

Př. Určete definiční obor funkce dané předpisem:

1.) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

Pod zlomkovou čarou nesmí být 0 $\Rightarrow$

$$x^2 - 9 \neq 0$$

je jasné, že $x^2 - 9 = 0$ pro $x = 3$, nebo $x = -3 \Rightarrow$

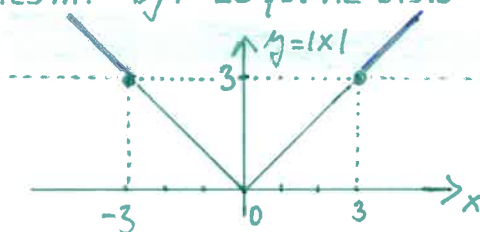
$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}}}$$

2.) $f(x) = \sqrt{|x| - 3}$

Pod druhou (sudou) odmocninou nesmí být záporné číslo $\Rightarrow$

$$|x| - 3 \geq 0$$

$$|x| \geq 3$$



$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)}}$$

3.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 3}}$

Pod druhou odmocninou nesmí být záporné číslo $\Rightarrow |x| - 3 \geq 0$

Pod zlomkovou čarou nesmí být nula $\Rightarrow |x| - 3 \neq 0$ $\Rightarrow$

$$|x| - 3 > 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)}}$$

Pr. 11 Určete definiční obor funkce dané předpisem:

1.) $f(x) = \sqrt{|x-3| - |2x-10|}$

Pod druhou (sudou) odmocninou nesmí být záporné číslo $\Rightarrow$

$$|x-3| - |2x-10| \geq 0$$

nulové body: $x=3$ a $x=5$

$x \in (-\infty, 3)$	$x \in (3, 5)$	$x \in (5, \infty)$
$ x-3 = -(x-3)$ $ 2x-10 = -(2x-10)$	$ x-3 = (x-3)$ $ 2x-10 = -(2x-10)$	$ x-3 = (x-3)$ $ 2x-10 = (2x-10)$
$-(x-3) + (2x-10) \geq 0$ $x - 7 \geq 0$ $x \geq 7$	$(x-3) + (2x-10) \geq 0$ $3x - 13 \geq 0$ $x \geq \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$	$(x-3) - (2x-10) \geq 0$ $-x + 7 \geq 0$ $7 \geq x$
$\Rightarrow x \in \emptyset$	$\Rightarrow x \in \langle \frac{13}{3}, 5 \rangle$	$x \in (5, 7]$
$x \in \langle \frac{13}{3}, 7 \rangle$		

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \langle \frac{13}{3}, 7 \rangle}}$$

2.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{|x-1| - |x+1|}}$

Pod pátou (lichou) odmocninou může být liché číslo, ale pod zlomkovou čarou nesmí být 0

$$|x-1| - |x+1| \neq 0$$

$\Rightarrow$ zjistíme, kdy vyjde nula, tj. $|x-1| - |x+1| = 0$:

$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, \infty)$
$ x+1 = -(x+1)$ $ x-1 = -(x-1)$	$ x+1 = (x+1)$ $ x-1 = -(x-1)$	$ x+1 = (x+1)$ $ x-1 = (x-1)$
$-(x+1) + (x-1) = 0$ $-2 = 0$	$(x+1) + (x-1) = 0$ $2x = 0$	$(x+1) - (x-1) = 0$ $2 = 0$
$x \in \emptyset$	$x = 0$	$x \in \emptyset$
$x = 0$		

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{0\}}}$$

Pr. mi Určete definiční obor funkce dané předpisem:

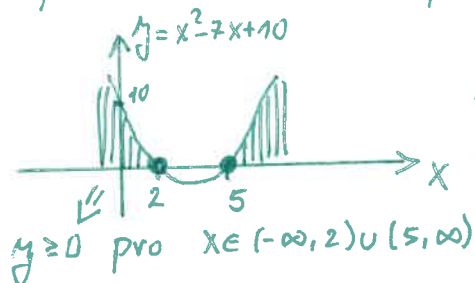
1.) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

