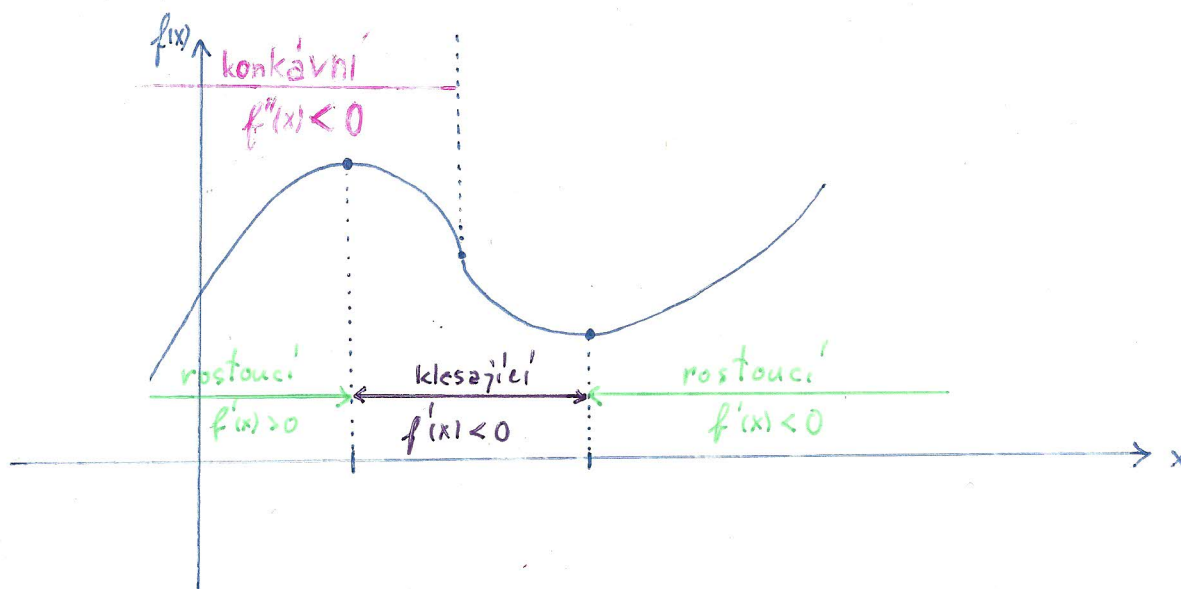


Intervaly monotonicity a konvexnosti a konkávnosti funkce



Věta: Necht' f je funkce spojitá v intervalu I s krajními body $a, b \in \mathbb{R}^*$ ($a < b$) a $\forall x \in (a, b)$ platí

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ rostoucí} \\ \geq 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ neklesající} \\ = 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ konstantní} \\ \leq 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ nerostoucí} \\ < 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ klesající} \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ ryze konvexní} \cup \\ \geq 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ konvexní} \cup \\ \leq 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ konkávní} \cap \\ < 0 & \Rightarrow f \text{ je na } I \text{ ryze konkávní} \cap \end{cases}$$

Inflexní bod: Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ inflexi, jestliže

1.) $f'(x_0)$ existuje a je konečná

a

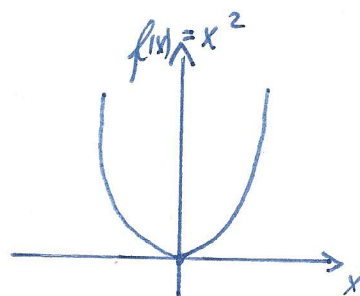
2.) $\exists \delta > 0$: I.) f je na $(x_0 - \delta, x_0)$ konvexní a na $(x_0, x_0 + \delta)$ konkávní,
nebo
II.) f je na $(x_0 - \delta, x_0)$ konkávní a na $(x_0, x_0 + \delta)$ konvexní.

