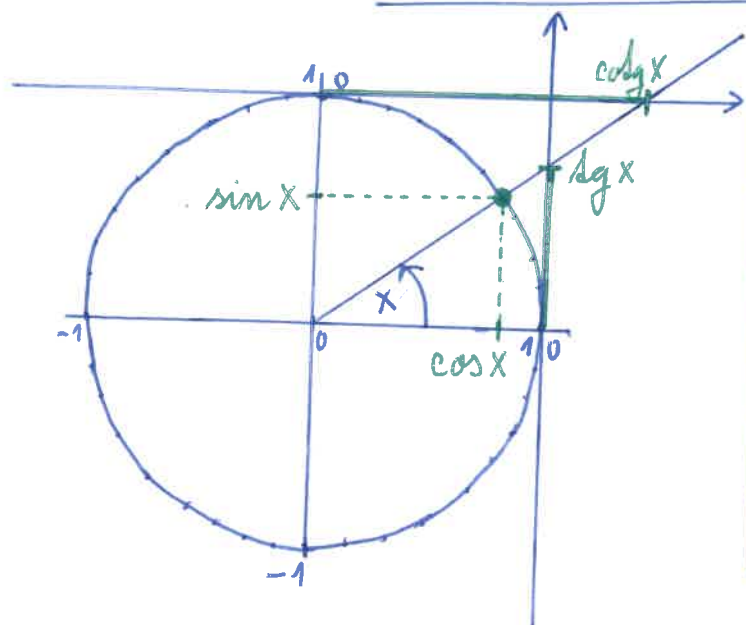


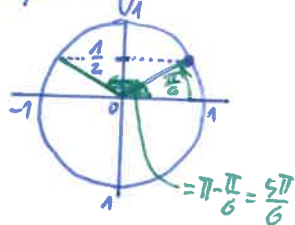
Goniometrické rovnice



α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
$\frac{\pi}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	0	/	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
0	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	1	0	/

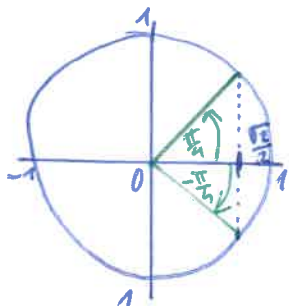
Př. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující:

1.) $\sin x = \frac{1}{2}$



$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi & ; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

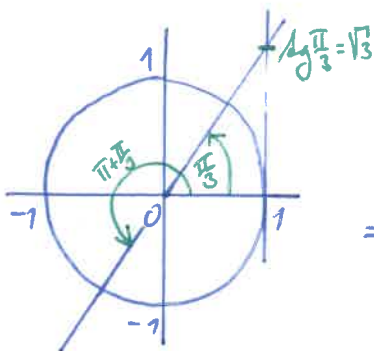
2.) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\Rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi & ; k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{8} + k \cdot \pi & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



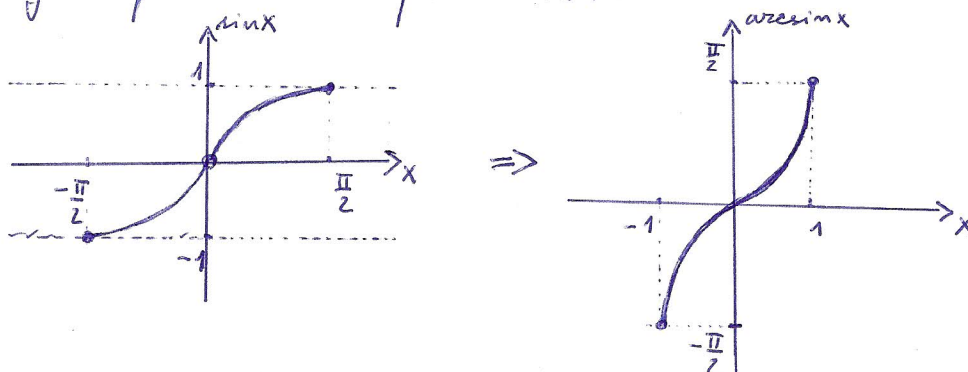
$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi & ; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4\pi}{3} + k \cdot \pi & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4.) $\sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = ?$