Pod odmocninou nesmí být záporné číslo $\Rightarrow$ musí platit:

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

" Δ "

$\Rightarrow$



$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = (-\infty, 2) \cup (5, \infty)}}$$

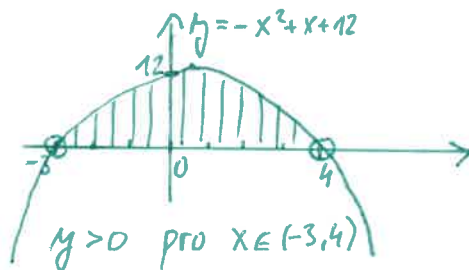
2.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 12}}$

Pod odmocninou nesmí být záporné číslo $\Rightarrow -x^2 + x + 12 \geq 0$
Pod zlomkovou čarou nesmí být nula $\Rightarrow -x^2 + x + 12 \neq 0$ } $\Rightarrow$

$$-x^2 + x + 12 > 0$$

" Δ "

$\Rightarrow$



$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{-2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = (-3, 4)}}$$

3.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{6x^2 - 5x + 1}}$

Pod 3. (lichou) odmocninou může být i záporné číslo, ale pod zlomkovou čarou nesmí být nula $\Rightarrow$

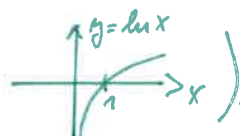
$$6x^2 - 5x + 1 \neq 0$$

vypočítáme: $6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}}}$$

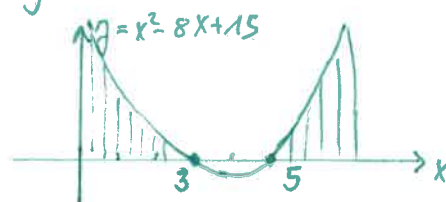
Př. m. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

1.) $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 15)$

Do logaritmu můžeme „dosazovat“ jen čísla větší než 0 () =>

$$x^2 - 8x + 15 > 0$$

$$(x-3)(x-5) > 0$$



$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)}}$$

2.) $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$

Do logaritmu „dosazujeme“ jen kladná čísla. $\wedge$ Pod zlomkovou čarou nesmí být 0.

$$\downarrow$$
$$\underline{\underline{|x-1 > 0|}}$$

$$x > 1$$

$$\underline{\underline{x \in (1, \infty)}}$$

$$\downarrow$$
$$\underline{\underline{|\ln(x-1) \neq 0|}}$$

Zjistíme, kdy:

$$\ln(x-1) = 0$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

$$\downarrow$$
$$\underline{\underline{x \neq 2}}$$

Podmínky musí být splněny obě současně =>

$$\underline{\underline{D_f = (1, 2) \cup (2, \infty)}}$$

Př. Určete definiční obor funkce dané předpisem:

$$1.) f(x) = \frac{3x+1}{\log_2(x^2-5x)}$$

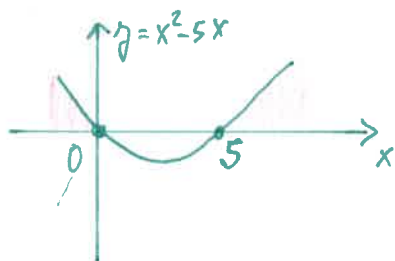
Do logaritmu nesmíme dosazovat čísla ≤ 0 . $\wedge$ Pod zlomkovou čarou nesmí být 0.

$$x^2 - 5x > 0$$

$\wedge$

$$\log_2(x^2 - 5x) \neq 0$$

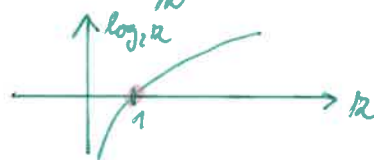
$$x(x-5) > 0$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$$

