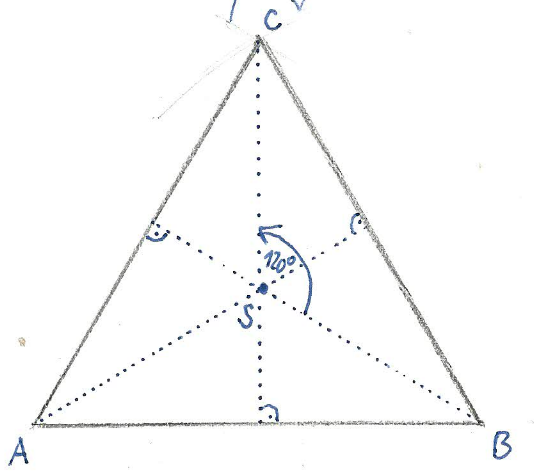
Grupa symetrií rovnostranného △



Symetrií △ABC nazveme bijektivní zobrazení

$$f: \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$$

Množinu všech těchto symetrií označme G. Jejich celkem 3!

$$\underbrace{R_0 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}}_{\text{3 pevné body}}, \quad \underbrace{R_{120} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \quad R_{240} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}}_{\text{0 pevných bodů}}, \quad \underbrace{Z_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \quad Z_B = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \quad Z_C = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}}_{\text{1 pevný bod}}$$

$$\boxed{G = \{R_0, R_{120}, R_{240}, Z_A, Z_B, Z_C\}}$$

Př 1. Dokažte, že $(G, \circ)$, kde $\circ$ je operace skládání zobrazení je grupa.

$\circ$	R_0	R_{120}	R_{240}	Z_A	Z_B	Z_C
R_0	R_0	R_{120}	R_{240}	Z_A	Z_B	Z_C
R_{120}	R_{120}	R_{240}	R_0	Z_C	Z_A	Z_B
R_{240}	R_{240}	R_0	R_{120}	Z_B	Z_C	Z_A
Z_A	Z_A	Z_B	Z_C	R_0	R_{120}	R_{240}
Z_B	Z_B	Z_C	Z_A	R_{240}	R_0	R_{120}
Z_C	Z_C	Z_A	Z_B	R_{120}	R_{240}	R_0

$$R_0 \circ R_{120} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ B & C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = R_{120}$$

$$R_{120} \circ R_0 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = R_{120}$$

$$R_{120} \circ R_{120} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix} = R_{240} = R_{(120+120)}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{120} \circ Z_A &= \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \\ B & A & C \end{pmatrix} = Z_C \\ Z_A \circ R_{120} &= \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & B & A \end{pmatrix} = Z_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\circ \text{ není komutativní!}}$$

⋮

$\Rightarrow$ 1.) Uzavřenost: splněno – viz tabulka

2.) Asociativita: splněno – skládání zobrazení je asociativní

3.) Neutrální prvek: $e = R_0$

4.) Inverzní prvky: $(R_0)^{-1} = R_0$, $(R_{120})^{-1} = R_{240}$, $(R_{240})^{-1} = R_{120}$, $(Z_A)^{-1} = Z_A$, $(Z_B)^{-1} = Z_B$, $(Z_C)^{-1} = Z_C$

$\Rightarrow$ $(G, \circ)$ je grupa

Př 2. Nalezněte všechny podgrupy grupy $(G, \circ)$

1.) Jednoprvkové : $H_1 = \{e\} = \{R_0\}$ $\Rightarrow$ $(H_1, \circ)$ je podgrupa

2.) Dvouprvkové : Jedná se o konečnou podgrupu $\Rightarrow$ stačí ověřit uzavřenost :

$(\{R_0, R_{120}\}, \circ)$ není podgrupa : $R_{120} \circ R_{120} = R_{240}$

$(\{R_0, R_{240}\}, \circ)$ není podgrupa : $R_{240} \circ R_{240} = R_{120}$

$(H_2, \circ) = (\{R_0, Z_A\}, \circ)$ je podgrupa : $Z_A \circ Z_A = \cancel{Z_A}\ R_0$