Věta: Má-li f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ inflexi, potom $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

① $f(x) = x^2$

a) rostoucí: $f'(x) > 0$
 $2x > 0$
 $x > 0$
 $x \in (0, \infty)$

b) klesající: $f'(x) < 0$
 $2x < 0$
 $x < 0$
 $x \in (-\infty, 0)$



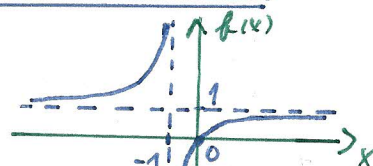
$\Rightarrow$ Funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí na intervalu $(0, \infty)$ a klesající na $(-\infty, 0)$.

c) konvexní: $f''(x) > 0$
 $(2x)' > 0$
 $2 > 0$
 platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

d) konkávní: $f''(x) < 0$
 $(2x)' < 0$
 $2 < 0$
 není splněno pro žádné x

$\Rightarrow$ Funkce $f(x) = x^2$ je konvexní na $\mathbb{R}$ (tj. intervalu $(-\infty, \infty)$).

② $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$



a) rostoucí: $f'(x) > 0$
 $\frac{1(x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} > 0$

b) klesající: $f'(x) < 0$
 $\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad | \cdot (x+1)^2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

$\frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad | \cdot (x+1)^2$
 $1 > 0 \Rightarrow x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$1 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

$\Rightarrow$ Funkce $f(x) = \frac{x}{x+1}$ je rostoucí na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$.

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' > 0$
 $\frac{0(x+1)^2 - 1 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} > 0$

$\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} > 0 \quad | \cdot (x+1)^4 > 0 \quad \forall x \in D(f)$

$-2(x+1) > 0 \quad | \cdot (-2)$

$x+1 < 0$

$x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$

d) konkávní: $f''(x) < 0$

$\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} < 0 \quad | \cdot (x+1)^4 > 0$

$-2(x+1) < 0 \quad | \cdot (-2)$

$x+1 > 0$

$x > -1$

$x \in (-1, \infty)$

$\Rightarrow$ Funkce $f(x) = \frac{x}{x+1}$ je konvexní na $(-\infty, -1)$ a konkávní na $(-1, \infty)$.

Pr: Určete intervaly ryzí monotonicity funkce f , intervaly kde je f konvexní a kde konkávní a její inflexní body (pokud existují).

1.) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

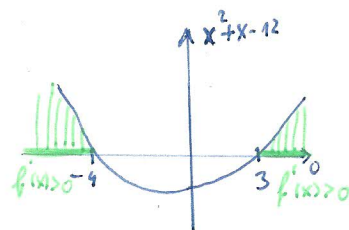
a) rostoucí: $f'(x) > 0$

$$6x^2 + 6x - 72 > 0 \quad |:6$$

$$x^2 + x - 12 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$$

$$(x+4)(x-3)$$

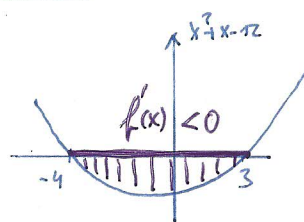
$\Rightarrow$ Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, -4)$ a $(3, \infty)$



protože je v bode -4 a 3 spojité "přihodíme" tyto krajní body

b) klesající: $f'(x) < 0$

$$x^2 + x - 12 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow x \in (-4, 3)$$



$\Rightarrow$ Funkce f je klesající na intervalu $(-4, 3)$.

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$$(6x^2 + 6x - 72)' > 0$$

$$12x + 6 > 0$$

$$x > -\frac{6}{12} \Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty) \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je konvexní na } (-\frac{1}{2}, \infty)$$

