

Př: Proveďte rozklad grupy $(\mathbb{Z}_8, +)$ podle podgrupy $(H, +)$ a $(K, +)$, kde $K = \{0, 4\}$ a $H = \{0, 2, 4, 6\}$.

Rozklad $\mathbb{Z}_8/K$:

$$0+K = \{0, 4\}$$

$$1+K = \{1, 5\}$$

$$2+K = \{2, 6\}$$

$$3+K = \{3, 7\}$$

$$4+K = K$$

$$5+K = 1+K$$

$$\vdots$$

žádné nové třídy rozkladu

$$0+H = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$1+H = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$2+H = H$$

$$3+H = 1+2+H = 1+H$$

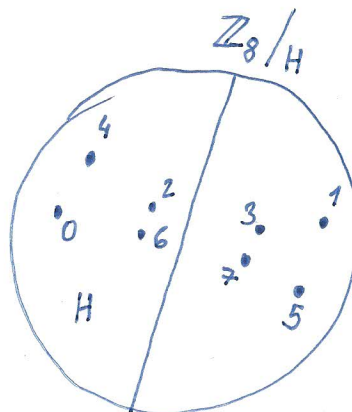
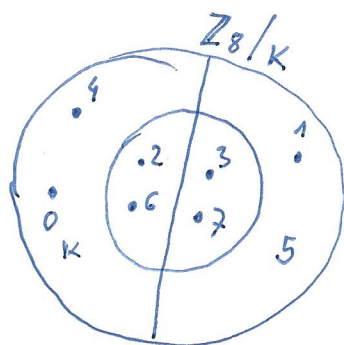
$$\vdots$$

žádné nové třídy rozkladu

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{Z}_8/K = \{\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}\}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{Z}_8/H = \{\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}\}}}$$

Všimněme si:



$$H = \{0, 4\} \cup \{2, 6\} = (0+K) \cup (2+K)$$

$$H+1 = \{1, 5\} \cup \{3, 7\} = (1+K) \cup (3+K)$$

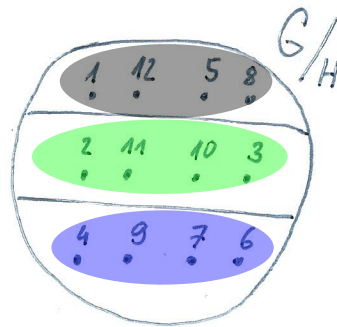
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_8 &= H \cup (1+H) = (0+K) \cup (2+K) \cup (1+(0+K) \cup (2+K)) = \\ &= (0+K) \cup (2+K) \cup (1+K) \cup (3+K) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Třídy rozkladu $\mathbb{Z}_8/H$ je možno rozložit na třídy rozkladu $\mathbb{Z}_8/K$

Pr.: Uvažujme grupu ($\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, \dots, 12\}, \cdot$) a její podgrupy $(K, \cdot)$ a $(H, \cdot)$, kde $K = \{1, 12\}$ a $H = \{1, 12, 5, 8\}$.

a) Určete rozklad $\mathbb{Z}_{13} = G$ podle H :

$$\left. \begin{array}{l} 1. H = \{1, 12, 5, 8\} \\ 2. H = \{2, 11, 10, 3\} \\ 3. H = \{3, \dots\} \Rightarrow 3H = 2H \\ 4. H = \{4, 9, 7, 6\} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



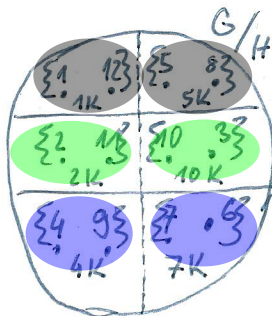
b) Určete rozklad H/K :

$$\left. \begin{array}{l} 1. K = \{1, 12\} = K \\ 12. K = \{12, 13\} = K \\ 5. K = \{5, 8\} \end{array} \right\} \Rightarrow H = \{1, 12\} \cup \{5, 8\} = 1K \cup 5K$$

$$2. H = 2 \cdot (\{1, 12\} \cup \{5, 8\}) = 2 \cdot \{1, 12\} \cup 2 \cdot \{5, 8\} = 2 \cdot 1K \cup 2 \cdot 5K = \{2, 11\} \cup \{10, 3\}$$

$$4. H = 4 \cdot (\{1, 12\} \cup \{5, 8\}) = 4 \cdot 1K \cup 4 \cdot 5K = \{4, 9\} \cup \{7, 6\}$$

