Homomorfismy grup

Def. (Homomorfismus): Nechť $(G_1, *)$ a $(G_2, \circ)$ jsou grupy. Zobrazení f množiny G do množiny G nazveme homomorfismem grupy G_1 do G_2 právě tehdy, když $\forall a, b \in G$:

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

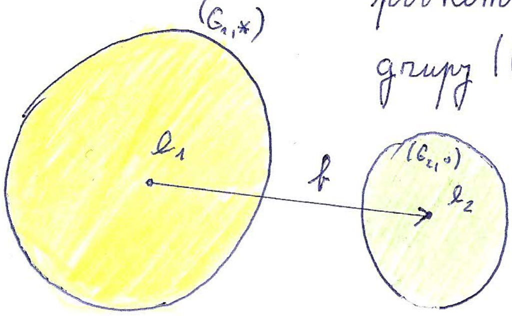
Příklad: Uvažujme zobrazení $f : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ dané předpisem $f(x) = \ln x$.

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$: $\quad f(a \cdot b) = \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\Rightarrow f$ je homomorfismus grupy $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ do grupy $(\mathbb{R}, +)$.

Věta: Nechť e_1 je neutrálním prvkem grupy $(G_1, *)$ a e_2 je neutrálním prvkem grupy $(G_2, \circ)$, potom každý homomorfismus f grupy $(G_1, *)$ do $(G_2, \circ)$ zobrazí e_1 na e_2. Tzn.:

$$f(e_1) = e_2$$



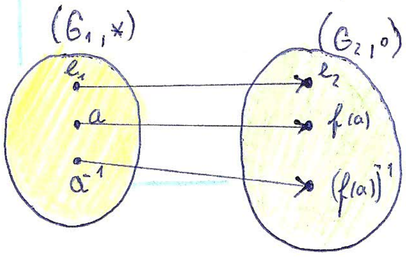
D: $f : G_1 \to G_2$ je homomorfismus G_1 do G_2 $\Rightarrow$ $\forall a \in G_1$: $\left.\begin{array}{l} f(a) = f(a * e_1) = f(a) \circ f(e_1) \\ \text{(věta o krácení v grupě)} \end{array}\right\} \Rightarrow f(e_1) = e_2$ $\square$

Příklad: Homomorfismus $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ daný předpisem: $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) = \ln x$ splňuje

$$f(1) = 0$$

a opravdu 1 je neutrálním prvkem v $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ a 0 je neutrálním prvkem v $(\mathbb{R}, +)$.

Věta: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1, *)$ do $(G_2, \circ)$.
Potom $\forall a \in G$:



$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

Důkaz: f je homomorfismus $(G, *)$ do $(G, \circ)$, proto $\forall f(a) \in G_2$:

$$\left.\begin{aligned} f(a) \circ f(a^{-1}) &= f(a * a^{-1}) = f(e_{G_1}) = e_{G_2} \\ f(a^{-1}) \circ f(a) &= f(a^{-1} * a) = f(e_{G_1}) = e_{G_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

$\square$

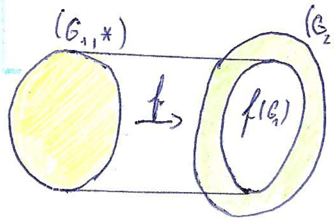
Příklad: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, kde $\forall a \in \mathbb{R}^+$: $f(a) = \log_2 a$ je homomorfismus $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ do $(\mathbb{R}, +)$

$$f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$
$$f(\tfrac{1}{4}) = \log_2 \tfrac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

značí inverzní prvek!

a opravdu v $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ je $4^{-1} = \frac{1}{4}$ a v $(\mathbb{R}, +)$ je $2^{-1} = -2$.

Věta: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1, *)$ do $(G_2, \circ)$. Označme $f(G_1) = \{ f(a) \mid a \in G_1 \}$. Potom $(f(G_1), \circ)$ je podgrupou $(G_2, \circ)$.



Důkaz: 1.) $f(G_1) \subseteq G_2$

2.) I.) $\forall f(a), f(b) \in f(G_1)$: $f(a) \circ f(b) = f(\underbrace{a * b}_{\in G_1}) \in f(G_1)$

II.) asociat. na $f(G_1)$ plyne z asociativn. operace $\circ$ na G_2.