Zjistíme, kdy:

$$\log_2(x^2 - 5x) = 0$$



$$\log_2 k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$x^2 - 5x = 1$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{29}}{2} > 5 \\ \frac{5-\sqrt{29}}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$$

Podmínky musí být splněny obě $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, \frac{5-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{5-\sqrt{29}}{2}, 0) \cup (5, \frac{5+\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{29}}{2}, \infty)}}}$$

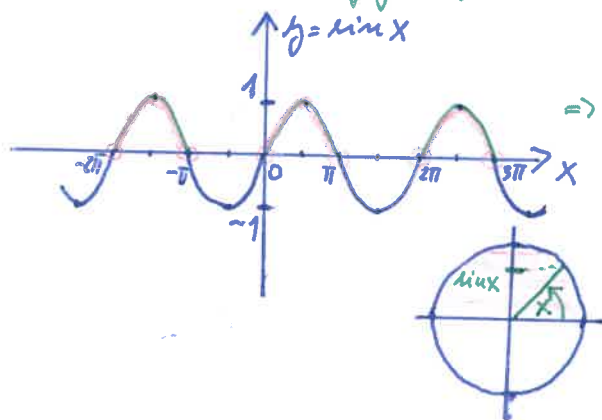
Pr. 1.1. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

1.) $f(x) = \ln(\underbrace{\sin x}_y)$

$\sin x$ je definován pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, ale $\ln$ jen pro kladná y .

$$\sin x > 0$$

$$\underline{D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)}$$



$\Rightarrow x \in (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \dots$
ale také $(-2\pi, -\pi) \cup (-4\pi, -3\pi) \dots$

2.) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1 - \cos x}$

Logaritmus je definován jen pro kladná čísla. $\wedge$ Vějmenovateli nesmí být 0.

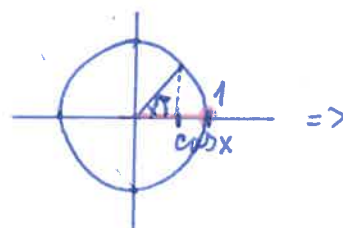
$$x+1 > 0$$

$$x > -1$$

$$x \in (-1, \infty)$$

$$1 - \cos x \neq 0$$

$$\cos x \neq 1$$



$$\Rightarrow x \neq k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\Rightarrow \underline{D_f = (-1, \infty) - \{k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}}$$

Př. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

1.) $f(x) = \arccos(2x+7)$

Do funkce $\arccos y$ dosazujeme čísla $y \in \langle -1, 1 \rangle$. $\Rightarrow$

$$2x+7 \leq 1$$

$\wedge$

$$2x+7 \geq -1$$

$$2x \leq -6 \quad |:2$$

$$2x \geq -8 \quad |:2$$

$$x \leq -3$$

$$x \geq -4$$

$$\Downarrow$$
$$\underline{\underline{D_f = \langle -4, -3 \rangle}}$$

2.) $f(x) = \arcsin(x^2 - 2x - 4)$

Do funkce $\arcsin$ dosazujeme hodnoty z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. $\Rightarrow$

$$x^2 - 2x - 4 \leq 1$$

$\wedge$

$$x^2 - 2x - 4 \geq -1$$

$$x^2 - 2x - 5 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x-3)(x+1)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+20}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{6} \\ 1-\sqrt{6} \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$$



$$\Rightarrow x \in \langle 1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6} \rangle$$

$$1+\sqrt{6} > 3$$

$$1-\sqrt{6} < -1$$

$$\Downarrow$$
$$D_f = \langle -1-\sqrt{6}, -1 \rangle \cup \langle 3, 1+\sqrt{6} \rangle$$

Př. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

$$1.) f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Ve jmenovateli nesmí být 0. $\wedge$ arcsin je definován na int. $\langle -1, 1 \rangle$

$$\boxed{x-1 \neq 0} \quad \boxed{-1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1} \quad | \cdot (x-1)$$