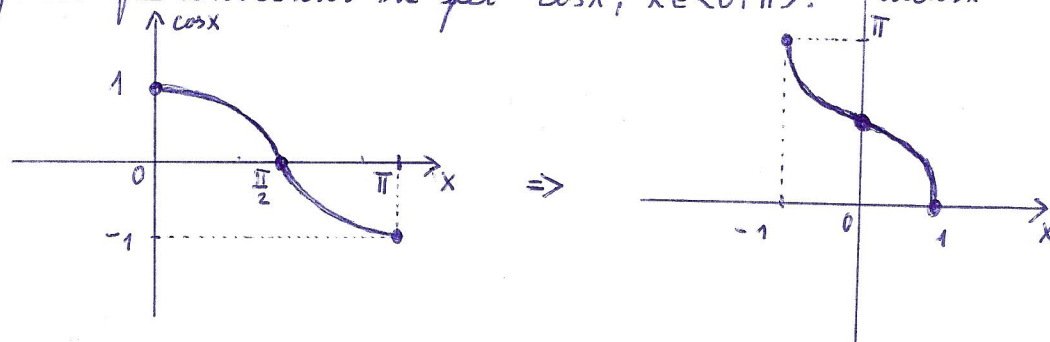
Cyklometrické funkce

Jsou to funkce inverzní ke goniometrickým funkcím.

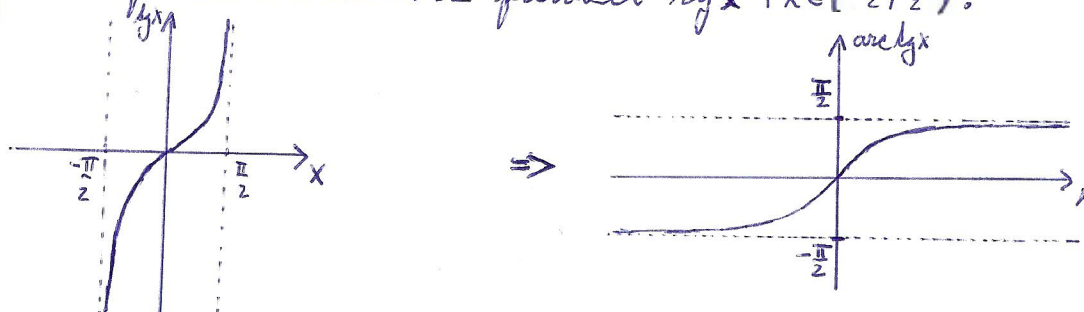
1.) arcsin x : Je to funkce inverzní k funkci $\sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.



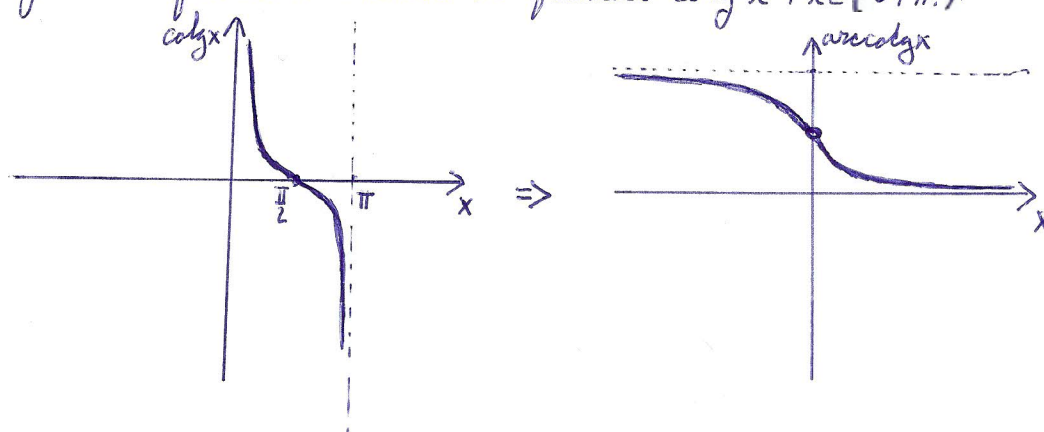
2.) arccos x : Je to funkce inverzní k funkci $\cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$.