III.) $e_{G_2} = f(e_{G_1}) \in f(G_1)$

IV.) $\forall f(a) \in f(G_1)$: $(f(a))^{-1} = f(a^{-1}) \in f(G_1)$

$\square$

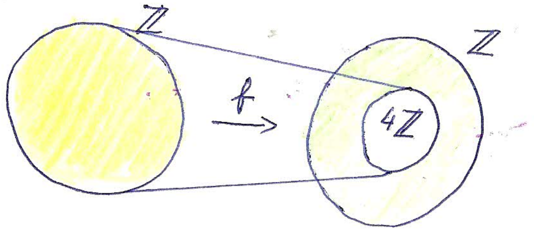
Příklad: Uvažujme zobrazení $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kde $\forall k \in \mathbb{Z}: f(k) = 4k$.

f je homomorfismus $(\mathbb{Z},+)$ do $(\mathbb{Z},+)$:

$\forall a,b \in \mathbb{Z}: \quad f(a+b) = 4(a+b) = 4a + 4b = f(a) + f(b)$

$f(\mathbb{Z}) = \{ f(k) \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ 4k \mid k \in \mathbb{Z} \} = 4\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad (4\mathbb{Z},+)$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Z},+)$:



a opravdu: 1.) $4\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

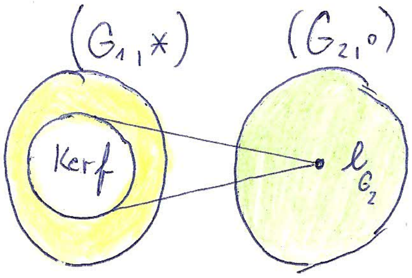
2.) I.) $\forall 4a, 4b \in 4\mathbb{Z}: \quad 4a+4b = 4(a+b) \in 4\mathbb{Z}$

II.) $\forall 4a, 4b, 4c \in 4\mathbb{Z}: \quad 4a + (4b+4c) = (4a+4b)+4c$

III.) $0 = 4 \cdot 0 \in 4\mathbb{Z}$

IV.) $\forall 4a \in 4\mathbb{Z} \quad : -(4a) = 4(-a) \in 4\mathbb{Z}$

Def (Jádro homomorfismu): Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1,*)$ do $(G_2,\circ)$ a e_{G_2} je neutrální prvek v $(G_2,\circ)$. Jádrem homomorfismu f nazveme množinu



$$\mathrm{Ker}\, f = \{ x \in G_1 \mid f(x) = e_{G_2} \}$$

Věta: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1,*)$ do $(G_2,\circ)$. Potom $(\mathrm{Ker}\, f, *)$ je normální podgrupa grupy $(G_1,*)$.

Důkaz: I.) uzavřenost: $\forall a,b \in \mathrm{Ker}\, f$: $\left.\begin{array}{l} f(a) = e_{G_2} \\ f(b) = e_{G_2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(a*b) = f(a)\circ f(b) = e_{G_2}\circ e_{G_2} = e_{G_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a*b \in \mathrm{Ker}\, f$

II.) asociativita: Plyne z asociativity operace na $(G_1,*)$.

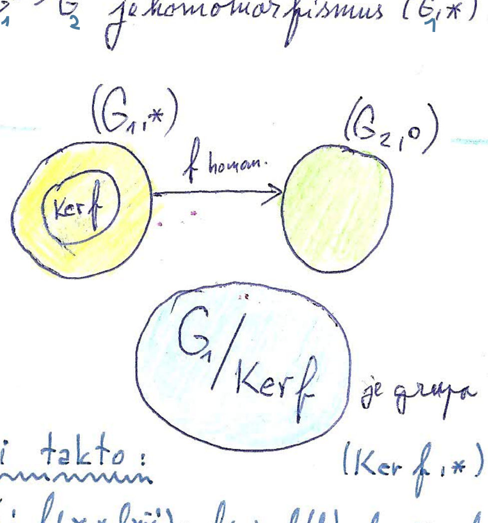
III.) neutrální prvek: $f(e_{G_1}) = e_{G_2} \Rightarrow e_{G_1} \in \mathrm{Ker}\, f$

IV.) inverzní prvek: $\forall a \in \mathrm{Ker}\, f$: $f(a^{-1}) = (\underset{\in \mathrm{Ker} f}{f(a)})^{-1} = (e_{G_2})^{-1} = e_{G_2} \Rightarrow a^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$

V.) normálnost: $\forall x \in G$: $x*h \in x*\mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(x*h) = f(x)\circ e_{G_2} = f(x) = e_{G_2}\circ f(x) = f(h*x) \Leftrightarrow h*x \in \mathrm{Ker} f * x$ $\Box$

$\Rightarrow x*\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}\, f * x$

Důsledek: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus $(G_1,*)$ do $(G_2,\circ)$ potom $(G_1/_{\mathrm{Ker} f}, *)$ je grupa.