$\Rightarrow$



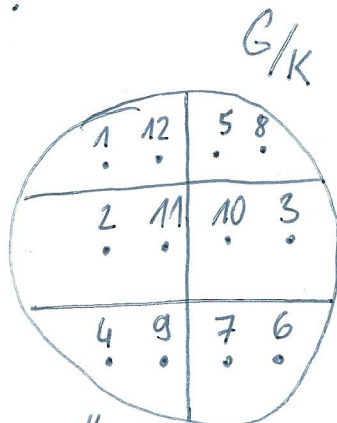
$$\Rightarrow G = 1H \cup 2H \cup 4H =$$

$$= 1 \cdot (K \cup 5K) \cup 2 \cdot (K \cup 5K) \cup 4 \cdot (K \cup 5K) =$$

$$= 1K \cup 5K \cup 2K \cup 10K \cup 4K \cup 20K$$

c) Určete rozklad G/K :

$$\begin{array}{l} 1. K = \{1, 12\} \\ 2. K = \{2, 11\} \\ 3. K = \{3, 10\} = 10K \\ 4. K = \{4, 9\} \\ 5. K = \{5, 8\} \\ 6. K = \{6, 7\} = 7K \end{array}$$



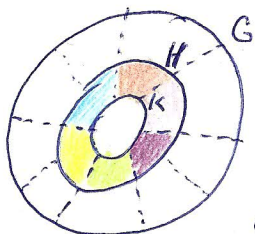
dopadne to úplně stejne!

$$G = 1K \cup 5K \cup 2K \cup 10K \cup 4K \cup 7K$$

Věta: Necht' $(G, \cdot)$ je grupa a $(H, \cdot)$ a $(K, \cdot)$ její podgrupy.
 Jestliže $(G:K) < \infty$ a $K \subseteq H$, pak

$$1.) (G:K) \geq (G:H) \quad (\text{Tam. } (G:H) < \infty)$$

$$2.) (G:K) \geq (H:K) \quad (\text{Tam. } (H:K) < \infty)$$



Důkaz:

$$\text{ad 1)} (G:K) < \infty \Rightarrow (G:K) = m \in \mathbb{N} \Rightarrow G/K = \{g_1K, g_2K, \dots, g_mK\}$$

$$\text{a platí } \bigcup_{i=1}^m g_iK = G$$

$$K \subseteq H \text{ proto } \forall i=1,2,\dots,m : g_iK \subseteq g_iH \Rightarrow$$

$$G = \bigcup_{i=1}^m g_iK \subseteq \bigcup_{i=1}^m g_iH \subseteq G \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m g_iH = G$$

$\forall i=1,2,\dots,m :$ g_iH jsou třídy rozkladu $G/H \Rightarrow$ jsou ~~si~~ buď disjunktní, nebo totožné. Proto $|G/H| = (G:H) \leq m = (G:K)$ □ ad 1)

$$\text{ad 2)} (G:K) < \infty \Rightarrow (G:K) = m \in \mathbb{N} \Rightarrow G/K = \{g_1K, g_2K, \dots, g_mK\}$$

$$\text{a platí } \bigcup_{i=1}^m g_iK = G$$

$$H/K = \{hK \mid h \in H\} \subseteq \{gK \mid g \in G\} = G/K = \underbrace{\{g_1K, g_2K, \dots, g_mK\}}_{\text{navzáj. disj.}}$$

$$\Rightarrow \forall hK \in H/K \exists! g_iK : hK = g_iK$$

$$\Rightarrow |H/K| \leq |G/K|$$

$$(H:K) \leq (G:K)$$

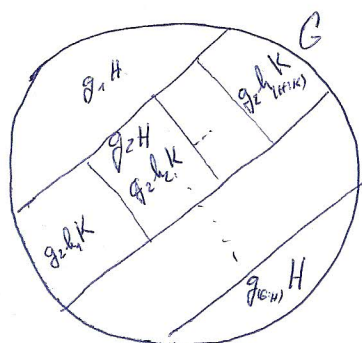
□ ad 2)

Pr: Lagrangeova věta říká, že pro konečnou grupu $(G, \cdot)$ a její podgrupy $(H, \cdot)$ a $(K, \cdot)$, kde $K \leq H \leq G$ platí

$$(G:K) = (G:H)(H:K)$$

Dokažte, že toto tvrzení platí i pro nekonečné grupy $(G, \cdot)$ za předpokladu konečnosti indexu $(G:K)$ - potom také $(G:H) < \infty$ a $(H:K) < \infty$