$(H_3, \circ) = (\{R_0, Z_B\}, \circ)$ je podgrupa : $Z_B \circ Z_B = R_0$

$(H_4, \circ) = (\{R_0, Z_C\}, \circ)$ je podgrupa : $Z_C \circ Z_C = R_0$

Jiné dvouprvkové podgrupy nejsou (v každé musí být $e = R_0$)

3.) Trojprvkové :

$(H_5, \circ) = (\{R_0, R_{120}, R_{240}\}, \circ)$ je podgrupa (viz. tabulka operace $\circ$)

$(\{R_0, R_{120}, \underset{\neq R_{240}}{X}\}, \circ)$ není podgrupa (viz. tabulka operace $\circ$)

$(\{R_0, R_{240}, \underset{\neq R_{120}}{X}\}, \circ)$ není podgrupa (viz. tabulka operace $\circ$)

$(\{R_0, Z_A, X\}, \circ)$ není podgrupa (—— " ——)

nesmí tu být R_{120}, R_{240} – podle předchozího

$(\{R_0, Z_B, X\}, \circ)$ není podgrupa

$(\{R_0, Z_C, X\}, \circ)$ není podgrupa

4.) čtyřprvkové + pětiprvkové : neexistují : řád podgrupy musí dělit řád grupy $\sim 4 \nmid 6 \wedge 5 \nmid 6$

5.) Šestiprvkové

$H_6 = (\{R_0, R_{120}, R_{240}, Z_A, Z_B, Z_C\}, \circ) = (G, \circ)$ je podgrupa

Př 3. Určete rozklady G/H_1, G/H_2, G/H_3, G/H_4, G/H_5, G/H_6.

1.) $\boxed{H_1 = \{R_0\}}$ =>

$R_0 \circ H_1 = H_1 = \{R_0\}$

$R_{120} \circ H_1 = \{R_{120} \circ R_0\} = \{R_{120}\}$

$\vdots$

$Z_C \circ H_1 = \{Z_C \circ R_0\} = \{Z_C\}$

=> $G/H_1 = \{\{R_0\}, \{R_{120}\}, \{R_{240}\}, \{Z_A\}, \{Z_B\}, \{Z_C\}\}$

2.) $\boxed{H_2 = \{R_0, Z_A\}}$

$R_0 \circ \{R_0, Z_A\} = \{R_0, Z_A\}$

$R_{120} \circ \{R_0, Z_A\} = \{R_{120}, Z_C\}$

$R_{240} \circ \{R_0, Z_A\} = \{R_{240}, Z_B\}$

$Z_A \circ \{R_0, Z_A\} = \{Z_A, R_0\}$

$Z_B \circ \{R_0, Z_A\} = \{Z_B, R_{240}\}$

$Z_C \circ \{R_0, Z_A\} = \{Z_C, R_{120}\}$

=> $G/H_2 = \{\{R_0, Z_A\}, \{R_{120}, Z_C\}, \{R_{240}, Z_B\}\}$

3.) $\boxed{H_3 = \{R_0, Z_B\}}$

=> $G/H_3 = \{\{R_0, Z_B\}, \{R_{120}, Z_A\}; \{R_{240}, Z_C\}\}$

třídy rozkladu:

$\{R_0, Z_B\}$

$\{R_{120}, Z_A\}$

$\{R_{240}, Z_C\}$

$\{Z_A, R_{120}\}$

$\{Z_B, R_0\}$

$\{Z_C, R_{240}\}$

1. sl. „R_0" 5. sl. „Z_B"

4.) $\boxed{H_4 = \{R_0, Z_C\}}$ třídy rozkladu:

=> $G/H_4 = \{\{R_0, Z_C\}, \{R_{120}, Z_B\}, \{R_{240}, Z_A\}\}$

$\{R_0, Z_C\}$

$\{R_{120}, Z_B\}$

$\{R_{240}, Z_A\}$

$\{Z_A, R_{240}\}$

$\{Z_B, R_{120}\}$

$\{Z_C, R_0\}$

1. sl. „R_0" 6. sl. „Z_C"

5.) $H_5 = \{R_0, R_{120}, R_{240}\} \Rightarrow$

rozklady:
$$\left.\begin{array}{l}
\{R_0, R_{120}, R_{240}\} \\
\{R_{120}, R_{240}, R_0\} \\
\{R_{240}, R_0, R_{120}\} \\
\{Z_A, Z_B, Z_C\} \\
\{Z_B, Z_C, Z_A\} \\
\{Z_C, Z_A, Z_B\}
\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{G/H_5 = \{\{R_0, R_{120}, R_{240}\}, \{Z_A, Z_B, Z_C\}\}}}$$

6.) $H_6 = G = \{R_0, R_{120}, R_{240}, Z_A, Z_B, Z_C\}$

rozklady $\{ \quad \}$

⋮

další už nemusíme tvořit už teď máme všechny prvky z G

$$\Rightarrow \underline{\underline{G/H_6 = G/G = \{\{R_0, R_{120}, R_{240}, Z_A, Z_B, Z_C\}\}}}$$

Př. 4 Rozhodněte, které z podgrup grupy $(G,\circ)$ jsou normální.

1.) $\boxed{(H_1,\circ)}$ $\quad \forall x \in G: \quad x \circ H_1 = x \circ \{R_0\} = \{x \circ R_0\} = \{R_0 \circ x\} = \{R_0\} \circ x = H_1 \circ x$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{(H_1,\circ) \text{ je normální podgrupa grupy } (G,\circ)}}$ $\quad (\Rightarrow \underline{(G/H_1,\circ) \text{ je grupa}})$

2.) $\boxed{(H_2,\circ)}$ $\quad H_2 = \{R_0, Z_A\} \Rightarrow$

$R_0 \circ H_2$	$= \{R_0, Z_A\}$	$=$	$H_2 \circ R_0 = \{R_0 \circ R_0, Z_A \circ R_0\}$	$= \{R_0, Z_A\}$
$R_{120} \circ H_2$	$= \{R_{120}, Z_C\}$	$\neq$	$H_2 \circ R_{120} = \{R_0 \circ R_{120}, Z_A \circ R_{120}\}$	$= \{R_{120}, Z_B\}$
$R_{240} \circ H_2$	$= \{R_{240}, Z_B\}$	$\neq$	⋮	$= \{R_{240}, Z_C\}$
$Z_A \circ H_2$	$= \{Z_A, R_0\}$	$=$	⋮	$= \{Z_A, R_0\}$
$Z_B \circ H_2$	$= \{Z_B, R_{240}\}$	$\neq$		$= \{Z_B, R_{120}\}$
$Z_C \circ H_2$	$= \{Z_C, R_{120}\}$	$\neq$		$= \{Z_C, R_{240}\}$
	1.sl. „R_0" 4.sl. „Z_A"			1.řádek „R_0" 4.řádek „Z_A"

např. $R_{120} \circ H_2 \neq H_2 \circ R_{120}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{(H_2,\circ) \text{ není normální podgrupa}}}$ (je $(G/H_2,\circ)$ grupa?)

