (Pozor! prof. Bouchala používá značení  $A \subset B$ )  
Každý prvek  $x \in A$  je prvkem  $B$ .

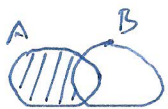
$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$  ... rovnost množin nastane, když je jedna podmnožinou druhé a naopak.



$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$  ... průnik množin  $A$  a  $B$ .



$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$  ... sjednocení množin  $A$  a  $B$



$A \setminus B = A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$  ... rozdíl množin

Př. :  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow A \not\subseteq B$ ;  $B \not\subseteq A$ ;  $A \neq B$ ;  $A \cap B = \{3, 4\}$ ;  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;

$A - B = \{1, 2\}$ ;  $B - A = \{5, 6\}$