

Lokální extrémy funkce

Věta: Jestliže funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

$\Rightarrow$ Extrémů funkce hledáme tam, kde $f'(x) = 0$, nebo kde $f'(x)$ neexistuje.

Věta: Nechť $f'(x_0) = 0$. Jestliže

1.) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

2.) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

3.) $f''(x_0) = 0 = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \neq f^{(n)}(x_0)$, potom:

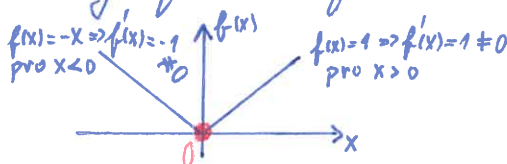
a) n je sudé $\Rightarrow$ I.) $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

II.) $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

b) n je liché $\Rightarrow f$ v bodě x_0 nemá extrém.

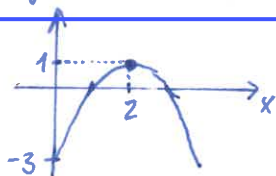
Pr. 1. Najděte lokální extrémy funkce f :

1.) $f(x) = |x|$



Pouze v $x=0$ $f'(x)$ neexistuje
a opravduje tam ostré lok. min.
protože $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: |x| > 0$

2.) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$



$$\Rightarrow f'(x) = -2x + 4$$

$\Delta D(f') = D(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ extrémů mohou být jen tam,
kde $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \dots \text{bod podezřelý z extrému.}$$

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x=2 \text{ ostré lokální maximum}}}$$

3.) $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$

$$= 3x + 3x^{-1} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = D(f') \dots$$

$$f'(x) = 3 - 3x^{-2} = 0 \Leftrightarrow x^{-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\} \dots \text{body podezřelé z extrému}$$

$$f''(x) = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x=1 \text{ ostré lokální minimum}}}$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x=-1 \text{ ostré lokální maximum}}}$$

Pr. Najděte lokální extrémů funkce dané předpisem:

$$1.) f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{8} \Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x} = 0$$

$$2x = \frac{1}{8x} \quad | \cdot x \quad (x \in (0, \infty) \Rightarrow x \neq 0)$$

$$2x^2 = \frac{1}{8} \quad | : 2$$

$$x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$x = \begin{cases} \cancel{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{4} \end{cases} \leftarrow \text{Neže, } x \in (0, \infty) !!!$$

$\frac{1}{4}$ = Bod podezřelý z extrému.

$$f''(x) = (2x - \frac{1}{8x})' = (2x - \frac{1}{8}x^{-1})' = 2 + \frac{1}{8}x^{-2} = 2 + \frac{1}{8x^2} \Rightarrow$$

$$f''(\frac{1}{4}) = 2 + \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{16}} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x = \frac{1}{4} \text{ ostré lokální minimum}}}$$

$$2.) f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2} + \ln(2x)$$

$$\Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D(f) = (0, \infty)$$

$$f'(x) = -\bar{x}^{-2} + \frac{1}{2x} \cdot 2 = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot x^2 \quad (x \in (0, \infty) \Rightarrow x^2 \neq 0)$$

$$-1 + x = 0$$

$$x = 1 \dots \text{Bod podezřelý z extrému}$$

$$f''(x) = (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})' = (-\bar{x}^{-2} + \bar{x}^{-1})' = 2\bar{x}^{-3} - \bar{x}^{-2} = 2\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(1) = 2\frac{1}{1^3} - \frac{1}{1^2} = 2 - 1 = 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x = 1 \text{ ostré lokální minimum}}}$$

Př. Najděte lokální extrémů funkce dané předpisem:

$$1.) f(x) = x^3(3x-2) = 3x^4 - 2x^3$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 = 0 \quad \dots \text{řešením nalezneme body podezřelé z extrému.}$$

$$x^2(12x-6) = 0 \Rightarrow$$

(Navíc $D(f') = \mathbb{R} \Rightarrow$ extrém může nastat jen ve stacionárních bodech, tj. tam, kde $f'(x) = 0$.)

$$x = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} \text{ musíme ověřit, zda je v těchto bodech extrém}$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 36 \cdot \frac{1}{4} - 12 \cdot \frac{1}{2} = 9 - 6 = 3 > 0 \Rightarrow$$

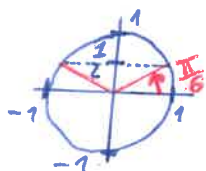
f má v $x = \frac{1}{2}$ ostré lokální minimum + ověříme, zda je extrém v $x=0$:

$$f''(0) = 36 \cdot 0 - 12 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{určíme: } f'''(x) = 72x - 12 \Rightarrow f'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{v } x=0 \text{ extr. není}$$

$$2.) f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow \text{f má v } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ OL MAX}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0 \Rightarrow \text{f má v } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ O.L. MIN}$$

