

Pr: Označ me $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

$(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ jsou tělesa („+“ a „•“ jsou vestřívky sečítání a násobení reálných čísel na $\mathbb{Q}(\sqrt{3})^2$, resp. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2$).

1.) Určete $(3+2\sqrt{2})^{-1}$ v $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$

$$a+b\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^{-1} \Leftrightarrow$$

$$(a+b\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1$$

$$a+b\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$/. \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = 1$$

$$a+b\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

$$a+b\sqrt{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}$$

$$\underline{\underline{(3+2\sqrt{2})^{-1} = a+b\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2}}}$$

2.) Určete $(4-3\sqrt{3})^{-1}$ v $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$

$$(4-3\sqrt{3})^{-1} (4-3\sqrt{3}) = 1$$

$$(4-3\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{4-3\sqrt{3}}$$

$$(4-3\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{4-3\sqrt{3}} \cdot \frac{4+3\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$$

$$(4-3\sqrt{3})^{-1} = \frac{4+3\sqrt{3}}{16-27}$$

$$\underline{\underline{(4-3\sqrt{3})^{-1} = -\frac{4}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{3}}}$$

3.) Nalezněte všechny automorfismy tělesa $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$.

automorfismus: $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(izomorfismus na sebe)
bijektivní homomorfismus

homomorfismus těles splňuje: $\forall a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad (*)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad (***)$$

navíc $f(a)^{-1} = (f(a))^{-1} \quad \forall a \neq 0$ (****) ($(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \cdot)$ je grupa $\Rightarrow f$ je homom. grup).

a $f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \quad (**)$

$\Rightarrow f(1) = 1$ (protože v grupě $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \cdot)$, $1 = 1$)

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1+1 = 2$$

(protože f je homomorfismus $(*)$)

$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2+1 = 3$$

⋮

$$\forall n \in \mathbb{N}: f(n) = n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: f(-n) = -f(n) = -n \quad (\text{viz } (**, *))$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}: f(n) = n$$

$$\Rightarrow \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}: f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot q^{-1}\right) = f(p) \cdot f(q^{-1}) = f(p) \cdot (f(q))^{-1} = p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q} \quad (\text{viz. } (***) \text{ a } (**))$$

$$\text{tzn: } \forall a \in \mathbb{Q}: f(a) = a$$

$$\Rightarrow \forall a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}):$$

$$f(a+b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2}) = f(a) + f(b)f(\sqrt{2}) = a + b \underbrace{f(\sqrt{2})}_{=?}$$

$$2 = f(2) = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = (f(\sqrt{2}))^2 = 2 \quad \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \pm \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Existují právě dva automorfismy na $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$:
(Snadno se ukáže, že opravdu jde o automorfismy.)

$$\underline{\underline{f_1(a+b\sqrt{2}) = a+b\sqrt{2} = \text{identita}}}$$

$$\underline{\underline{f_2(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}}}$$

(Všimněme si, že $f_2 \circ f_2 = f_1$, tvoří grupu)

4.) Určete všechny automorfismy tělesa $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$

Plejně jako v 3.) se dokáže, že $\forall a \in \mathbb{Q}: f(a) = a$

$$\Rightarrow f(a + b\sqrt{3}) = f(a) + f(b\sqrt{3}) = f(a) + f(b) f(\sqrt{3}) = a + b \underbrace{f(\sqrt{3})}_{=?}$$

$$3 = f(3) = f(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = (f(\sqrt{3}))^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad f(\sqrt{3}) = \pm \sqrt{3}$$

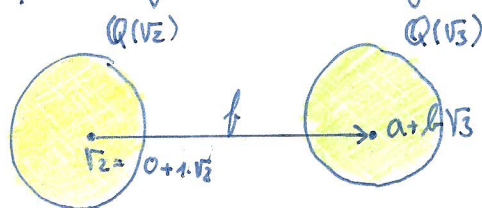
$\Rightarrow$ Existují dva automorfismy tělesa $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$:

$$f_1(a + b\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3}$$

$$f_2(a + b\sqrt{3}) = a - b\sqrt{3}$$

5.) Dokažte, že tělesa $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ nejsou izomorfní