3.) arctg x : Je to funkce inverzní k funkci $\operatorname{tg} x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.



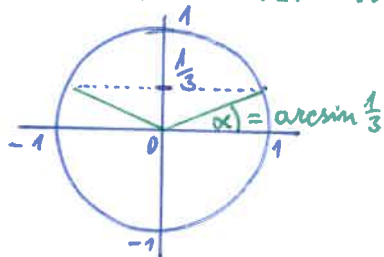
4.) arccotg x : Je to funkce inverzní k funkci $\operatorname{cotg} x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$.



Pr. 11 Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

1.) $\sin x = \frac{1}{3}$

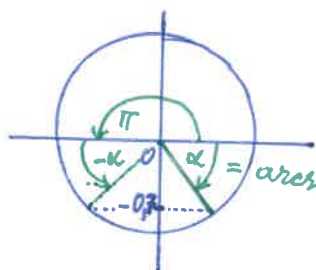
$\arcsin \frac{1}{3} = \alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle : \sin \alpha = \frac{1}{3}$



$\Rightarrow x = \underline{\underline{\begin{cases} \arcsin \frac{1}{3} + k \cdot 2\pi \\ \pi - \arcsin \frac{1}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}}}$

2.) $\sin x = -0.7$

$\arcsin(-0.7) = \alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle : \sin \alpha = -0.7$

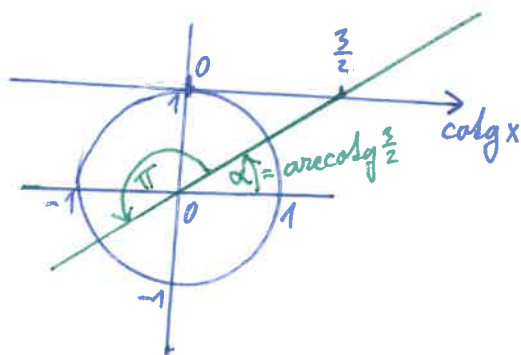


$\Rightarrow x = \underline{\underline{\begin{cases} \arcsin(-0.7) + k \cdot 2\pi \\ \pi - \arcsin(-0.7) + k \cdot 2\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}}}$

$\arcsin(-0.7)$ - vychází záporně!
 α je velikost
 úhlu α

3.) $\operatorname{arccotg} x = \frac{3}{2}$

$\operatorname{arccotg} \frac{3}{2} = \alpha \in (0, \pi) : \operatorname{cotg} \alpha = \frac{3}{2}$



$\Rightarrow x = \underline{\underline{\operatorname{arccotg} \frac{3}{2} + k \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}}}$

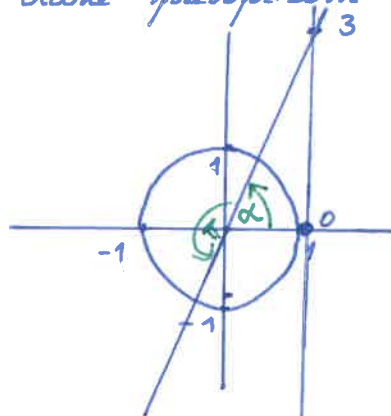
Př. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

$$1.) f(x) = \frac{1}{3 - \operatorname{tg}(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x \neq 3} \quad \boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}$$

$$\arctg 3 = \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \operatorname{tg} \alpha = 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{ \arctg 3 + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \}}}$$



$$2.) f(x) = \ln(0.1 + \sin x)$$

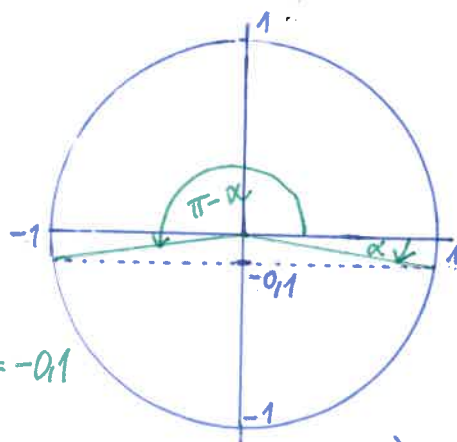
$$\Rightarrow \boxed{0.1 + \sin x > 0}$$

$$\sin x > -0.1$$

$$\arcsin(-0.1) = \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \sin \alpha = -0.1$$

$$\Rightarrow x \in (\arcsin(-0.1) + k2\pi, \pi - \arcsin(-0.1) + k2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\arcsin(-0.1) + k2\pi, \pi - \arcsin(-0.1) + k2\pi)}}$$



α je záporné!