$$\left(\begin{array}{ll}
R_{120} \circ H_2 = Z_C \circ H_2 & \text{ale: } (R_{120} \circ H_2) \circ (R_{240} \circ H_2) = (R_{120} \circ R_{240}) \circ H_2 = R_0 \circ H_2 = H_2 \\
R_{240} \circ H_2 = Z_B \circ H_2 & \qquad\qquad \| \\
 & \phantom{\text{ale: }} (Z_C \circ H_2) \circ (Z_B \circ H_2) = (Z_C \circ Z_B) \circ H_2 = R_{240} \circ H_2 \neq H_2 \\
 & \Rightarrow \circ : G/H_2 \times G/H_2 \to G/H_2 \text{ není zobrazení} \Rightarrow (G/H_2,\circ) \text{ není grupa.}
\end{array}\right)$$

3.) $\boxed{(H_3,\circ)}$ $\quad H_3=\{R_0, Z_B\}$

$$\begin{array}{lcl}
\underline{x\circ H_3:} & & \underline{H_3\circ x:} \\
R_0\circ H_3=\{R_0, Z_B\} & = & H_3\circ R_0=\{R_0, Z_B\} \\
R_{120}\circ H_3=\{R_{120}, Z_A\} & \neq & H_3\circ R_{120}=\{R_{120}, Z_C\} \\
R_{240}\circ H_3=\{R_{240}, Z_C\} & \neq & H_3\circ R_{240}=\{R_{240}, Z_A\} \\
Z_A\circ H_3=\{Z_A, R_{120}\} & \neq & H_3\circ Z_A=\{Z_A, R_{240}\} \\
Z_B\circ H_3=\{Z_B, R_0\} & = & H_3\circ Z_B=\{Z_B, R_0\} \\
Z_C\circ H_3=\{Z_C, R_{240}\} & \neq & H_3\circ Z_C=\{Z_C, R_{120}\}
\end{array}$$

Sl. „R_0" Sl. „Z_B" řádek „R_0"

$\Rightarrow$ $(H_3,\circ)$ není normální podgrupa grupy $(G,\circ)$

4.) $\boxed{(H_4,\circ)}$ $\quad H_4=\{R_0, Z_C\}$

$$\begin{array}{lcl}
\underline{x\circ H_4} & & \underline{H_4\circ x} \\
R_0\circ H_4=\{R_0, Z_C\} & = & H_4\circ R_0=\{R_0, Z_C\} \\
R_{120}\circ H_4=\{R_{120}, Z_B\} & \neq & H_4\circ R_{120}=\{R_{120}, Z_A\} \\
R_{240}\circ H_4=\{R_{240}, Z_A\} & \neq & H_4\circ R_{240}=\{R_{240}, Z_B\} \\
Z_A\circ H_4=\{Z_A, R_{240}\} & \neq & H_4\circ Z_A=\{Z_A, R_{120}\} \\
Z_B\circ H_4=\{Z_B, R_{120}\} & \neq & H_4\circ Z_B=\{Z_B, R_{240}\} \\
Z_C\circ H_4=\{Z_C, R_0\} & = & H_4\circ Z_C=\{Z_C, R_0\}
\end{array}$$

Sl. „R_0" Sl. „Z_C" Řádek „R_0" Řádek „Z_C"

$\Rightarrow$ $(H_4,\circ)$ není normální podgrupa grupy $(G,\circ)$

5.) $\boxed{(H_5,\circ)}$ $\quad H_5=\{R_0, R_{120}, R_{240}\}$

$$\begin{array}{lcl}
\underline{x\circ H_5} & & \underline{H_5\circ x} \\
R_0\circ H_5=\{R_0, R_{120}, R_{240}\} & = & H_5\circ R_0=\{R_0, R_{120}, R_{240}\} \\
R_{120}\circ H_5=\{R_{120}, R_{240}, R_0\} & = & H_5\circ R_{120}=\{R_{120}, R_{240}, R_0\} \\
R_{240}\circ H_5=\{R_{240}, R_0, R_{120}\} & = & H_5\circ R_{240}=\{R_{240}, R_0, R_{120}\} \\
Z_A\circ H_5=\{Z_A, Z_B, Z_C\} & = & H_5\circ Z_A=\{Z_A, Z_C, Z_B\} \\
Z_B\circ H_5=\{Z_B, Z_C, Z_A\} & = & H_5\circ Z_B=\{Z_B, Z_A, Z_C\} \\
Z_C\circ H_5=\{Z_C, Z_A, Z_B\} & = & H_5\circ Z_C=\{Z_C, Z_B, Z_A\}
\end{array}$$