f je spojitá v $-\frac{1}{2}$

d) konkávní: $f''(x) < 0$

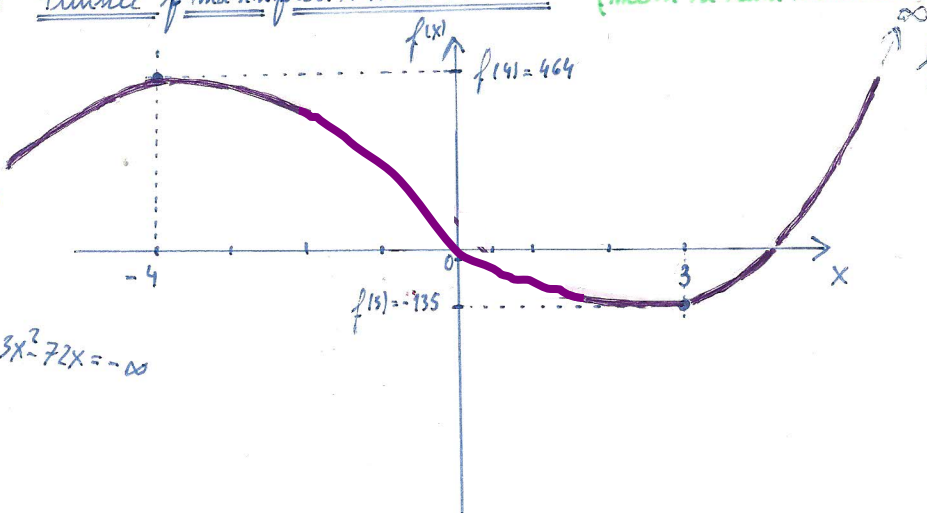
$$12x + 6 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je konkávní na } (-\infty, -\frac{1}{2})$$

e) inflexní bod: Funkce f má inflexi v bode $x_0 = -\frac{1}{2}$

(mění se tam konvexnost na konk. a $f'(-\frac{1}{2})$ existuje)

Náčrt grafu f a f' :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 3x^2 - 72x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 + 3x^2 - 72x = \infty$$

$$2) f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 240x + 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

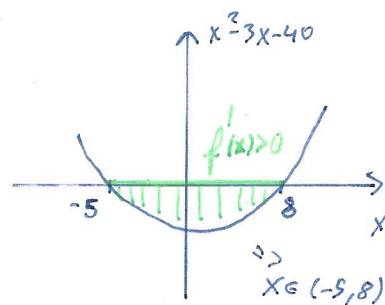
a) rostoucí: $f'(x) > 0$

$$-6x^2 + 18x + 240 > 0 \quad | : (-6)$$

$$x^2 - 3x - 40 < 0$$

$$(x-8)(x+5)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} = \begin{cases} -5 \\ 8 \end{cases}$$



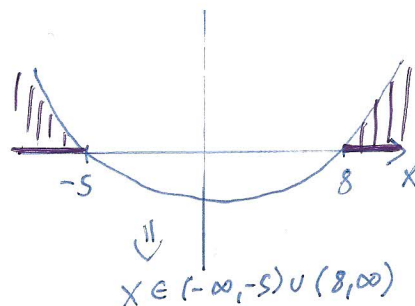
$\Rightarrow$ Funkce f je rostoucí na $\langle -5, 8 \rangle$.

b) klesající: $f'(x) < 0$

$$-6x^2 + 18x + 240 < 0 \quad | : (-6)$$

$$x^2 - 3x + 40 > 0$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ Funkce f je klesající na $(-\infty, -5) \cup (8, \infty)$.

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$$(-6x^2 + 18x + 240)' > 0$$

$$-12x + 18 > 0$$

$$x < \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je na intervalu } (-\infty, \frac{3}{2}) \text{ konvexní.}$$

d) konkávní: $f''(x) < 0$

$$x > \frac{3}{2} \Rightarrow x \in (\frac{3}{2}, \infty) \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je na intervalu } (\frac{3}{2}, \infty) \text{ konkávní.}$$

e) inflexní body: Funkce f má inflexi v bodě $x_0 = \frac{3}{2}$.

Náčrt grafu:

$$f(0) = 1$$

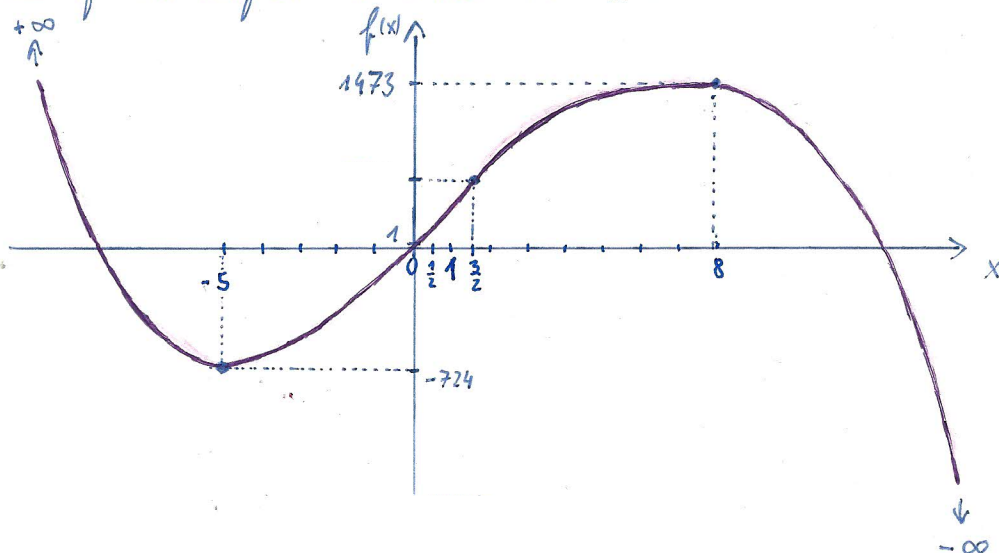
$$f(-5) = -724$$

$$f(\frac{3}{2}) =$$

$$f(8) = 1473$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 9x^2 + 240x + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2x^3 + 9x^2 + 240x + 1 = -\infty$$



3.) $f(x) = 2x + \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$

a) rostoucí: $f'(x) > 0$

$2 + \cos x > 0$

$\cos x > -2$ to nastane $\forall x \in \mathbb{R}$ protože $\cos x \in \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow$

Funkce f je rostoucí na $\mathbb{R}$.

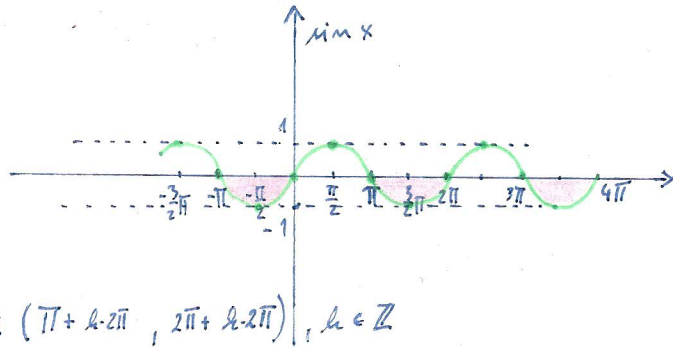
b) klesající: že a) je jasné, že f neklesá nikde.

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$(2 + \cos x)' > 0$

$-\sin x > 0$

$\sin x < 0 \Rightarrow x \in (\pi + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi), k \in \mathbb{Z}$



$\Rightarrow$ Funkce f je konvexní na intervalech $\langle \pi + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.

d) konkávní: že c) je jasné, že $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0 + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi), k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Funkce f je konkávní na intervalech $\langle k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.

e) inflexní body: Funkce f má inflexi v bodech $x_0 = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Náčrt grafu:

$f(0) = 0$

$f(\pi) = 2\pi + \sin \pi = 2\pi$

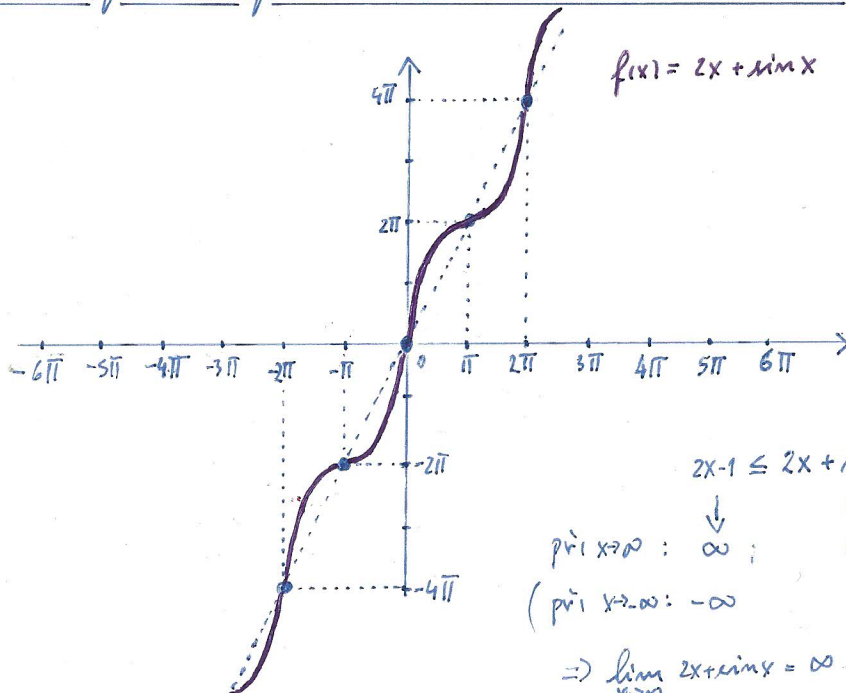
$f(-\pi) = -2\pi$

$f(2\pi) = 4\pi$

$f(-2\pi) = -4\pi$

$f(3\pi) = 6\pi$

$f(-3\pi) = -6\pi$



$f(x) = 2x + \sin x$

$2x-1 \leq 2x + \sin x \leq 2x+1$

$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{při } x \rightarrow \infty : & \infty & ; & \infty & & \infty \\ (\text{při } x \rightarrow -\infty : & -\infty & & & & -\infty) \end{matrix}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + \sin x = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sin x = -\infty$

$$4) f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

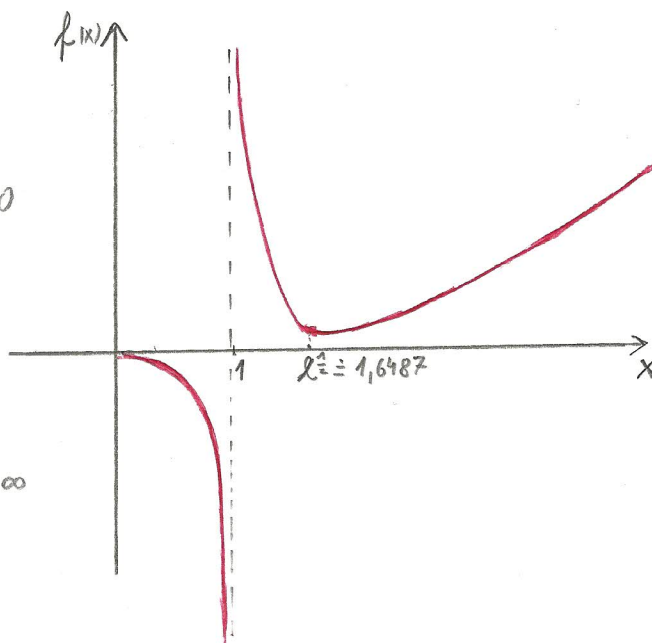
$$\Rightarrow D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x} \stackrel{1/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\ln x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x} \stackrel{1/0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$



α) rostoucí: $f'(x) > 0$, neboť f je lokálně rostoucí

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$D_{f'} = (0,1) \cup (1,\infty) = D_f \Rightarrow \text{dopadáme na všechnu}$$

$$\frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2} > 0 \quad / \cdot (\ln x)^2 > 0, \text{ neboť } x \in D_{f'}$$

$$x \cdot (2 \ln x - 1) > 0 \quad / : x > 0, \text{ neboť } x \in D_{f'}$$

$$2 \ln x - 1 > 0$$

$$\ln x > \frac{1}{2}$$

$$x > e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Rightarrow x \in (\sqrt{e}, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f \text{ je rostoucí na } (\sqrt{e}, \infty)}}$$

β) klesající: $f'(x) < 0$

$$\frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2} < 0$$

$$x < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1, \sqrt{e})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f \text{ je klesající na } (0,1) \text{ a } (1, \sqrt{e})}}$$