Lokální extrémy

Př: Najděte všechny lokální extrémy funkce f definované předpisem:

1.) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 23 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$\Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ extrém
může
nastat
pouze ve
stac. bodech

stacionární body: $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$$6x^2 - 30x + 36 = 0 \quad | :6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

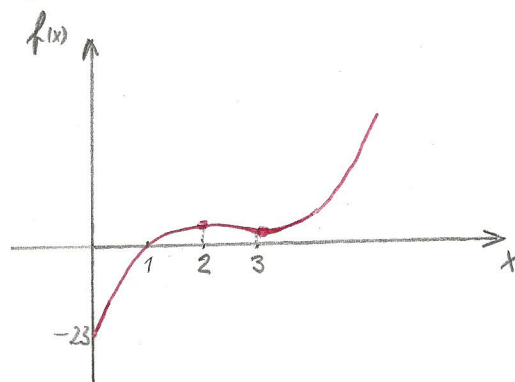
$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \text{ body podle zřetě z extrému}$$

Ověření, zda ve stac. bodech jsou extrémy:

$$f''(x) = 12x - 30 \Rightarrow f''(2) = 12 \cdot 2 - 30 = -6 \Rightarrow \text{v bodě } x=2 \text{ je lokální maximum}$$

$$f''(3) = 12 \cdot 3 - 30 = 6 \Rightarrow \text{v bodě } x=3 \text{ je lokální minimum}$$



2.) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$

a) $x \in (-\infty, 0)$ $\Rightarrow |x| = -x \Rightarrow$

$$f(x) = x^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1; D_f = (-\infty, 0)$$

$$f'(x) = 2x + 2 = 0; D_{f'} = (-\infty, 0)$$

$$2x = -2$$

$$x = -1 = \text{stacionární bod}$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{v bodě } x=-1 \text{ je lokální minimum}$$

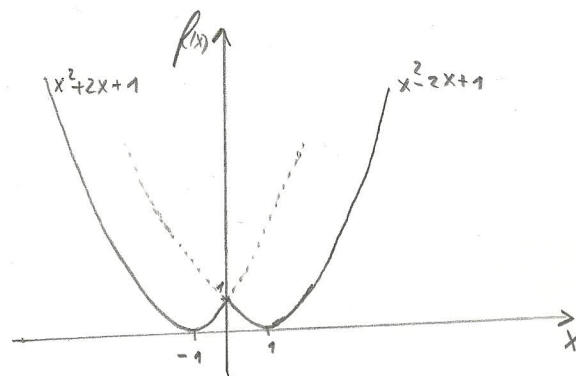
b) $x \in (0, \infty)$ $\Rightarrow |x| = x$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 2x - 2 = 0$$

$$x = 1 = \text{stacionární bod}$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{v bodě } x=1 \text{ je lokální minimum}$$



js) $x=0$ $\Rightarrow$ v bodě $x=0$

derivace neexistuje

(derivace zprava = -2 a zleva = 2)

$\Rightarrow$ mohl by tam být extrém.

Apropos, na intervalu $(-1, 0)$ je

$$f'(x) = 2x + 2 > 2(-1) + 2 = 0 \Rightarrow f \text{ je rostoucí na } (-1, 0) \text{ a}$$

na intervalu $(0, 1)$ je

$$f'(x) = 2x - 2 < 2 \cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow f \text{ je klesající na } (0, 1) \Rightarrow$$

v bodě $x=0$ je lokální maximum

$$3.) \quad f(x) = 6x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = 18x^2 - 6x + \frac{1}{2}$$

určíme body podezřelé z extrému: $f'(x) = 0$

$$18x^2 - 6x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 18 \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 18} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{36} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ Je jen jeden bod podezřelý z extrému: $x_1 = \frac{1}{6}$

určíme $f''(x)$ a dosadíme do ní bod $x_1 = \frac{1}{6}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f''(x) = 36x - 6 \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{1}{6}\right) = 36 \cdot \frac{1}{6} - 6 = 0 \Rightarrow$$

určíme $f'''(x)$ a dosadíme do ní bod $x_1 = \frac{1}{6}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'''(x) = 36 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{protože šlo o 3. = lichou derivaci}) \text{ v } x_1 = \frac{1}{6} \text{ není extrém} \Rightarrow$$

(protože jiné body podezřelé z extrému nejsou) $\Rightarrow$

Funkce f nemá lokální extrémy

$$4.) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Rightarrow D(f) = (0, \infty)$$

$$\forall x \in (0, \infty): f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln x}{x} = \frac{1 - \frac{1}{2} \ln x}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow \underline{x = e^2}$$

$$\forall x \in (0, \infty): f''(x) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} - (1 - \frac{1}{2} \ln x) \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}}{x^3}$$

$$f''(e^2) = \frac{-\frac{1}{2} (e^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - \frac{1}{2} \ln e^2) (e^2)^{\frac{1}{2}}}{e^6} = -\frac{1}{e^5} < 0 \Rightarrow$$