$x \neq 1 \Rightarrow$ uvažujme $x \neq 1 \Rightarrow$

$$(x-1) > 0 \\ \text{tj. } x > 1$$

NEBO

$$(x-1) < 0 \\ \text{tj. } x < 1$$

$$(-(x-1) \leq x+1) \wedge (x+1 < x-1)$$

$$(-x+1 < x+1) \wedge (1 < -1)$$

nebude
splněno nikdy!

$$\Downarrow \\ x \in \emptyset$$

$$(-(x-1) \geq x+1) \wedge (x+1 \geq x-1)$$

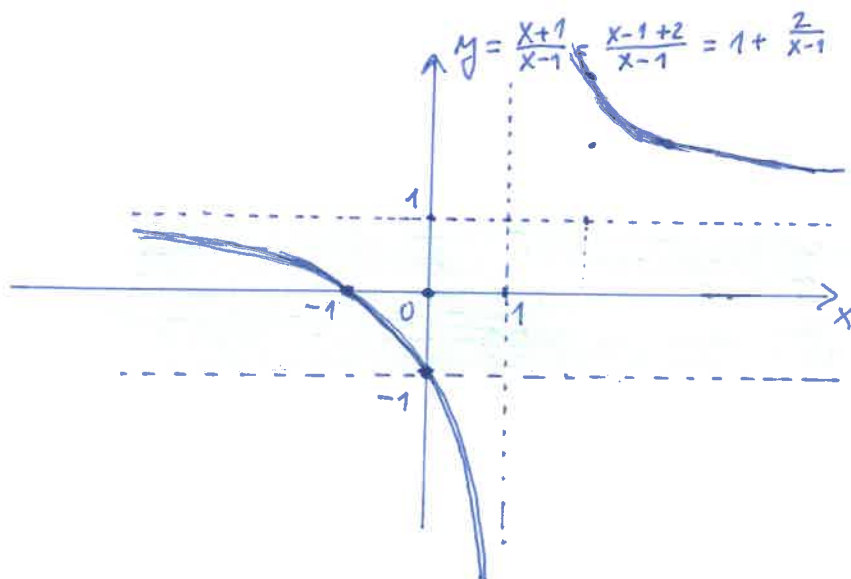
$$(-x+1 \geq x+1) \wedge (1 \geq -1)$$

$$\Downarrow \\ -2x \geq 0 \quad | \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$x \leq 0$$

$$x \in (-\infty, 0]$$

$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, 0]}}$$



Definiční obor

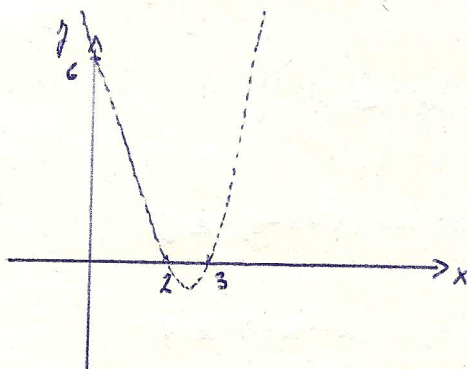
Pr. 1:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$(x-3)(x-2) \geq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) = D_f}$$



Pr. 2:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 8x + 16}}{x^2 - 3x - 4}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+4)^2}}{(x-4)(x+1)}$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Leftrightarrow ((x+4)^2 \geq 0) \wedge (x \neq 4) \wedge (x \neq -1)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1, 4\}}$$

Pr. 3:

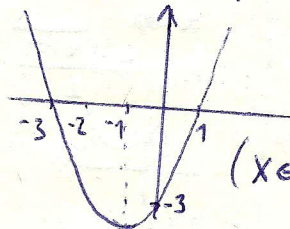
$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x \cdot x^2 + 2e^x x + (-3)e^x}}{\sqrt{1 - e^{2x+1}}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (e^x \cdot x^2 + 2e^x x - 3e^x \geq 0) \wedge (1 - e^{2x+1} > 0)$$

$$e^x(x^2 + 2x - 3) \geq 0 \quad / : e^x$$

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0 \quad (\text{můžeme, neboť } e^x \neq 0)$$

$$(x+3)(x-1) \geq 0$$



$$(x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)) \wedge$$

$$1 > e^{2x+1}$$

$$\ln 1 > \ln e^{2x+1}$$

$$0 > (2x+1) \ln e$$

$$0 > 2x+1$$

$$-1 > 2x$$

$$-\frac{1}{2} > x$$

$$(x \in (-\infty, -\frac{1}{2}))$$

$$D_f = \underline{\underline{(-\infty, -3)}}$$

Prüfung: $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + x - 1)}$

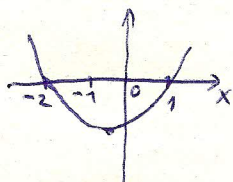
$\Rightarrow x \in D_f \Leftrightarrow$

a) $\ln(x^2 + x - 1) \geq 0$

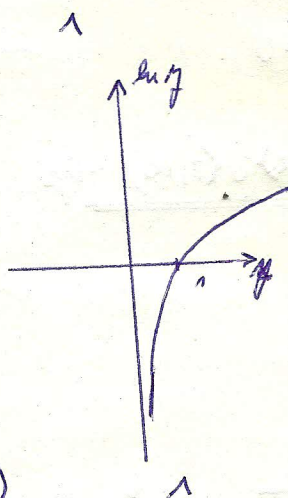
$x^2 + x - 1 \geq 1$

$x^2 + x - 2 \geq 0$

$(x+2)(x-1) \geq 0$



$x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

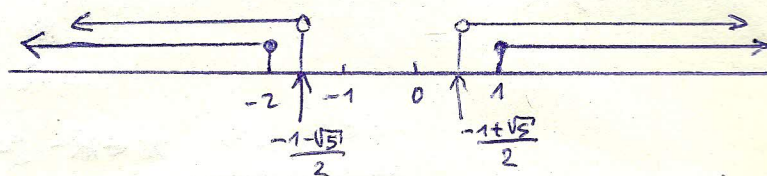


b) $x^2 + x - 1 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\approx \begin{cases} -1,618 \\ 0,618 \end{cases}$

$x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$



$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

Prüfung: $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 2|x| + 3)}$

$\Rightarrow x \in D_f \Leftrightarrow$

a) $\ln(x^2 - 2|x| + 3) \geq 0$

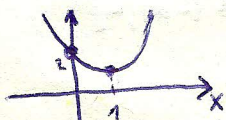
$x^2 - 2|x| + 3 \geq 1$

$x^2 - 2|x| + 2 \geq 0$

α) $|x| \geq 0$

$x^2 - 2|x| + 2 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow$ keine Lösung



$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

β) $|x| < 0$

$x^2 + 2|x| + 2 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow$ keine Lösung

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$

1

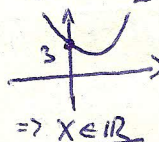
b) $x^2 - 2|x| + 3 > 0$

α) $x \geq 0$

$x^2 - 2x + 3 > 0$

~~$x \geq 0$~~

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$ keine Lösung



$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

β) $x < 0$

$x^2 + 2x + 3 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$ keine Lösung

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

Pr6: $f(x) = \ln |x^2 - x|$

-3-

$$\Rightarrow x \in D_f \Leftrightarrow |x^2 - x| > 0$$

vrime, da absolutni hodnata je $\geq 0 \Rightarrow$ množica rešenj

$$x^2 - x \neq 0$$

$$x(x-1) \neq 0$$

$$x \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \underline{\underline{\mathbb{R} - \{0, 1\}}}$$

Pr7: $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} \in \langle -1, 1 \rangle$$