4) konvexní: $f''(x) > 0$

$$\left(\frac{x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2} \right)' > 0$$

$$\frac{(1(2\ln x - 1) + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}) \cdot (\ln x)^2 - x(2\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} > 0$$

$$\frac{(2\ln x + 1)(\ln x)^2 - (2\ln x - 1)2\ln x}{(\ln x)^4} > 0$$

$$\frac{2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 2\ln x}{(\ln x)^4} > 0 \quad / \text{substituce } t = \ln x$$

$$\frac{2t^3 - 3t^2 + 2t}{t^4} > 0$$

$$\frac{t(2t^2 - 3t + 2)}{t^4} > 0$$

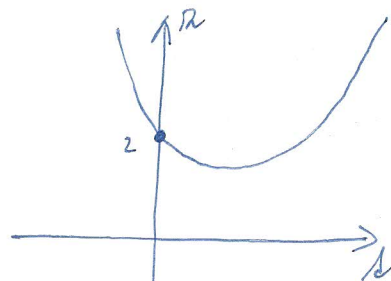
$t^4 > 0$

$$t^2 = 2t^2 - 3t + 2 \Rightarrow$$

$$2t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4}$$

$\Rightarrow$ nemá kořeny



neprůtne osu $t \Rightarrow$
 t je vždy kladné!

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow t > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty) \Rightarrow$$

Funkce f je konvexní na intervalu $(1, \infty)$

$1 \notin D_f \Rightarrow$ nemůžeme ji přidat

5) konkávní: $f''(x) < 0$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow t < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \Rightarrow$$

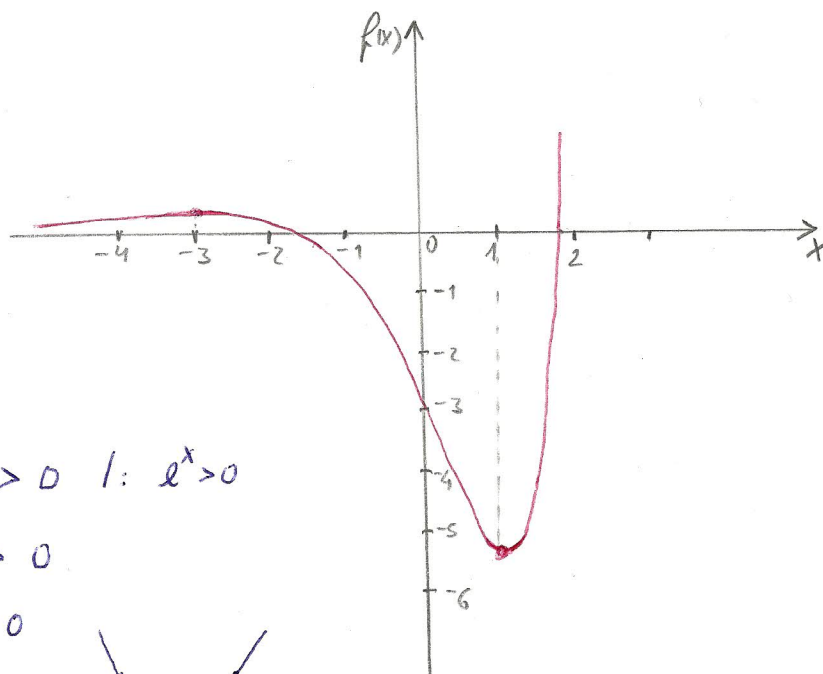
Funkce f je konkávní na intervalu $(0, 1)$

$0, 1 \notin D_f \Rightarrow$ nemůžeme ji přidat

6) inflexní body: Konkávnost se mění na konvexnost v bodě $x_0 = 1$, ale tam funkce není definována a tak tam nemá ani derivaci (což v inflex. bodu podle definice musí mít) $\Rightarrow$

Funkce f nemá inflexní body.

$$5.) f(x) = (x^2 - 3)e^x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$



a) rostoucí $f'(x) > 0$

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x > 0 \quad | : e^x > 0$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0$$

$\Downarrow$



$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

$\Rightarrow f$ je rostoucí na $(-\infty, -3)$ a na $(1, \infty)$

b) klesající: $f'(x) < 0$

$$(x^2 + 2x - 3)e^x < 0 \quad | : e^x > 0$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$(x+3)(x-1) < 0$$