Pr. Určete definiční obor funkce dané předpisem.

$$1.) f(x) = \frac{e^x}{\frac{\pi}{6} - \arcsin x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin x \neq \frac{\pi}{6}} \quad \wedge \quad \boxed{x \in \langle -1, 1 \rangle}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$\uparrow$
 $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{D_f = \langle -1, \frac{1}{2} \rangle \cup (\frac{1}{2}, 1 \rangle}}$$

$$2.) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{\frac{2\pi}{3} - \arccos \frac{x+1}{2}}$$

$$\boxed{x^2 - 3x - 10 \geq 0}$$

$$(x-5)(x+2) \geq 0$$



$$\underline{x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)}$$

$$\wedge \boxed{-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1}$$

$$-2 \leq x+1 \leq 2$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$\underline{x \in \langle -3, 1 \rangle}$$

$$\wedge \boxed{\arccos \frac{x+1}{2} \neq \frac{2\pi}{3}}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$$

$\uparrow$
 $\langle 0, \pi \rangle$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x+1}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

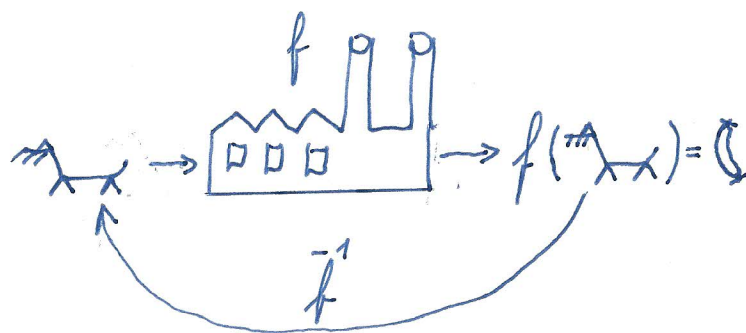
$$\underline{x \neq -2}$$



$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{D_f = \langle -3, -2 \rangle}}$$

Inverzní funkce



$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{Q})$$

obecně: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

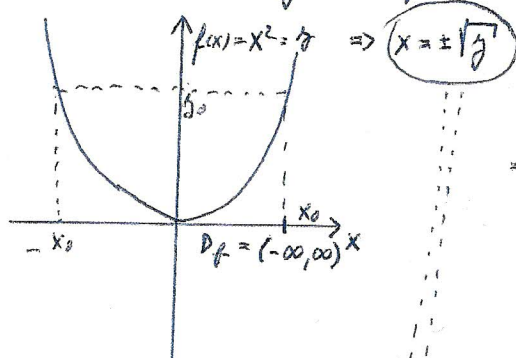
Def (Inverzní funkce): Necht' f je funkce. Funkci f^{-1} pro niž platí:

$$1) D_{f^{-1}} = H_f$$

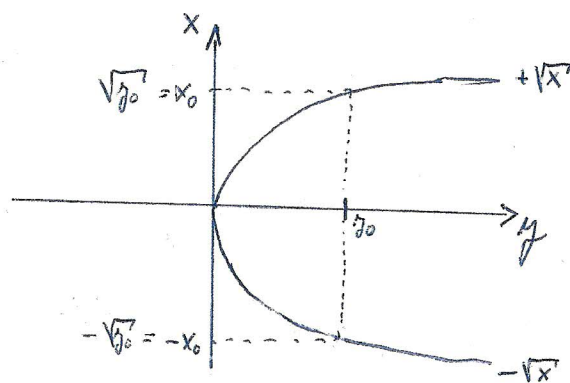
$$2) \forall x \in D_{f^{-1}} : f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

nazýváme funkci inverzní k funkci f .

Př.