$\Updownarrow$

$$-1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1 \quad | \cdot 3$$

$$-3 \leq x-1 \leq 3 \quad | +1$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

$$D_f = \underline{\underline{\langle -2, 4 \rangle}}$$

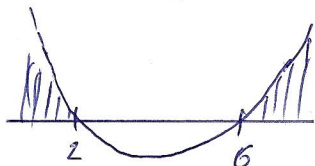
Pr: Nriete def abar funkcie

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}{e^x x - 4e^x}$$

$$I) x^2 - 8x + 12 \geq 0$$

$$(x-6)(x-2) \geq 0$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$



$$\underline{x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)}$$

$$II) e^x x - 4e^x \neq 0$$

$$e^x(x-4) \neq 0 \quad | : e^x \neq 0$$

$$x-4 \neq 0$$

$$\underline{x \neq 4} \quad \text{tj} \quad \underline{x \in \mathbb{R} - \{4\}}$$



$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty) = D_f}}$$

Pr: Nriete def abar funkcie $f(x) = \arccos(x^2 - 2x + 2)$.

$$-1 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 1$$

$$-1 \leq x^2 - 2x + 2$$

$$0 \leq x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - 2x + 3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \Rightarrow \text{koreny neexistuju!}$$

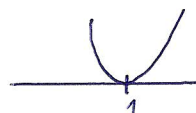


$$\Rightarrow \underline{x \in \mathbb{R}}$$

$$x^2 - 2x + 2 \leq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$(x-1)^2 \leq 0$$



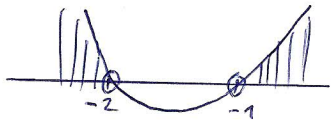
$$\Rightarrow \underline{x \in \{1\}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in \mathbb{R} \cap \{1\} = \{1\} = D_f}}$$

Pr: Určete def obor funkce $f(x) = \sqrt{-\ln(x^2+3x+2)}$

I.) $x^2+3x+2 > 0$

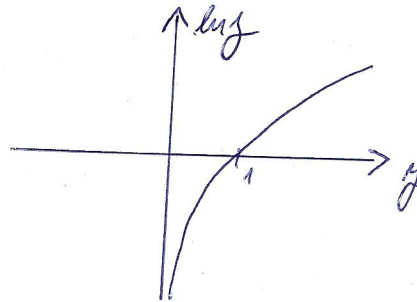
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$



$x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$

II.) $-\ln(x^2+3x+2) \geq 0$

$$\ln(x^2+3x+2) \leq 0$$



$$0 < x^2+3x+2 \leq 1$$

$$0 < x^2+3x+2$$

stejná nerovnice
jako v I.)

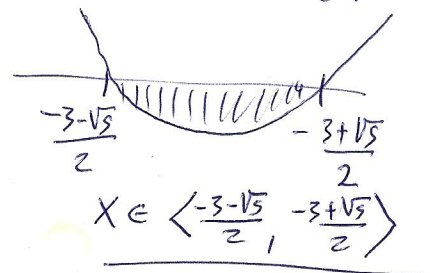
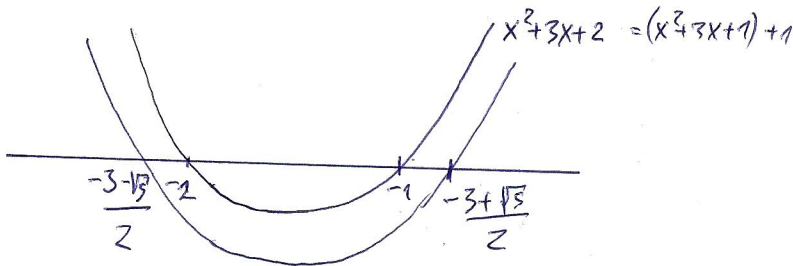
$x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$

$$x^2+3x+2 \leq 1$$

$$x^2+3x+1 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$x \in (-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$



$\Rightarrow x \in \left((-\infty, -2) \cup (-1, \infty) \right) \cap \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right) =$

$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -2 \right) \cup \left(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)$