**Def.** (Normální podgrupa): Podgrupu $(H,\cdot)$ grupy $(G,\cdot)$ nazveme normální podgrupou grupy $(G,\cdot)$ právě když

$$\forall a \in G : \quad aH = Ha.$$

$$\left( aH = \{ah \mid h \in H\} \ , \ Ha = \{ha \mid h \in H\} \right)$$

**Pozorování:** Každá podgrupa $(H,\cdot)$ komutativní grupy $(G,\cdot)$ je normální:

$$aH = \{ah \mid h \in G\} = \{ha \mid h \in G\} = Ha$$

**Věta:** Nechť $(H, \cdot)$ je normální podgrupa grupy $(G, \cdot)$.
Na množině $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ definujme operaci $*$ předpisem:

$$\forall a, b \in G : (aH) * (bH) = (a \cdot b)H$$

Potom $(G/H, *)$ je grupa.

**Důkaz:** Nejprve ověříme korektnost definice operace $*$.
Dokážeme, že v případě, kdy $a_1H = a_2H \wedge b_1H = b_2H$, pak také $(a_1H)*(b_1H) = (a_2H)*(b_2H)$: (jinak by to nebylo zobrazení!)

Předpokládejme: $a_1H = a_2H \wedge b_1H = b_2H \Rightarrow$

$\exists h_1, h_2 \in H : a_1h_1 = a_2h_2 \Rightarrow a_1 = a_2h_2h_1^{-1} = a_2h$, kde $h \in H$

$\exists h_3, h_4 \in H : b_1h_3 = b_2h_4 \Rightarrow b_1 = b_2h_4h_3^{-1} = b_2h^*$, kde $h^* \in H$

Proto:

$$(a_1H)*(b_1H) = (a_1b_1)H = a_1(b_1H) = a_1(b_2h^*H) = a_1(b_2H) =$$
$$= a_1(Hb_2) = (a_1H)b_2 = ((a_2h)H)b_2 = (a_2(hH))b_2 =$$
$$= (a_2H)b_2 = (Ha_2)b_2 = H(a_2b_2) = (a_2b_2)H = (a_2H)*(b_2H)$$

Dokážeme, že $(G/H, *)$ je grupa:

1.) $\forall aH, bH \in G/H : (aH)*(bH) = (\underbrace{ab}_{\in G})H \in G/H$

2.) $\forall aH, bH, cH \in G/H : aH*(bH*cH) = aH*(bc)H = (a(bc))H =$ (asociativita operace na grupě $G$) $= ((ab)c)H = (ab)H * cH = (aH*bH)*cH$

3.) $\exists eH \in G/H \; \forall aH \in G/H$ ($e$ je neutr. prvek na $G$): $aH * eH = (ae)H = aH$
$eH * aH = (ea)H = aH$ (tj. neutrálním prvkem na $G/H$ je $eH$)

4.) $\forall aH \in G/H \; \exists a^{-1}H \in G/H$ : $aH * a^{-1}H = (aa^{-1})H = eH$
$a^{-1}H * aH = (a^{-1}a)H = eH$ (tj. $(aH)^{-1} = a^{-1}H$)

$\square$

**Def.** (Faktorová grupa): Grupu $(G/H, *)$ z předchozí věty nazýváme faktorovou grupou grupy $(G,\cdot)$ podle podgrupy $(H,\cdot)$

**Poznámka:** Často nebudeme rozlišovat značení operace na grupě a její ~~mod~~ faktorové grupě. Tzn. místo symbolu $*$ budeme používat symbol „$\cdot$".

**Příkl.** Uvažujme $(G,\cdot) = (\mathbb{Z},+)$ (je to komutativní grupa) a $(H,\cdot) = (4\mathbb{Z},+)$ ($4\mathbb{Z} = \{4\cdot k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $\Rightarrow$ je to normální podgrupa)

$$\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} = \{k + 4\mathbb{Z} \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

$$0+4\mathbb{Z} = \{0+4k \mid k\in\mathbb{Z}\} = \bar{0}_4$$
$$1+4\mathbb{Z} = \{1+4k \mid k\in\mathbb{Z}\} = \bar{1}_4$$
$$2+4\mathbb{Z} = \{2+4k \mid k\in\mathbb{Z}\} = \bar{2}_4$$
$$3+\mathbb{Z} = \{3+4k \mid k\in\mathbb{Z}\} = 3_4$$

$\Rightarrow$ např. $(2+4\mathbb{Z}) + (3+4\mathbb{Z}) = (2+3)+4\mathbb{Z} = 1+4\mathbb{Z}$, tj. $\bar{2}_4+\bar{3}_4 = \bar{1}_4$

$(1+4\mathbb{Z}) + (3+4\mathbb{Z}) = (1+3)+4\mathbb{Z} = 0+4\mathbb{Z} = e_{G/H}$ $\Rightarrow$ $-(\bar{1}_4) = \bar{3}_4$