Funkce f má v $x_0 = e^2$ ostré lokální maximum ($f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$)

$$5.) f(x) = e^x (2x^2 - 5x + 2) \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^x (2x^2 - 5x + 2) + e^x (4x - 5) = e^x (2x^2 - x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (2x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = e^x (2x^2 - x - 3) + e^x (4x - 1) = e^x (2x^2 + 3x - 4)$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \left(2 \cdot \frac{9}{4} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 \right) = e^{\frac{3}{2}} \cdot 5 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x_1 = \frac{3}{2} \text{ ostré lok. minimum}}}$$

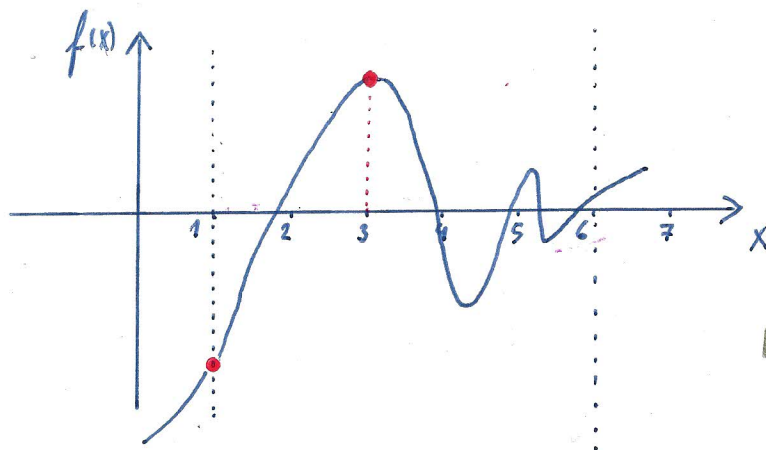
$$f''(-1) = e^{-1} (2(-1)^2 + 3(-1) - 4) = e^{-1} (-5) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ má v } x_2 = -1 \text{ ostré lok. maximum}}}$$

Globální extrémy

Def.: Funkce f nabývá na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ svého maxima (minima) v bodě $x_0 \in M$, jestliže

$$f(x_0) = \max \{ f(x) \mid x \in M \}$$

$$f(x_0) = \min \{ f(x) \mid x \in M \}$$

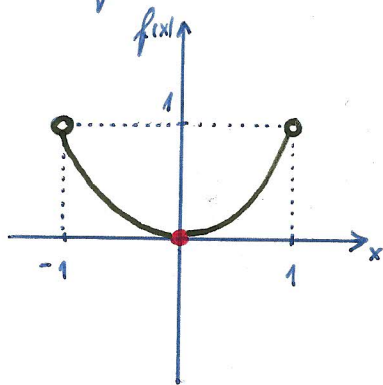


globální maximum na $M = \langle 1, 6 \rangle$ je v bodě $x_1 = 3$
a globální minimum je v bodě $x_2 = 1$

Poznámka: Globální extrémy na M hledáme mezi lokálními extrémy na M a v "krajních bodech" množiny M .

Pr.: Určete globální extrémy funkce f na M .

1.) $f(x) = x^2$, $M = (-1, 1)$



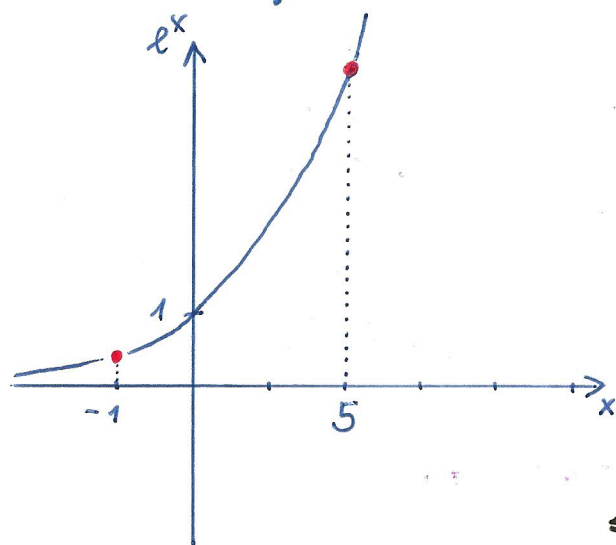
$$\{ f(x) \mid x \in (-1, 1) \} = \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow$$