Důkaz:



$$(G:H) \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists g_1, g_2, \dots, g_{(G:H)} \in G : G/H = \{g_1H, g_2H, \dots, g_{(G:H)}H\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{(G:H)} g_iH = G$$

a g_iH jsou navzájem disjunktní a neprázdné

$$(H:K) \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists h_1, h_2, \dots, h_{(H:K)} \in H : H/K = \{h_1K, h_2K, \dots, h_{(H:K)}K\}$$

$$\bigcup_{j=1}^{(H:K)} h_jK = H$$

a h_jK jsou navzájem disjunktní a neprázdné

$$\Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^{(G:H)} g_iH = \bigcup_{i=1}^{(G:H)} g_i \left(\bigcup_{j=1}^{(H:K)} h_jK \right) = \bigcup_{i=1}^{(G:H)} \bigcup_{j=1}^{(H:K)} g_ih_jK \quad (*)$$

Předpokládejme, že $g_{i_1}h_{j_1}K \cap g_{i_2}h_{j_2}K \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\exists k_1, k_2 \in K : \underbrace{g_{i_1}h_{j_1}k_1}_{\in g_{i_1}H} = \underbrace{g_{i_2}h_{j_2}k_2}_{\in g_{i_2}H} \Rightarrow i_1 = i_2$$

$$\underbrace{h_{j_1}k_1}_{\in h_{j_1}K} = \underbrace{h_{j_2}k_2}_{\in h_{j_2}K} \Rightarrow j_1 = j_2$$

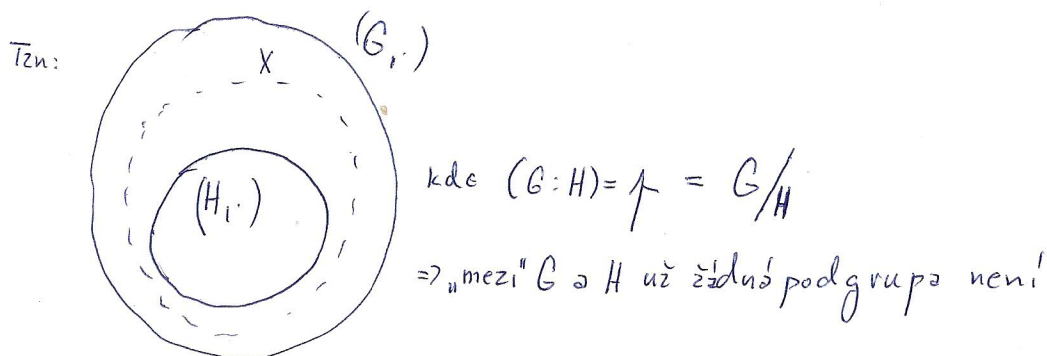
Tzn. pro měne dvojice (i, j) jsou množiny g_ih_jK navzájem disjunktní. Navíc jsou neprázdné (z ek) a jejich sjednocení tvoří množinu G (viz (*)). Množiny g_ih_jK tedy tvoří rozklad G podle K a jejich celkem $(G:H) \cdot (H:K) \Rightarrow$

$$(G:K) = (G:H)(H:K)$$

□

Př.

Dokažte. Necht' p je prvočíslo a $(G, \cdot)$ je grupa a $(H, \cdot)$ je její podgrupa indexu p . Jestliže $(X, \cdot)$ je podgrupa grupy $(G, \cdot)$ taková, že $G \supseteq X \supseteq H$, pak $X=G$, nebo $X=H$.



Důkaz: Z Lagrangeovy věty plyne:

$$H \leq X \leq G \Rightarrow (G:H) = (G:X)(X:H)$$

$$\Rightarrow p = (G:X)(X:H)$$

$$\Rightarrow \text{Bud' 1.) } (G:X) = 1 \Rightarrow |G/X| = 1 \Rightarrow G/X = \{gX \mid g \in G\} = \{eX\}$$

Víme, že G/X je rozklad $G \Rightarrow$

$$\bigcup_{g \in G} gX = eX = X = G$$

$$\text{a nebo 2.) } (X:H) = 1 \Rightarrow |X/H| = 1 \Rightarrow X/H = \{xH \mid x \in X\} = \{eH\}$$

Víme, že X/H je rozklad $X \Rightarrow$

$$\bigcup_{x \in X} xH = eH = H = X$$

□

Def: Necht' $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ je rozklad grupy $(G, \cdot)$ podle podgrup $(H, \cdot)$.
 reprezentantem třídy rozkladu gH nazveme libovolné $x \in G$ takové, že
 $x \in gH$.