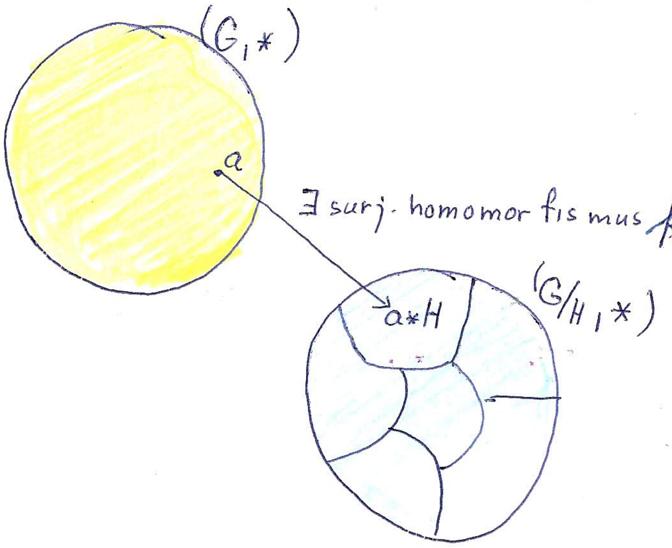
→ Normálnost lze ukázat i takto: $(\mathrm{Ker}\, f, *)$ je normální $\Leftrightarrow \forall x \in G_1\ \forall h \in \mathrm{Ker} f: x*h*x^{-1} \in \mathrm{Ker} f$

(dokázáno dříve) a skutečně: $f(x*h*x^{-1}) = f(x)\circ f(h)\circ f(x^{-1}) = f(x)\circ e_{G_2}\circ (f(x))^{-1} = e_{G_2} \Rightarrow x*h*x^{-1} \in \mathrm{Ker} f$ $\Box$

Věta: Nechť $(G,*)$ je grupa a $(H,*)$ její normální podgrupa. Potom zobrazení $k: G \to G/H$ kde $\forall a \in G$:

$$k(a) = a * H$$

je surjektivní homomorfismus grupy $(G,*)$ na $(G/H,*)$.



$\exists$ surj. homomorfismus $k: G \to G/H$:= „Kanonický homom." $(G,*)$ na $(G/H,*)$.

Důkaz: k je homomorfismus:

$\forall a,b \in G: k(a*b) = (a*b)*H =$

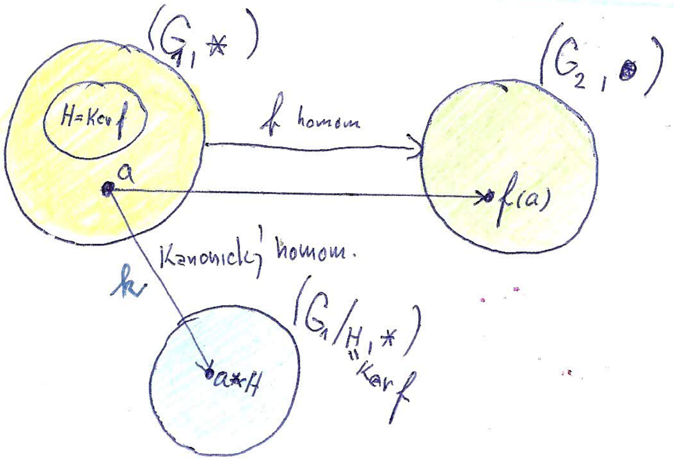
$= (a*H)*(b*H) = k(a) * k(b)$

k je surjektivní zobrazení:

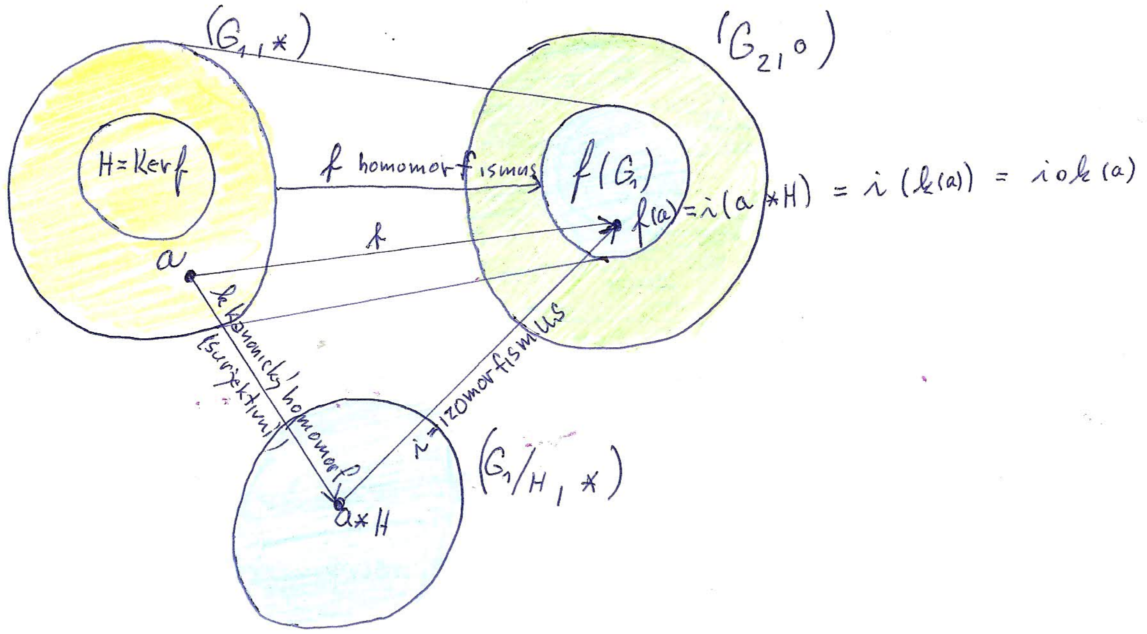
$\forall a*H \in G/H \ \exists a \in G: k(a) = a*H$

$\square$

Důsledek: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1,*)$ do $(G_2,\circ)$. Potom existuje surjektivní homomorfismus $(G_1,*)$ do $(G_1/\mathrm{Ker} f,*)$ (Neboť $(\mathrm{Ker} f,*)$ je normální podgrupa grupy $(G_1,*)$)



Věta: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grup $(G_1, *)$ do $(G_2, \circ)$. Potom existuje bijektivní homomorfismus (izomorfismus) grup $(G_1/_{Ker f}, *)$ na grupu $(f(G_1), \circ)$.



Důkaz: Dokážeme, že zobrazení $i: G_1/_H \to f(G_1)$ dané předpisem:

$$\forall a*H \in G_1/_H : \quad i(a*H) = f(a) \qquad (H = Ker f)$$

je izomorfismus.

1.) Korektnost definice i: Musíme ukázat, že jde opravdu o zobrazení:

$$a_1*H = a_2*H \iff a_1 = a_2*h, \text{ kde } h \in H \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i(a_1*H) = f(a_1) = f(a_2*h) = f(a_2) \circ f(\underset{\in Ker f}{h}) = f(a_2) = i(a_2*H)$$

Tzn.: jediný vzor nemůže mít více různých obrazů.

2.) i je homomorfismus: $\forall a*H, b*H \in G_1/_H$: $i((a*H)*(b*H)) = i((a*b)*H) = f(a*b) =$
$= f(a) \circ f(b) = i(a*H) \circ i(b*H)$

3.) i je injektivní: Předpokládejme $i(a*H) = i(b*H) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(a)(f(b))^{-1} = e_{G_2} \Rightarrow f(a) f(b^{-1}) = e_{G_2} \Rightarrow f(a*b^{-1}) = e_{G_2}$$
$$\Rightarrow a*b^{-1} \in Ker f = H \Rightarrow (a*b^{-1}) * \underset{\uparrow \text{je normální}}{H} = H \Rightarrow a*H*b^{-1} = H \Rightarrow a*H = H*b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a*H = b*H$$

4.) i je surjektivní: $\forall f(a) \in f(G_1) \quad \exists a*H \in G_1/_H : \quad i(a*H) = f(a)$

$\square$