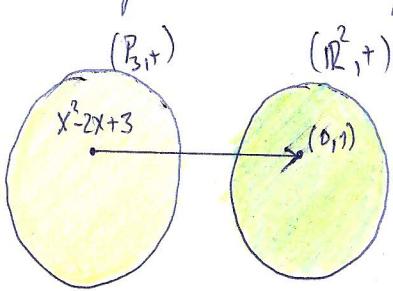


Př: Necht' $P_3 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ a $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

Potom $(P_3, +)$ a $(\mathbb{R}^2, +)$, kde $+$ je obvyklé sčítání na P_3 respektive na $\mathbb{R}^2$, jsou grupy. Ověřte, zda zobrazení $f: P_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je homomorfismus.

a) $f(ax^2+bx+c) = (2a+b, b+c)$

$$\begin{aligned} f(a_1x^2+b_1x+c_1) + f(a_2x^2+b_2x+c_2) &= (2a_1+b_1, b_1+c_1) + (2a_2+b_2, b_2+c_2) = \\ &= (2(a_1+a_2) + (b_1+b_2), (b_1+b_2) + (c_1+c_2)) = \\ &= f((a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)) = \\ &= f((a_1x^2+b_1x+c_1) + (a_2x^2+b_2x+c_2)) \end{aligned}$$


$\Rightarrow f$ je homomorfismus

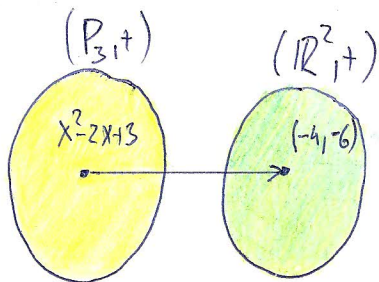
b) $f(ax^2+bx+c) = (2ab, bc)$

$$f(x^2+x+1) = (2, 1)$$

$$f(0x^2+0x+3) = (0, 0)$$

$$f((x^2+x+1) + (0x^2+0x+3)) = f(x^2+x+3) = (2, 3)$$

$$(2, 1) + (0, 0) \neq (2, 3) \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ není homomorfismus}}}$$

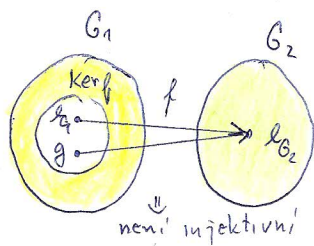


Pr. Dokážte, že homomorfizmus f grup $(G_1, *)$ do grup $(G_2, \circ)$ je injektívny práve tehdy, když $\text{Ker } f = \{e_1\}$.

Důkaz: $\boxed{\Rightarrow}$

Dokážeme tvrzení obměněné. tj.: jestliže $\text{Ker } f \neq \{e_1\}$, pak f není injektívny.

$$\text{Ker } f \neq \{e_1\} \Rightarrow \exists g \in \text{Ker } f : g \neq e_1 \Rightarrow$$



$$\left. \begin{array}{l} f(g) = e_2 \\ f(e_1) = e_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(g) = f(e_1), \text{ ale } e_1 \neq g \Rightarrow f \text{ není injektivní!}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

Předpokládejme $\text{Ker } f = \{e_1\}$. Pakom $\forall x_1, x_2 \in G$ platí:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$f(x_1) f(x_2)^{-1} = e_2$$

$$f(x_1) \circ f(x_2^{-1}) = e_2$$

$$f(x_1 * x_2^{-1}) = e_2 \Rightarrow x_1 * x_2^{-1} \in \text{Ker } f = \{e_1\} \Rightarrow$$

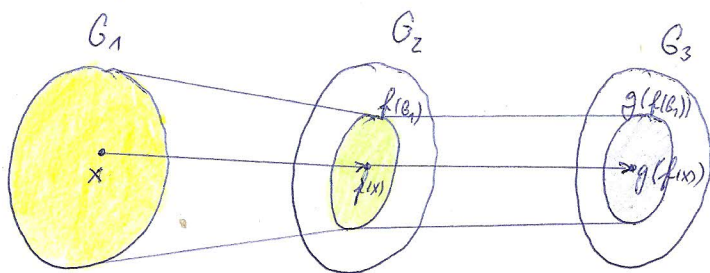
$$x_1 * x_2^{-1} = e_1$$

$$x_1 = e_1 * x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$ f je injektivní zobrazení