Funkce $f(x) = x^2$ na $\langle 0, 1 \rangle$ nemá maximum

Funkce $f(x) = x^2$ má na $\langle 0, 1 \rangle$ minimum v bodě $x_0 = 0$ a $f(0) = 0$

2.) $f(x) = e^x$, $M = \langle -1, 5 \rangle$

$\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ a) f nemá žádné lokální extrémum na $\mathbb{R}$
(a tedy ani na $\langle -1, 5 \rangle$)



b) f je na $\mathbb{R}$ rostoucí $\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \langle -1, 5 \rangle : f(x) < f(5) \\ \text{a} \\ \forall x \in \langle -1, 5 \rangle : f(x) > f(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ má svého maxima na $\langle -1, 5 \rangle$ v bodě $x_1 = 5$

f má svého minima na $\langle -1, 5 \rangle$ v bodě $x_2 = -1$

3.) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$, $M = \langle -3, 3 \rangle$

$\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \Rightarrow$

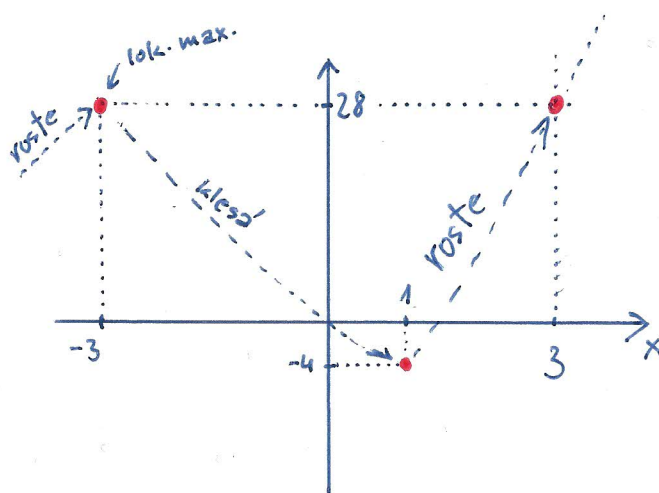
a) určíme lokální extrémum:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$$



$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f''(-3) = -12 < 0 \Rightarrow f \text{ má v } x_1 = -3 \text{ ostré lok. max. } \underline{f(-3) = 28}$$

$$f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow f \text{ má v } x_2 = 1 \text{ ostré lok. min. } \underline{f(1) = -4}$$

b) prozkoumáme krajní body intervalu $M = \langle -3, 3 \rangle$

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 1 = \underline{28}$$

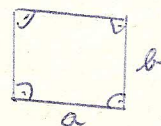
$$f(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 1 = \underline{28}$$

$\Rightarrow f$ má na $\langle -3, 3 \rangle$ svého maxima v bodech $x_1 = -3$ a $x_2 = 3$ a svého minima v bodě $x_3 = 1$.

Pr: Nájdite obdĺnik, ktorej ná' pri danom 'obvode $\sigma = \text{konst.} \in \mathbb{R}$ maximálny obsah

obvod: $\sigma = 2a + 2b = \text{konst.}$

obsah: $S = a \cdot b$



$$\Rightarrow 2a = \sigma - 2b$$

$$a = \frac{\sigma - 2b}{2} = \frac{\sigma}{2} - b \Rightarrow \text{dosadíme} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{\sigma}{2} - b\right) \cdot b$$

$$S = \frac{\sigma}{2} \cdot b - b^2$$

$$S(b) = \frac{\sigma}{2} b - b^2$$

hľadáme, pre ktoré b je $S(b)$ maximálny

$$S'(b) = \frac{\sigma}{2} - 2b$$

$$S'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma}{2} - 2b = 0$$

$$\sigma = 4b$$

$$2a + 2b = 4b$$

$$2a = 2b$$

$$\underline{a = b} \Rightarrow \underline{\text{jde o štvorec}}$$

je to ešte v našom? $S''(b) = \left(\frac{\sigma}{2} - 2b\right)' = -2 < 0 \Rightarrow S$ má v a svoje maximum

Pr: Jak musí vyzdať plechovka, aby pri minimálnom obsahu mala daný objem?

$$V = \pi r^2 \cdot v = \text{konst.} > 0 \Rightarrow v = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot v$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$\leftarrow$ hľadáme minimum funkcie $S(r)$

$$S'(r) = 4\pi r - 2V \left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

$$4\pi r = \frac{2\pi r^3 \cdot v}{r^2}$$

$$4r = 2v$$

$$\underline{2r = v}$$

$\Rightarrow$ je $S(r)$ minimálny? alebo maximálny?

$$S''(r) = 4\pi + 2V \frac{2}{r^3} > 0 \Rightarrow v \text{ priťade,}$$

že $2r = v$ nastane minimum $S(r)$



$\Rightarrow$ Bohorje je štvorec