$\Rightarrow$



inverzní funkce by musela být dána předpisem

$$f^{-1}(y) = \pm \sqrt{y}$$

← ale to není funkce!!!
podlezení: ze y musí vyjít jediná
funkční hodnota, ne více!!!

$\Rightarrow$ funkce $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, \infty)$ nemá funkci inverzní

Def (Prostá funkce): Funkce f se nazývá prostá funkce právě když

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(což je totéž jako $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

Věta (Existence proinverzní funkce): Necht' f je funkce. Pak f^{-1} existuje právě tehdy, když f je prostá funkce.

Ověřte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní. Pokud ano, určete f^{-1} .

a) $f(x) = 2x + 4$, $D_f = \mathbb{R}$

α) Je f prostá fce?

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2x_1 + 4 = 2x_2 + 4 \quad | -4$$

$$2x_1 = 2x_2 \quad | :2$$

$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow f \text{ je prostá} \Rightarrow \underline{\underline{f^{-1}}}$$

β) Určíme předpis f^{-1}

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$2y + 4 = x \quad | -4$$

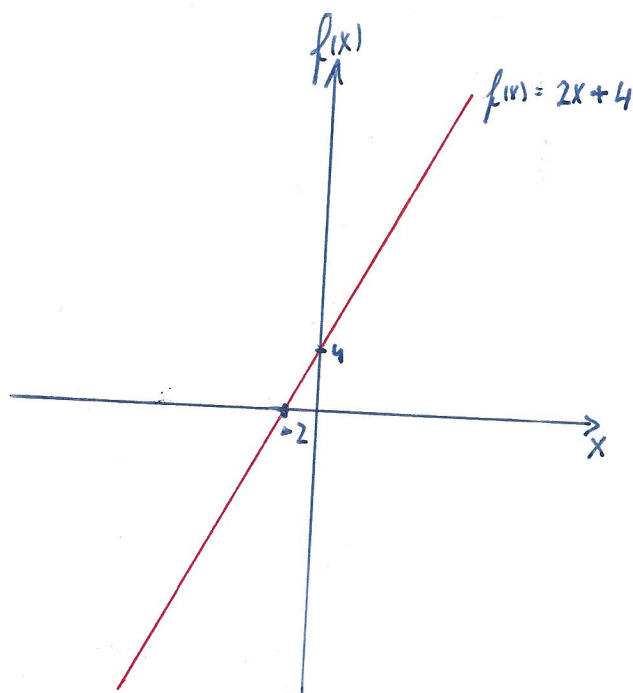
$$2y = x - 4 \quad | :2$$

$$y = \frac{x-4}{2}$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}}}$$

γ) Určíme definiční obor f^{-1}

$$D_{f^{-1}} = H_f = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$



Př. Pokud existuje, nalezněte funkci inverzní k funkci f

a) $f(x) = -3x + 1$, $D_f = \langle 2, 3 \rangle$

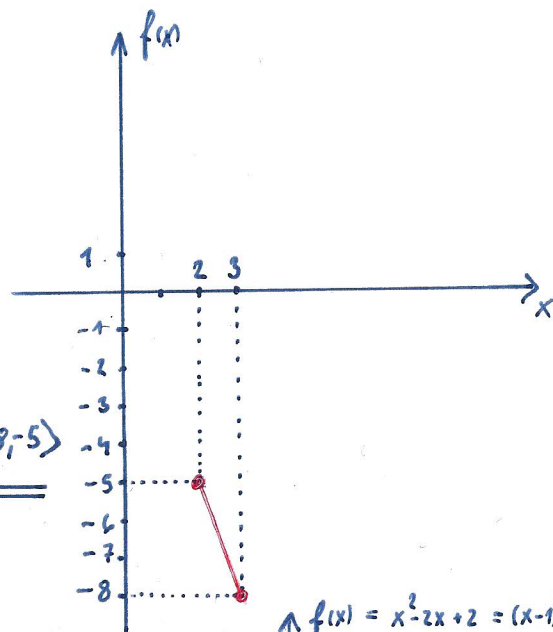
$$f(y) = x \Leftrightarrow \tilde{f}(x) = y = ?$$