P_{min}^v : Necht $f: G_1 \rightarrow G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1, *)$ do $(G_2, \circ)$ a $g: f(G_1) \rightarrow G_3$ je homomorfismus grupy $(f(G_1), \circ)$ do $(G_3, \square)$



Dokážte:

1.) $g \circ f$ je homomorfismus grupy $(G_1, *)$ do $(G_3, \square)$

2.) Jestliže f i g jsou bijekce $\Rightarrow g \circ f$ je bijekce

Důkaz:

ad 1.): $\forall a, b \in G_1$:

$$g \circ f(a * b) = g(f(a * b)) = g(f(a) \circ f(b)) = g(f(a) \circ f(b)) \quad \square \quad g(f(a)) = g \circ f(a) \quad \square \quad g \circ f(b) \\ \Rightarrow \underline{f \circ g} = \underline{\text{je homomorfismus}}$$

ad 2.)

a) Dokažeme, že $f \circ g$ je injektivní:

$$\text{Předpokládejme: } g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \quad / \quad g \text{ je injektivní}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad / \quad f \text{ je injektivní}$$

$$x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \underline{g \circ f \text{ je injektivní}}$$

b) Dokažeme, že $g \circ f$ je surjektivní:

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ je surjektivní} \Rightarrow \forall z \in G_3 \exists y \in f(G_1) = f(G_1) : g(y) = z \\ f \text{ je surjektivní} \Rightarrow \forall y \in f(G_1) \exists x \in G_1 : f(x) = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\forall z \in G_3 \exists x \in G_1 : g(f(x)) = z \quad \Rightarrow \underline{g \circ f \text{ je surjektivní}}$$

Pr. min Uvažujme grupu $(\mathbb{Z}, +)$, kde $+$ je obvyklé sčítání celých čísel a grupu $(G, \oplus)$, kde $G = \{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ a $\oplus$ je dáno tabulkou:

Definujme $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ takto:

$$f(k) = c \Leftrightarrow k = 4k' + c, \text{ kde } k', c \in \mathbb{Z}, c \in \{0, 1, 2, 3\}$$

"zbytek dělení čísla k číslem 4"

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\Rightarrow c_1 \oplus c_2 =$
 I.) $c_1 + c_2$ pokud $c_1 + c_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$
 II.) $c_1 + c_2 - 4$ pokud $c_1 + c_2 > 4$

a) Ukážete, že f je homomorfismem grup $(\mathbb{Z}, +)$ na grupu $(G, \oplus)$.

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : \exists k_1', k_2', c_1, c_2 \in \mathbb{Z}, c_1, c_2 \in \{0, 1, 2, 3\} : k_1 = 4k_1' + c_1, k_2 = 4k_2' + c_2 \Rightarrow$$

$$f(k_1 + k_2) = f(4k_1' + c_1 + 4k_2' + c_2) = f(4k_1' + c_1 + c_2) = \begin{cases} c_1 + c_2 & \text{pokud } c_1 + c_2 \in \{0, 1, 2, 3\} \\ c_1 + c_2 - 4 & \text{pokud } c_1 + c_2 > 4 \end{cases} =$$

$$= c_1 \oplus c_2 = f(k_1) \oplus f(k_2) \Rightarrow f \text{ je homomorfismus}$$

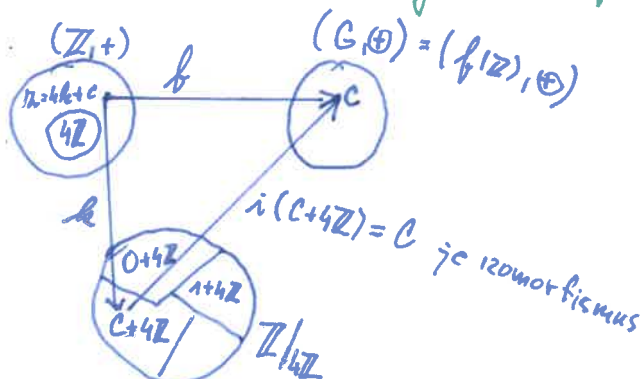
$$\text{Navíc } f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 \Rightarrow f \text{ je surjektivní} \Rightarrow f(\mathbb{Z}) = G$$

b) Nalezněte jádro homomorfismu f .

