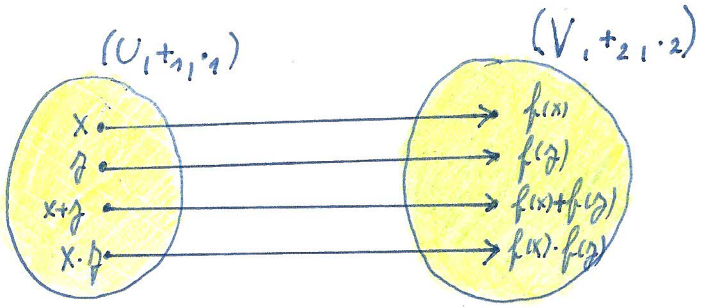
Homomorfismy okruhů

Def. (Homomorfismus okruhů): Nechť $(U,+_1,\cdot_1)$ a $(V,+_2,\cdot_2)$ jsou okruhy. Homomorfismem okruhu $(U,+_1,\cdot_1)$ do $(V,+_2,\cdot_2)$ nazveme zobrazení $f: U \to V$ splňující podmínky:

1.) $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$ (Tzn. f je homom. grupy $(U,+_1)$ do $(V,+_2)$)

2.) $f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$



Pozn.: V případě, že $(U,+,\cdot)$ a $(V,+,\cdot)$ jsou tělesa, jsou $(U-\{0_U\},\cdot_1)$ a $(V-\{0_V\},\cdot_2)$ komutativní grupy a tak (podle podmínky 2.)) je restrikce f na $U-\{0_U\}$ také homomorfismem grupy $(U-\{0_U\},\cdot_1)$ do $(V-\{0_V\},\cdot_2)$.

Homomorfismus těles (!) $f: U \to V$ tedy splňuje:

1.) $f(0_U) = 0_V$

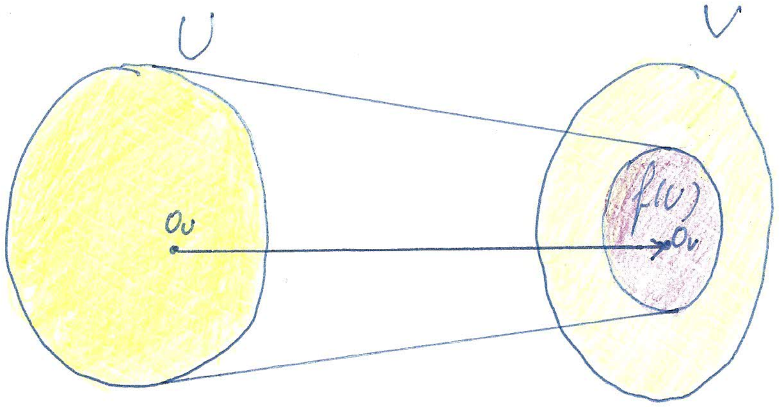
2.) $f(-x) = -f(x)$

3.) $f(1_U) = 1_V$

4.) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

1.) a 2.) platí i když $(U,+,\cdot)$ a $(V,+,\cdot)$ nejsou tělesa, ale jen okruhy

Věta: Nechť $f : U \to V$ je homomorfismus okruhu $(U, +_1, \cdot_1)$ do $(V, +_2, \cdot_2)$. Potom $(f(U), +_2, \cdot_2)$ je podokruh okruhu $(V, +_2, \cdot_2)$.



Důkaz: Je zřejmé, že $f(U) \subseteq V$. Stačí dokázat platnost podmínek:

I.) $\forall f(a), f(b) \in f(U): \quad f(a) - f(b) \in f(U)$

$$f(a) - f(b) = f(a) + f(-b) = f(\underbrace{a-b}_{\in U}) \in f(U)$$ díky uzavřenosti sčítání na U

II.) $\forall f(a), f(b) \in f(U): \quad f(a) \cdot f(b) \in f(U)$

$$f(a) \cdot f(b) = f(\underbrace{a \cdot b}_{\in U}) \in f(U)$$ díky uzavřenosti násobení na U

$\square$

Pozn: 1.) injektivní homomorfismus = monomorfismus

$(\forall x, y \in U: \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

2.) surjektivní homomorfismus = epimorfismus

$(\forall y \in V \ \exists x \in U: \ f(x) = y)$

3.) bijektivní homomorfismus = izomorfismus

(je injektivní i surjektivní)

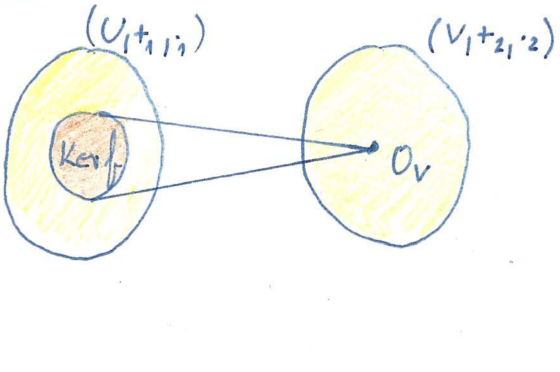
4.) izomorfismus na sebe = automorfismus

(izomorfismus $f: V \to V$)

Def (Jádro homomorfismu): Nechť $f: U \to V$ je homomorfismus okruhů $(U, +_1, \cdot_1)$ do $(V, +_2, \cdot_2)$. Jádrem homomorfismu f je množina

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ x \in U \mid f(x) = 0_V \},$$

kde 0_V je nulový prvek ve $(V, +_2, \cdot_2)$.