$$\downarrow$$

$$-3y + 1 = x$$

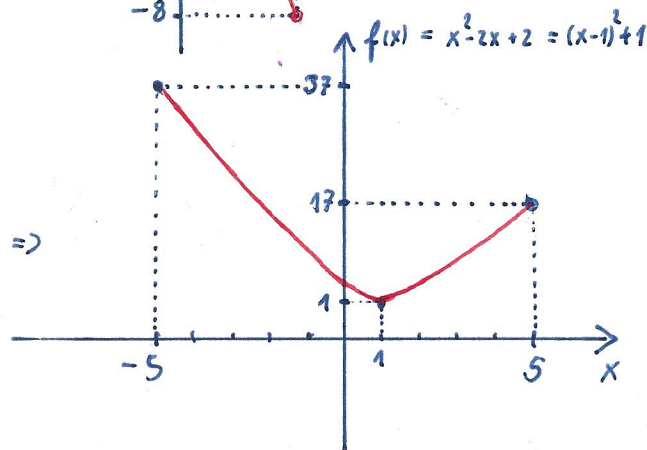
$$-3y = x - 1$$

$$y = \frac{1-x}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{f}(x) = \frac{1-x}{3}}}, D_{\tilde{f}} = \langle -8, -5 \rangle$$



b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $D_f = \langle -5, 5 \rangle$

není to prostá funkce, např. $f(0) = f(2) = 2 \Rightarrow$
 $\underline{\underline{\tilde{f} \text{ neexistuje!}}}$



c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $D_f = \langle -5, 1 \rangle$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \tilde{f}(x) = y = ?$$

$$y^2 - 2y + 2 = x$$

$$(y-1)^2 + 1 = x$$

$$(y-1)^2 = x-1$$

$$y-1 = \pm \sqrt{x-1}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x-1}$$

$$\langle -5, 1 \rangle \Rightarrow y = 1 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{f}(x) = 1 - \sqrt{x-1}}}, D_{\tilde{f}} = H_f = \langle 1, 37 \rangle$$

Př: Rozhodněte, zda k funkci f existuje funkce inverzní. Pokud ano, určete ji.

1.) $f(x) = x^2 - 3$, $D(f) = (-\infty, 0)$

a) Ověříme, zda je f prostá.

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$x_1^2 - 3 = x_2^2 - 3 \quad | +3 \Rightarrow$

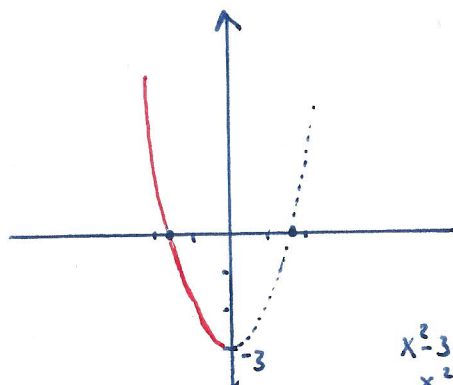
$x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow$

$x_1 = \begin{cases} +x_2 \\ -x_2 \end{cases} \Rightarrow$

(jen. pro $x_1 = x_2 = 0$)
nemůže nastat, neboť $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$
(pouze v případě $x = 0$, ale to je rovno -0)

$x_1 = x_2$ $\Rightarrow$

f je prostá fce $\Rightarrow$ f^{-1} existuje



$x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = 3$
 $x = \pm \sqrt{3}$

B) Určíme $D(f^{-1})$:

$D(f^{-1}) = H(f) = \underline{\underline{(-3, \infty)}}$

g) Určíme předpis f^{-1}

$f(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y = ?$

$y^2 - 3 = x$

$y^2 = x + 3$

$y = \begin{cases} +\sqrt{x+3} \\ -\sqrt{x+3} \end{cases} \Rightarrow$ nemůže nastat! $y \in D(f) = (-\infty, 0)$ (pouze pro $x = -3$)

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$

Ověřte, zda k dané funkci f existuje funkce inverzní. Pokud ano, určete f^{-1} .

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $D_f = (-3, 1) \cup (1, 5)$

α) Je f prostá funkce?