$\Downarrow$

$$x \in (-3, 1)$$

$\Rightarrow f$ je klesající na $(-3, 1)$

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$$(x^2 + 2x - 3)e^x)' > 0$$

$$(2x+2)e^x + (x^2+2x-3)e^x > 0$$

$$(x^2+4x-1)e^x > 0$$

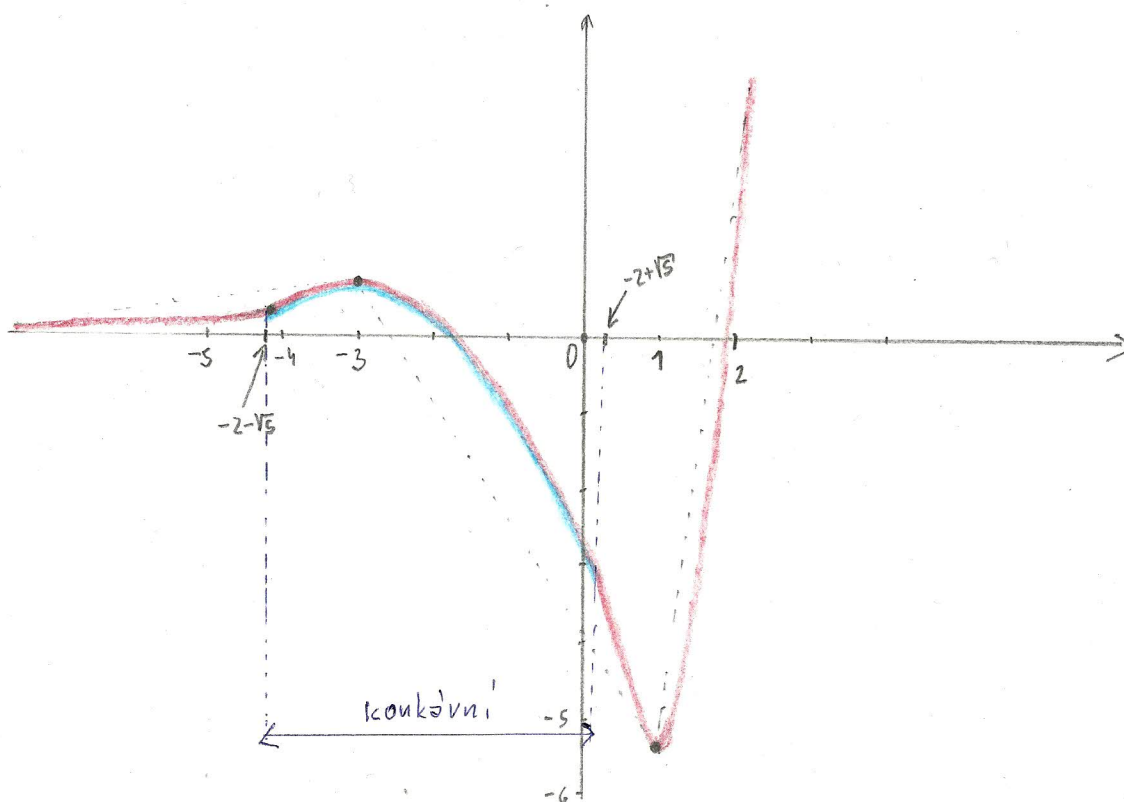


$$x^2 + 4x - 1 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$\Rightarrow f$ je konvexní na intervalu $(-\infty, -2-\sqrt{5})$ a na intervalu $(-2+\sqrt{5}, \infty)$