**Věta:** $(H,\cdot)$ je normální podgrupou grupy $(G,\cdot)$ právě tehdy, když pro každé $x \in G$ platí $xHx^{-1} \subseteq H$. Tzn. právě když

$$\forall x \in G\ \forall h \in H:\quad xhx^{-1} \in H$$

---

Důkaz: $\Rightarrow$ v případě že $(H,\cdot)$ je normální v $(G,\cdot)$ platí:

$$xH = Hx$$
$$(xH)x^{-1} = (Hx)x^{-1}$$
$$xHx^{-1} = H$$
$$xHx^{-1} \subseteq H$$

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\forall x \in G:\ xHx^{-1} \subseteq H$

Zvolme $x = a \Rightarrow$ $\quad aHa^{-1} \subseteq H \quad / \cdot a$

$aH \subseteq Ha$ (platí $\forall a \in G$)

Zvolme $x = a^{-1} \Rightarrow$ $\quad a^{-1}H(a^{-1})^{-1} \subseteq H$

$a^{-1}Ha \subseteq H \quad | a \cdot$

$Ha \subseteq aH$ (platí $\forall a \in G$)

$\Rightarrow \forall a \in G: Ha = aH$

$\Downarrow$

$H$ je normální v $G$

$\square$

**Věta:** Nechť $(H_1,\cdot)$ a $(H_2,\cdot)$ jsou normální podgrupy grupy $(G,\cdot)$ potom $(H_1 \cap H_2,\cdot)$ je normální podgrupa grupy $(G,\cdot)$.

Důkaz: $(H_1,\cdot)$ a $(H_2,\cdot)$ jsou podgrupy $\Rightarrow (H_1 \cap H_2,\cdot)$ je podgrupa v $(G,\cdot)$ - dokázáno dříve.

$(H_1,\cdot)$ je normální $\Leftrightarrow \forall x \in G\ \forall h \in H_1:\quad xhx^{-1} \in H_1$

$(H_2,\cdot)$ je normální $\Leftrightarrow \forall x \in G\ \forall h \in H_2:\quad xhx^{-1} \in H_2$

Proto $\forall x \in G\ \forall h \in H_1 \cap H_2:\quad (xhx^{-1} \in H_1) \wedge (xhx^{-1} \in H_2) \Rightarrow$

$xhx^{-1} \in H_1 \cap H_2 \quad \Rightarrow (H_1 \cap H_2,\cdot)$ je normální v $(G,\cdot)$

$\square$

**Def. (Normalizátor):** Nechť $(H,\cdot)$ je podgrupa grupy $(G,\cdot)$. Normalizátorem podgrupy $(H,\cdot)$ v grupě $(G,\cdot)$ nazveme podgrupu $(N_G(H),\cdot)$ grupy $(G,\cdot)$, kde

$$N_G(H) = \{ g \in G \mid gH = Hg \}$$

**Korektnost definice:** Musíme ukázat, že $(N(H),\cdot)$ je podgrupa grupy $(G,\cdot)$:

1.) $N_G(H) \subseteq G$ jistě platí díky uzavřenosti násobení na $G$.

2.) α) $N_G(H) \neq \emptyset$ neboť $eH = He \Rightarrow e \in N_G(H)$

β) I.) uzavřenost: $\forall a,b \in N_G(H)$: $\left.\begin{matrix} aH = Ha \\ bH = Hb \end{matrix}\right\} \Rightarrow abH = aHb = Hab \Rightarrow ab \in N_G(H)$

II.) asociativita: Plyne okamžitě z asociativity násobení na $G$.

III.) $e \in N_G(H)$, neboť $eH = He$

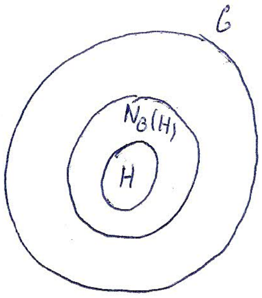
IV.) $\forall a \in N_G(H)$ : $aH = Ha \Rightarrow a^{-1}aH = a^{-1}Ha$

$$H = a^{-1}Ha \quad / \cdot a^{-1}$$

$$Ha^{-1} = a^{-1}H \quad \Rightarrow a^{-1} \in N_G(H)$$

**Věta:** Nechť $(H,\cdot)$ je podgrupa grupy $(G,\cdot)$ a $(N_G(H),\cdot)$ její normalizátor. Potom $(H,\cdot)$ je normální podgrupa grupy $(N_G(H),\cdot)$.

Důkaz: Plyne přímo z definice:




1.) $H \subseteq N_G(H)$, neboť $\forall h \in H$: $hH = H = Hh$

2.) $(H,\cdot)$ je podgrupa $(G,\cdot) \Rightarrow$ je to grupa.

□

**Důsledek:** $\left(N_G(H)/H, \cdot\right)$ je grupa