$$\text{Ker } f = \{k \in \mathbb{Z} \mid f(k) = 0\} = \{4k + 0 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z}$$

c) Ukážete, že $(\mathbb{Z}_4, +) = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ je izomorfní s $(G, \oplus)$

Oběto okamžitě zřejmé izomorfní grupy:



$$\text{Označme } c + 4\mathbb{Z} = \bar{c}_4$$

operace $\rightarrow +$ na $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	$\bar{0}_4$	$\bar{1}_4$	$\bar{2}_4$	$\bar{3}_4$
$\bar{0}_4$	$\bar{0}_4$	$\bar{1}_4$	$\bar{2}_4$	$\bar{3}_4$
$\bar{1}_4$	$\bar{1}_4$	$\bar{2}_4$	$\bar{3}_4$	$\bar{0}_4$
$\bar{2}_4$	$\bar{2}_4$	$\bar{3}_4$	$\bar{0}_4$	$\bar{1}_4$
$\bar{3}_4$	$\bar{3}_4$	$\bar{0}_4$	$\bar{1}_4$	$\bar{2}_4$

Pr. Uvažujme zobrazení $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ dané předpisem:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = |x|$$

1) Dokažte, že f je homomorfismus grup $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ do $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(a) f(b) = |a| \cdot |b| = |a \cdot b| = f(a \cdot b)$$

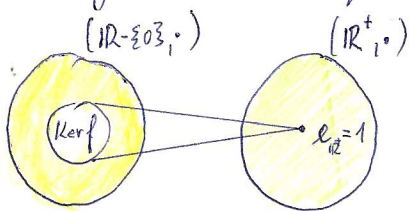
2) Je f surjektivní?

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ : f(y) = |y| = y \Rightarrow \underline{\text{ano, je surjektivní}}$$

3) Je f injektivní?

$$f(-3) = |-3| = 3 = |3| = f(3) \Rightarrow \underline{\text{ne, není injektivní}}$$

4) Určete jádro homomorfismu f .

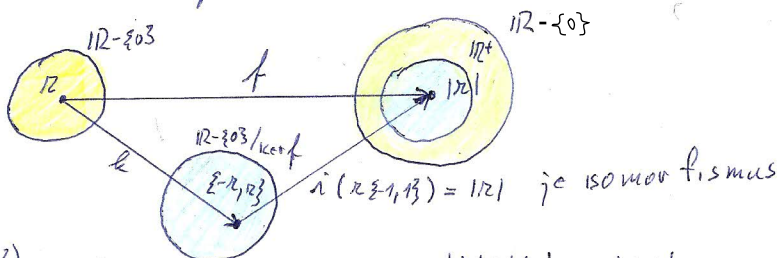


$$\Rightarrow f(x) = |x| = 1 \Leftrightarrow x \in \underline{\underline{\{-1, 1\} = \text{Ker } f}}$$

5) Proveďte rozklad $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ podle $\text{Ker } f$.

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} / \text{Ker } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} / \{-1, 1\} = \{ r \cdot \{-1, 1\} \mid r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \} = \{ \{-r, r\} \mid r \in \mathbb{R} \}$$

6.) Nalezněte isomorfismus $\iota: \mathbb{R} \setminus \{0\} / \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^+$



$\Rightarrow$ Absolutní hodnoty prvků z $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se při násobení "chovejí stejně" jako dvojice $\{-r, r\}$ z $\mathbb{R} \setminus \{0\} / \{-1, 1\}$

Např: $(r \cdot \{-1, 1\}) \cdot \{-1, 1\} = r \cdot \{-1, 1\}$

tzn $\{-r, r\} \cdot \{-1, 1\} = \{-r, r\}$

$$|r| \cdot |s| = |rs|$$

Isomorfismus struktur

O matematických objektech říkáme, že jsou isomorfní pokud mají stejnou strukturu a liší se pouze značením.