Pozn.: $f: U \to V$ je homomorfismus okruhů $\Rightarrow$
$f: U \to V$ je homomorfismus grup $(U, +_1)$ do $(V, +_2)$, $e_V = 0_V$

Jádro homomorfismu okruhů je tedy jádrem příslušného homomorfismu aditivních grup.

Věta: Nechť $f: U \to V$ je homomorfismus okruhu $(U, +_1, \cdot_1)$ do $(V, +_2, \cdot_2)$. Potom Ker f je normální podgrupou grupy $(U, +_1)$.

Důkaz: Homomorfismus okruhu $(U, +_1, \cdot_1)$ do $(V, +_2, \cdot_2)$ je homomorfismus grupy $(U, +_1)$ do $(V, +_2)$. Jádro tohoto homomorfismu je normální podgrupa grupy $(U, +_1)$ (dokázáno dříve

Důsledek: Nechť $f: U \to V$ je homomorfismus okruhu $(U, +_1, \cdot_1)$ do $(V, +_2, \cdot_2)$. Potom $(U/_{\mathrm{Ker} f}, +_1)$ je grupa.

$$\left(U/_{\mathrm{Ker} f} = \{ x + \mathrm{Ker} f \mid x \in U \} , \quad (x +_1 \mathrm{Ker} f) +_1 (y +_1 \mathrm{Ker} f) = (x +_1 y) +_1 \mathrm{Ker} f \right)$$

Věta: Nechť $f: U \to V$ je homomorfismus okruhu $(U, +_1, \cdot_1)$ do $(V, +_2, \cdot_2)$. potom Ker f je oboustranný ideál v $(U, +_1, \cdot_1)$

Důkaz: 1.) $\forall x, y \in \mathrm{Ker} f$:

$$f(x - y) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_V - 0_V = 0_V$$

2.) $\forall x \in U \ \forall a \in \mathrm{Ker} f$: $f(x \cdot_1 a) = f(x) \cdot_2 f(a) = f(x) \cdot_2 0_V = 0_V \Rightarrow x \cdot_1 a \in \mathrm{Ker} f$

$f(a \cdot_1 x) = f(a) \cdot_2 f(x) = 0_V \cdot_2 f(x) = 0_V \Rightarrow a \cdot_1 x \in \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow$ Ker f je oboustranný ideál v $(U, +_1, \cdot_1)$.

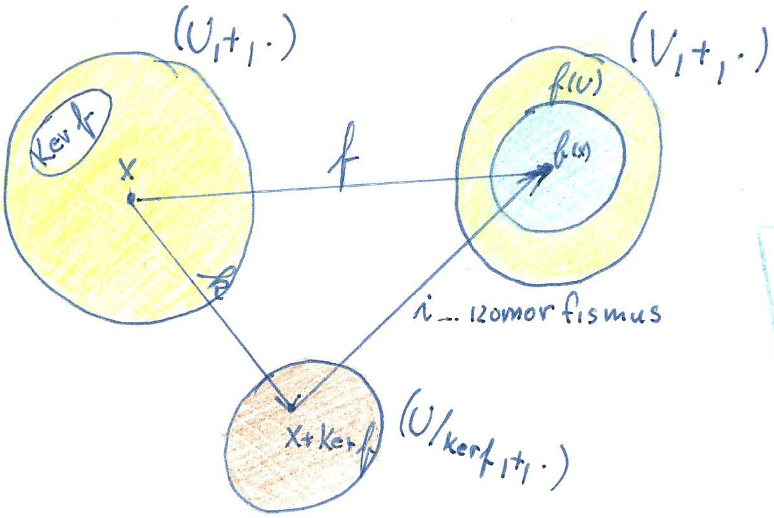
Věta: Nechť $f: U \to V$ je homomorfismus okruhu $(U,+,\cdot)$ do $(V,+,\cdot)$.

Potom $i: U/_{Ker f} \to f(U)$, kde $\forall x \in U$:

$$i(x+Ker f) = f(x)$$

je izomorfismus okruhů $(U/_{Ker f},+,\cdot)$ a $(f(U),+,\cdot)$

(Nerozlišujeme značení operací $+$ a $\cdot$ na U a na V - pro jednoduchost zápisu.)



$$U/_{Ker f} \approx f(U)$$

Důkaz:

1.) f je homomorfismus $\Rightarrow$ $(f(U),+,\cdot)$ je okruh (podokruh ve $(V,+,\cdot)$)

2.) $Ker f$ je oboustranný ideál $\Rightarrow$ $(U/_{Ker f},+,\cdot)$ je okruh (faktorový okruh $(U,+,\cdot)$ podle $Ker f$)

3.) i je homomorfismus, neboť $\forall\, x+Ker f,\ y+Ker f \in U/_{Ker f}$:

$$i((x+Ker f)+(y+Ker f)) = i((x+y)+Ker f) = f(x+y) = f(x)+f(y) = i(x+Ker f)+i(y+Ker f)$$
$$i((x+Ker f)\cdot(y+Ker f)) = i((xy)+Ker f) = f(xy) = f(x)\cdot f(y) = i(x+Ker f)\cdot i(y+Ker f)$$

4.) i je injektivní, neboť $\forall x,y \in U$:

$$i(x+Ker f) = i(y+Ker f) \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow f(x)-f(y)=0_V \Rightarrow f(x-y)=0_V \Rightarrow x-y \in Ker f$$
$$\Rightarrow x-y = h \in Ker f \Rightarrow x = y+h \Rightarrow x+Ker f = (y+h)+Ker f = y+Ker f$$

5.) i je surjektivní, neboť $\forall f(x) \in f(U)\ \exists\, x+Ker f \in U/_{Ker f} : i(x+Ker f) = f(x)$ $\square$