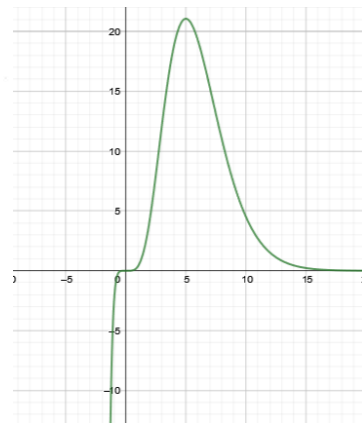
d) konkávní: $f''(x) < 0$

$\Rightarrow f$ je konkávní na intervalu $(-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5})$



$$6.) f(x) = \frac{x^5}{e^x}$$

$$\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$



a) rostoucí: $f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{5x^4 e^x - x^5 e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x (5x^4 - x^5)}{(e^x)^2} = \frac{5x^4 - x^5}{\underbrace{(e^x)}_{>0}} > 0$$

$$5x^4 - x^5 > 0$$

$$\underbrace{(x^4)}_{>0} (5-x) > 0$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, 5)$$

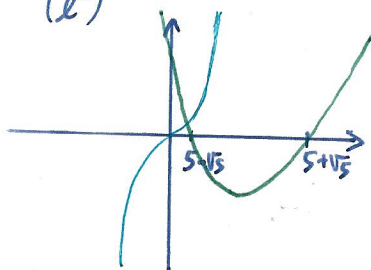
$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) \text{ je rostoucí na } (-\infty, 5)}}$

b) klesající: $f'(x) < 0$

z předchozího: $\underline{\underline{f(x) \text{ je klesající na } (5, \infty)}}$

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$$f''(x) = \frac{(20x^3 - 5x^4)e^x - (5x^4 - x^5)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^3 - 10x^4 + 20x^3}{e^x} = \frac{\underbrace{x^3}_{>0} (x^2 - 10x + 20)}{\underbrace{(e^x)}_{>0}} > 0$$



$$\Rightarrow x \in (0, 5 - \sqrt{5}) \cup (5 + \sqrt{5}, \infty)$$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) \text{ je konvexní na } (0, 5 - \sqrt{5}) \text{ a na } (5 + \sqrt{5}, \infty)}}$

d) konkávní: $f''(x) < 0$

z předchozího: $\underline{\underline{f(x) \text{ je konkávní na } (5 - \sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}) \text{ a na } (-\infty, 0)}}$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2} = 5 \pm \sqrt{5}$$

Pr. 11 Urcete intervaly, kde je funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní a inflexní body (pokud existují).

$$1.) f(x) = (x^2 - 2x - 7) e^x$$

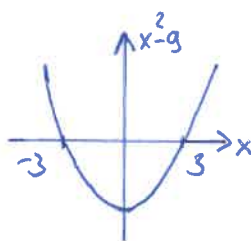
a) rostoucí: $f'(x) > 0$

$$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x-7)e^x > 0$$

$$(x^2-9)e^x > 0 \quad | : e^x > 0$$

$$x^2 - 9 > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$



b) klesající: $f'(x) < 0$

$$f'(x) = (x^2-9)e^x < 0$$

$$(x^2-9) < 0$$

$$x \in (-3, 3)$$

$\Rightarrow$ Funkce f je rostoucí na $(-\infty, -3)$ a na $(3, \infty)$ a klesající na $(-3, 3)$.

c) konvexní: $f''(x) > 0$

$$f''(x) = [(x^2-9)e^x]' = 2xe^x + (x^2-9)e^x > 0$$

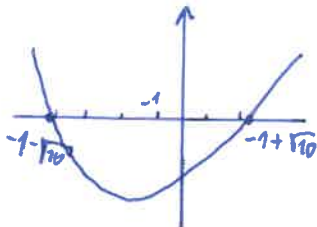
$$(x^2+2x-9)e^x > 0 \quad | : e^x > 0$$

$$x^2+2x-9 > 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 9}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 10}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \begin{cases} -1+\sqrt{10} \\ -1-\sqrt{10} \end{cases}$$



d) konkávní: $f''(x) < 0$

$$x^2+2x-9 < 0$$

$\Rightarrow$ Funkce f je konvexní na $(-\infty, -1-\sqrt{10})$ a na $(-1+\sqrt{10}, \infty)$ a na $(-1-\sqrt{10}, -1+\sqrt{10})$ je konkávní.

e) $f'(-1-\sqrt{10})$ a $f'(-1+\sqrt{10})$ existují $\Rightarrow$ f má inflexní body $x_1 = -1+\sqrt{10}$ a $x_2 = -1-\sqrt{10}$.