Sporem. Předpokládejme, že existuje izomorfismus $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})$



$\sqrt{2}$ se zobrazí na nějaký prvek $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Tzn.

$$f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$$

f je homomorfismus grup $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}, \cdot)$ do $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}) - \{0\}, \cdot)$, $\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{2}) - \{0\}} = 1 = \ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{3}) - \{0\}}$

$\Rightarrow$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(2) = f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = (f(\sqrt{2}))^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(\sqrt{2}) = \pm \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$

$$\pm \sqrt{2} = a + b\sqrt{3} \quad /^2$$

$$2 = a^2 + 2ab\sqrt{3} + b^2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2 - a^2 - b^2 \cdot 3}{2ab} \in \mathbb{Q} \quad \text{Spor!}$$

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

□

Pr: Dokážte, že zobrazení $f: R \rightarrow R$ je automorfismus tělesa $(R, +, \cdot)$.

a) $R = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

1.) $f(a+b\sqrt{3}) = a+b\sqrt{3}$

$\Rightarrow f$ je identita $\Rightarrow$ I.) f je homomorfismus:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}): f(x+y) = x+y = f(x) + f(y)$$

$$f(x \cdot y) = x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$$

II.) f je prosté zobrazení:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}): f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

III.) f je surjektivní:

$$\forall y \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \exists x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}): f(x) = y, \text{ stačí zvolit } x = y$$

2.) $f(a+b\sqrt{3}) = a-b\sqrt{3}$

I.) f je homomorfismus:

$$\forall a_1+b_1\sqrt{3}, a_2+b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}):$$

$$\begin{aligned} \bullet \underline{f((a_1+b_1\sqrt{3}) + (a_2+b_2\sqrt{3}))} &= \underline{f((a_1+a_2) + (b_1+b_2)\sqrt{3})} = (a_1+a_2) - (b_1+b_2)\sqrt{3} = \\ &= (a_1-b_1\sqrt{3}) + (a_2-b_2\sqrt{3}) = \underline{f(a_1+b_1\sqrt{3}) + f(a_2+b_2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \underline{f((a_1+b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2+b_2\sqrt{3}))} &= \underline{f(a_1a_2 + 3b_1b_2 + (a_1b_2\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3}))} = \\ &= a_1a_2 + 3b_1b_2 - (a_1b_2\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3}) = (a_1-b_1\sqrt{3})(a_2-b_2\sqrt{3}) = \\ &= \underline{f(a_1+b_1\sqrt{3}) \cdot f(a_2+b_2\sqrt{3})} \end{aligned}$$

II.) f je injektivní (prosté) zobrazení:

$$\forall a_1 + b_1 \sqrt{3}, a_2 + b_2 \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) :$$

$$\underline{f(a_1 + b_1 \sqrt{3}) = f(a_2 + b_2 \sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$a_1 + b_1 \sqrt{3} = a_2 + b_2 \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}(b_2 - b_1) = a_2 - a_1$$

$$\underline{b_2 - b_1 \neq 0}$$

$$\sqrt{3} = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q} \text{ spor!}$$

$$\underline{b_2 - b_1 = 0}$$

$$\sqrt{3} \cdot 0 = a_2 - a_1$$

$$a_2 - a_1 = 0$$

$$\Downarrow \\ b_2 = b_1 \wedge a_2 = a_1 \Rightarrow$$

$$\underline{a_1 + b_1 \sqrt{3} = a_2 + b_2 \sqrt{3}}$$

III.) f je surjektivní zobrazení

$$\forall a + b \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \exists x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) : f(x) = a + b \sqrt{3}$$

$$\text{stačí zvolit } x = a + b \sqrt{3}$$