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \quad / \cdot (x_1-1)(x_2-1)$$

$$(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$$

$$x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1$$

$$-2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ je prostá fce} \Rightarrow \exists f^{-1}$$

β) Předpis f^{-1} :

1) Definici obor f^{-1}

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\frac{y+1}{y-1} = x \quad / \cdot (y-1)$$

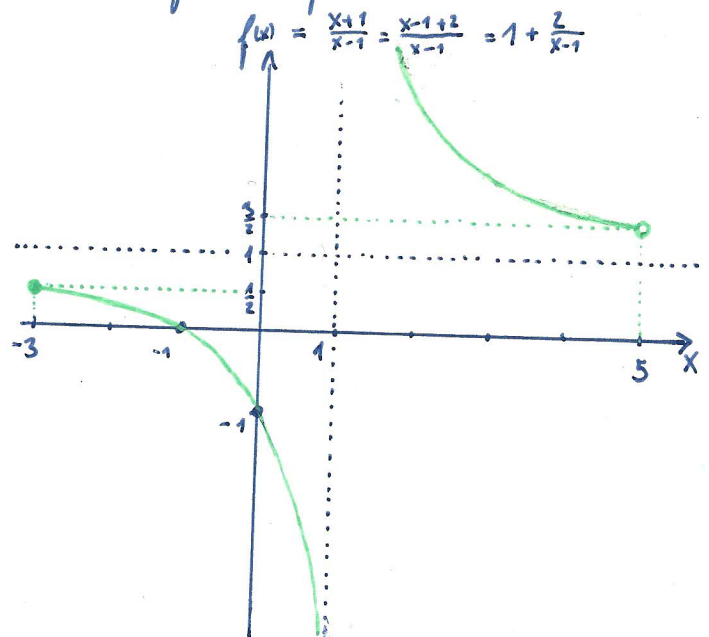
$$y+1 = x(y-1)$$

$$y+1 = xy - x$$

$$y(1-x) = -1-x$$

$$\underline{\underline{y = \frac{-1-x}{1-x}}}$$

$$D_{f^{-1}} = D_f$$



$$\underline{\underline{D_{f^{-1}} = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)}}$$

$$2.) f(x) = \ln(x+2)$$

$$D(f) = (-2, \infty)$$

$\alpha)$ ověřme, zda je f prostá fce:

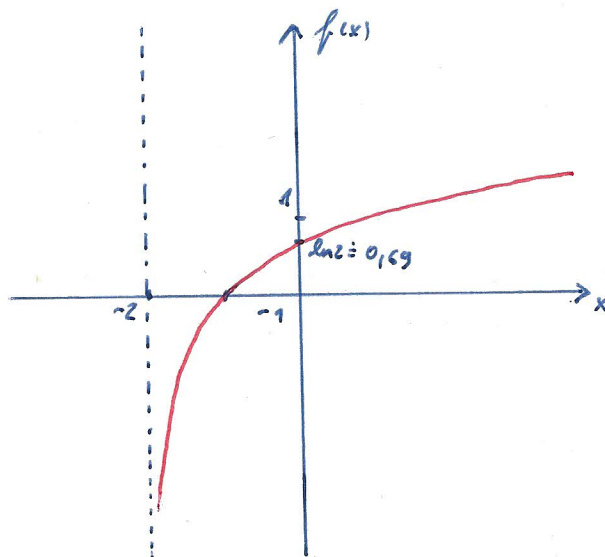
$$\forall x_1, x_2 \in (-2, \infty) : \underline{f(x_1) = f(x_2)}$$

$$\ln(x_1+2) = \ln(x_2+2) \quad / e^{\wedge}$$

$$e^{\ln(x_1+2)} = e^{\ln(x_2+2)}$$

$$x_1+2 = x_2+2$$

$$\underline{x_1 = x_2} \Rightarrow f \text{ je prostá fce} \Rightarrow \underline{\underline{f^{-1} \text{ existuje}}}$$



$\beta)$ Urcíme $D(f^{-1})$

$$\underline{\underline{D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}}}$$

$\gamma)$ Urcíme předpis f^{-1} :

$$\underbrace{f(y)} = x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{f^{-1}(x) = y = ?}$$

$$\ln(y+2) = x \quad / e^{\wedge}$$

$$\downarrow$$

$$e^{\ln(y+2)} = e^x$$

$$y+2 = e^x$$

$$y = e^x - 2 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = e^x - 2}}$$