Př: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ je okruh.

1.) Určete $\forall a \in \mathbb{Z}_6$ prvek inverzní vzhledem ke sčítání.

$-\bar{0} = \bar{0}$; $-\bar{1} = \bar{5}$; $-\bar{2} = \bar{4}$; $-\bar{3} = \bar{3}$; $-\bar{4} = \bar{2}$; $-\bar{5} = \bar{1}$

2.) Určete $\forall a \in \mathbb{Z}_6$ prvek inverzní vzhledem k násobení – pokud existuje

$\bar{0}^{-1}$ ... neexistuje

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$ (protože $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$) $\bar{1}$ je neutrálním prvkem při násobení

$\bar{2}^{-1}$ ... neexistuje

$\bar{3}^{-1}$ .... neexistuje

$\bar{4}^{-1}$ .... neexistuje

$\bar{5}^{-1} = \bar{5}$

(Pouze generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ mají prvek inverzní – jejich sčítáním jsme schopni „vyrobit" číslo 1 – generátor cykl. grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$)

3.) Určete všechny podokruhy okruhu $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

Hledáme-li podokruh $(H, +, \cdot)$, je zřejmé, že $(H, +)$ musí být podgrupou $(\mathbb{Z}_6, +)$ $\Rightarrow$ Nejprve nalezneme všechny podgrupy v $(\mathbb{Z}_6, +)$. $(\mathbb{Z}_6, +)$ je cyklická podgrupa $\Rightarrow$ existuje v ní právě jedna podgrupa řádu k, kde $k / 6$ $\Rightarrow$

I.) $k = 1$ $\quad H_1 = \{0\}$ $\Rightarrow$ $(H_1, +)$ je podgrupa

II.) $k = 2$ $\quad H_2 = \{0, 3\} = \langle 3 \rangle$ $\Rightarrow$ $(H_2, +)$ je podgrupa

III.) $k = 3$ $\quad H_3 = \{0, 2, 4\} = \langle 2 \rangle$ $\Rightarrow$ $(H_3, +)$ je podgrupa

IV.) $k = 6$ $\quad H_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \langle 1 \rangle$ $\Rightarrow$ $(H_4, +)$ je podgrupa

$(\{0\}, +, \cdot)$ i $(R, +, \cdot)$ jsou podokruhy okruhu $(R, +, \cdot)$ $\Rightarrow$ $(H_1, +, \cdot)$ i $(H_4, +, \cdot)$ jsou podokruhy okruhu $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$

Zbývá ověřit, zda také $(H_2, +, \cdot)$ a $(H_3, +, \cdot)$ jsou podokruhy okruhu $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

⇒ Ověříme, zda $(H_2,+,\cdot)$, kde $H_2=\{0,3\}$ je podokruh okruhu $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

Ověříme platnost podmínek:

1.) $\forall a,b \in H_2 : a-b \in H_2$

$-$	0	3
0	0	$-3 = 3$
3	3	0

⇒ splněno

2.) $\forall a,b \in H_2 : a\cdot b \in H_2$

$\cdot$	0	3
0	0	0
3	0	3

⇒ splněno

⇒ $(H_2,+,\cdot)$ je podokruh $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$

Nakonec ověříme, zda $(H_3,+,\cdot)$ je podokruh okruhu $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$; $H_3=\{0,2,4\}$.

1.) $\forall a,b \in H_3 : a-b \in H_3$

$-$	0	2	4
0	0	4	2
2	2	0	4
4	4	2	0

⇒ splněno

2.) $\forall a,b \in H_3 : a\cdot b \in H_3$

$\cdot$	0	2	4
0	0	0	0
2	0	4	2
4	0	2	4

⇒ splněno

⇒ $(H_3,+,\cdot)$ je podokruh $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$

Žádné jiné podokruhy okruh $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ mít nemůže (nebyly by to podgrupy v $(\mathbb{Z}_6,+)$.

Př: $(M_{(2,2)},+,\cdot)$, kde $M_{2,2}$ je množina <u>reálných</u> matic typu $(2,2)$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení matic je okruh. Ověřte, zda $(H,+,\cdot)$ je podokruh tohoto okruhu.

a) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\underset{\in H}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{\in H}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin H \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{není to podokruh}}}$$

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\underset{\in H}{\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}} - \underset{\in H}{\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & \overset{\in\mathbb{Z}}{a_1-a_2} \\ \underset{\in\mathbb{Z}}{b_1-b_2} & 0 \end{pmatrix} \in H$$

Ale!: $$\underset{\in H}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\in H}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin H \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{není to podokruh!}}}$$

c) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}$

1.) $$\underset{\in H}{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}} - \underset{\in H}{\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overset{\in\mathbb{Z}}{(a_1-a_2)} & 0 \\ 0 & \underset{\in\mathbb{Z}}{(b_1-b_2)} \end{pmatrix} \in H$$