Sl. „R_0" Sl. „R_{120}" Sl. „R_{240}" Řádek „R_0" Řádek „R_{120}" Řádek „R_{240}"

$\Rightarrow$ $(H_5,\circ)$ je normální podgrupa grupy $(G,\circ)$

$\Downarrow$

$(G/H_5,\circ)$ je grupa!

6.) $\boxed{(H_6,\circ)}$ $\quad H_6=G$

$\forall x\in G$: $\quad x\circ G=G=G\circ x$ $\quad\Rightarrow$ $(G,\circ)$ je normální podgrupa grupy $(G,\circ)$ $\Rightarrow$ $(G/G,\circ)$ je grupa!

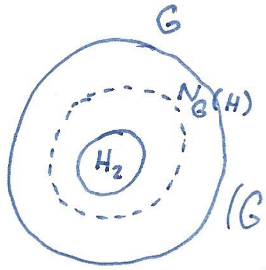
Př. 5. Nalezněte normalizátory podgrup $(H_2, \circ)$, $(H_3, \circ)$ a $(H_4, \circ)$.

normalizátor podgrupy H je : $N_G(H) = \{ g \in G \mid gH = Hg \}$ $\Rightarrow$

1.) $N_G(H_2) = \{R_0, Z_A\} = \underline{\underline{H_2}}$

2.) $N_G(H_3) = \{R_0, Z_B\} = \underline{\underline{H_3}}$

3.) $N_G(H_4) = \{R_0, Z_C\} = \underline{\underline{H_4}}$



$(G : H_2) = |G/H_2| = 3$ = prvočíslo

$\Rightarrow$ $N_G(H) = G$, nebo $N_G(H) = H$

ale H není normální $\Rightarrow$ $N_G(H) \neq G$

$\Rightarrow$ muselo vyjít $N_G(H) = H$!!!

Př. 6: Určete tabulku operace $\circ$ na grupě $(G/H_5, \circ)$

$$G/H_5 = \{ \{\underbrace{R_0, R_{120}, R_{240}}_{\text{rotace}}\}, \{\underbrace{Z_A, Z_B, Z_C}_{\text{zrcadlení}}\} \} = \{R_0 \circ H_5, Z_A \circ H_5\} = \{R, Z\}$$

$\circ$	R	Z
R	R	Z
Z	Z	R

$R \circ R = (R_0 \circ H_5) \circ (R_0 \circ H_5) = (R_0 \circ R_0) \circ H_5 = R_0 \circ H_5 = R$

$R \circ Z = (R_0 \circ H_5) \circ (Z_A \circ H_5) = (R_0 \circ Z_A) \circ H_5 = Z_A \circ H_5 = Z$

$Z \circ R = (Z_A \circ H_5) \circ (R_0 \circ H_5) = (Z_A \circ R_0) \circ H_5 = Z_A \circ H_5 = Z$

$Z \circ Z = (Z_A \circ H_5) \circ (Z_A \circ H_5) = (Z_A \circ Z_A) \circ H_5 = R_0 \circ H_5 = R$

$\Rightarrow$ Složení dvou rotací je rotace

$\Rightarrow$ Složení zrcadlení a rotace v jakémkoli pořadí je zrcadlení

$\Rightarrow$ Složení dvou zrcadlení je rotace

Toto je „účel" tvoření faktorových grup – jsou „jednodušší", „menší" a zachovávají některé informace o struktuře původní grupy.
(Podobně jako statistické údaje průměr, rozptyl, ... charakterizují naměřené hodnoty)