Př: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \dots$ máabytkových tříd modulo 5

např. $\bar{1} = 1 + 5\mathbb{Z} = \{1 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ reprezentantů této třidy jsou čísla $x = 1, 6, 11, -4, -9, \dots$

Př: Určete index podgrup $(\mathbb{Z}, +)$ v grupě $(\mathbb{Q}, +)$ a nalezněte alespoň dva reprezentanty tříd rozkladu $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ a $\frac{3}{2} + \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{q + \mathbb{Z} \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

$q + \mathbb{Z} = \{q + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ kolik takových navzájem různých tříd rozkladu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ existuje?

$$q_1 + \mathbb{Z} = q_2 + \mathbb{Z} \Rightarrow \{q_1 + k_1 \mid k_1 \in \mathbb{Z}\} = \{q_2 + k_2 \mid k_2 \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$

$$\text{ zvolme } k_1 = 0 \text{ potom } \exists k_2 \in \mathbb{Z}: q_1 = q_2 + k_2 \Rightarrow q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$$

$$q_1 - q_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: q_1 = q_2 + k \Rightarrow q_1 + \mathbb{Z} = (q_2 + k) + \mathbb{Z} = q_2 + (\underbrace{k}_{\in \mathbb{Z}} + \mathbb{Z}) = q_2 + \mathbb{Z}$$

$$\text{tedy, } q_1 + \mathbb{Z} = q_2 + \mathbb{Z} \Leftrightarrow q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \neq n: \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{m} + \mathbb{Z} \neq \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \Rightarrow$ Určité existuje nekonečně mnoho různých tříd rozkladu $q + \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Q} : \mathbb{Z}) = \infty$

$$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \left\{ \frac{1}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow \text{reprezentantem této třídy je např.: } x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1, \dots$$

$$\frac{3}{2} + \mathbb{Z} = \left\{ \frac{3}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow \text{reprezentanti: } x = \frac{1}{2} \text{ (} k = -1 \text{)}; x = \frac{3}{2}; x = \frac{5}{2}; \dots$$

$$(\text{všimněme si, že } \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \frac{3}{2} + \mathbb{Z}.)$$

Př: min Dokažte. Necht' $(G, \cdot)$ je grupa a $(H, \cdot)$ její podgrupa. Potom
 $\forall a, b \in G: aH = bH \Leftrightarrow \bar{b}aH = H \Leftrightarrow \bar{b}a \in H$

Důkaz:

$$\Rightarrow \bar{b}aH = H \Rightarrow \bar{b}a = h \in H \Rightarrow a = bh \Rightarrow aH = bhH = \overset{H}{bH}$$

$$\Leftarrow aH = bH \Rightarrow a \underset{H}{x} \in bH \Rightarrow a = bh, \text{ kde } h \in H \Rightarrow \bar{b}a = h \in H$$

(Dříve jsme dokázali, že $xH = H \Leftrightarrow x \in H$. Proto $(aH = bH) \Leftrightarrow (H = \bar{b}aH) \Leftrightarrow \bar{b}a \in H$). $\square$

Příklad: min Provejte s příkladem, když $G = \mathbb{Q}$ a $H = \mathbb{Z}$:

$$q_1 + \mathbb{Z} = q_2 + \mathbb{Z} \Leftrightarrow (-q_2) + (q_1) \in \mathbb{Z}$$

V případě $G = \mathbb{Z}$, $H = 7\mathbb{Z}$:

$$3 + \cancel{7}\mathbb{Z} = 10 + 7\mathbb{Z} \text{ protože } -10 + 3 = -7 \in 7\mathbb{Z}$$

Př: min Dokažte. Necht' $a \in G$ je reprezentantem třídy rozkladu $gH \in G/H$.
 Potom právě když
 $aH = gH$

Důkaz: $\Rightarrow$

a je reprezentantem $gH \Leftrightarrow a \in gH \Leftrightarrow \exists h \in H: a = gh \Rightarrow$

$$aH = (gh)H = g(hH) = gH$$

$\Leftarrow$

$aH = gH \Rightarrow aH \subseteq gH \Rightarrow \overset{\text{min.}}{(x \in H)} ax \in gH \Rightarrow a \in gH \Rightarrow a \text{ je repr. } gH$. $\square$

Příklad: min Uvažujme grupu $(\mathbb{Z}, +)$ a její rozklad $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \Rightarrow 3, 7, 11 \in 3 + 4\mathbb{Z} = \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$
 $3 + 4\mathbb{Z} = 7 + 4\mathbb{Z} = 11 + 4\mathbb{Z} \dots$