2.) $$\underset{\in H}{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\in H}{\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overset{\in\mathbb{Z}}{a_1a_2} & 0 \\ 0 & \underset{\in\mathbb{Z}}{b_1b_2} \end{pmatrix} \in H \quad \Rightarrow (H,+,\cdot) \text{ je podokruh } (M_{(2,2)},+,\cdot)$$

Př: Nechť $R = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \}$ … množina reálných funkcí reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}$. Jejich sčítání definujme předpisem:

sčítání funkcí

$$\forall f, g \in R : \quad \forall x \in \mathbb{R} : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

sčítání reálných čísel

násobení definujme předpisem:

násobení funkcí násobení reálných čísel

$$\forall f, g \in R : \quad \forall x \in \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

a) Dokažte, že $(R, +, \cdot)$ je okruh

1.) $\forall f, g \in R : f+g \in R$ (neboť $f+g$ je funkce definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$)

2.) $\forall f, g, h \in R$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (f + (g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) =$$
$$= ((f+g)(x)) + f(x) = ((f+g)+h)(x)$$

$$\Rightarrow \quad f + (g+h) = (f+g) + h$$

3.) Nulou v $(R, +, \cdot)$ bude funkce o daná předpisem:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad o(x) = 0$$ nula v okruhu reálných čísel (neboť $\forall f \in R$: $o + f = f + o = f$)

4.) $\forall f \in R \ \exists -f \in R$, kde

$$\forall x \in \mathbb{R} : (-f)(x) = -1 \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f + (-f) = o$$

5.) $\forall f, g \in R$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \quad \Rightarrow \quad f+g = g+h$$

6.) $\forall f, g \in R: \quad f \cdot g \in R$ (neboť funkce $f \cdot g$ je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$)

7.) $\forall f, g, h \in R:$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (f \cdot (g \cdot h))(x) = f(x) \cdot (g \cdot h)(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = (f(x) \cdot g(x))\, h(x) =$$

$$= ((f \cdot g)(x)) \cdot h(x) = ((f \cdot g) \cdot h)(x) \qquad \Rightarrow \ f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$$

8.) $\forall f, g, h \in R:$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (f \cdot (g+h))(x) = f(x) \cdot (g+h)(x) = f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) g(x) + f(x) h(x) =$$

$$= (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x) = (f \cdot a + f \cdot h)(x)$$

$$\Rightarrow \ f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$$

9.) $\forall f, g, h \in R:$

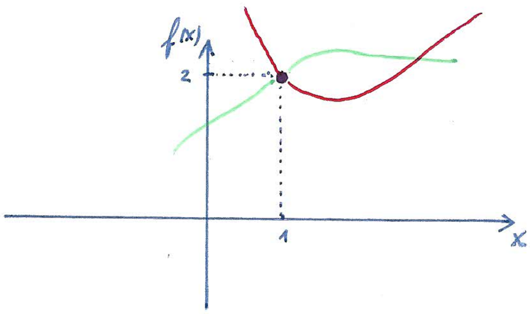
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ ((f+g) h)(x) = (f+g)(x) \cdot h(x) = (f(x) + g(x))\, h(x) = f(x) h(x) + g(x) h(x) =$$

$$= (f \cdot h)(x) + (g \cdot h)(x) = (f \cdot h + g \cdot h)(x)$$

$$\Rightarrow \ (f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$$

b) Ověřte, zda $(H,+,\cdot)$ je podokruh okruhu $(R,+,\cdot)$.

α) $H = \{ f \in R \mid f(1) = 2 \}$



$\forall f, g \in H:$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ g(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2-2=0 \Rightarrow f-g \notin H \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ není to podokruh okruhu $(R,+,\cdot)$

β) $H = \{ f \in R \mid f(3) = 0 \}$

$\forall f, g \in H:$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \\ g(3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1.)\ (f-g)(3) = f(3) - g(3) = 0-0=0 \Rightarrow f-g \in H \\ 2.)\ (f\cdot g)(3) = f(3)\cdot g(3) = 0\cdot 0 = 0 \Rightarrow f\cdot g \in H \end{array}$$

$\Rightarrow$ $(H,+,\cdot)$ je podokruh okruhu $(R,+,\cdot)$

γ) $H = \{ f \in R \mid f(x) = ax+b,\ \text{kde}\ a,b \in \mathbb{R} \}$

$\forall f, g \in H:$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a_1x+b_1 \\ g(x) = a_2x+b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1.)\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) = (a_1-a_2)x + (b_1-b_2) \in H \\ 2.)\ (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = a_1a_2x^2 + (a_1b_2+a_2b_1)x + b_1b_2 \notin H \end{array}$$

$\Rightarrow$ $(H,+,\cdot)$ není to podokruh okruhu $(R,+,\cdot)$.

δ) $H = \{ f \in R \mid f\ \text{je polynom} \}$

$\Rightarrow$ $(H,+,\cdot)$ je podokruh $(R,+,\cdot)$