Isomorfismy grup

Př.: Nechť $(G_1, \cdot) = (\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$, kde $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ a $+$ je dáno předpisem:

$$(a_1+ib_1) +_{\mathbb{C}} (a_2 + ib_2) = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$$

sčítání reálných čísel

(tj. $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$ je grupa komplexních čísel s jejich obvyklým sčítáním.)

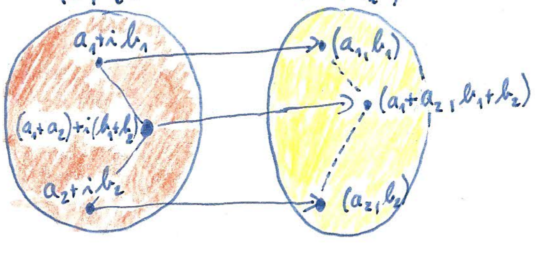
Dále nechť $(G_2, *) = (\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2})$, kde $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ a $+$ je dáno předpisem:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

(tj. $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2})$ je grupa aritmetických vektorů v rovině s jejich obvyklým sčítáním)

Dokažte, že $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$ je isomorfní s grupou $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2})$.

Řešení:



Dokážeme, že zobrazení $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem:

$$f(a+ib) = (a, b)$$

je isomorfismus:

1.) Homomorfismus:

$$f((a_1+ib_1) +_{\mathbb{C}} (a_2+ib_2)) = f((a_1+a_2) + i(b_1+b_2)) = (a_1+a_2, b_1+b_2) =$$
$$= (a_1, b_1) +_{\mathbb{R}^2} (a_2, b_2) = f(a_1+ib_1) + f(a_2+ib_2)$$

2.) Bijekce:

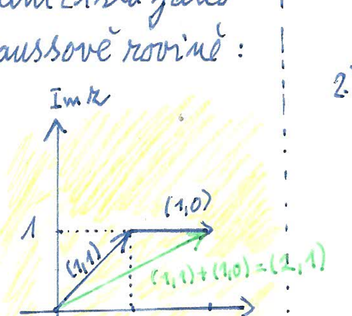
α) injektivní:
$$f(a_1+ib_1) = f(a_2+ib_2)$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$
$$\Downarrow$$
$$a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$
$$\Downarrow$$
$$a_1+ib_1 = a_2+ib_2$$

β) surjektivní: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \; \exists \; a+ib \in \mathbb{C} : f(a+ib) = (a,b)$

$\square$

To nám umožňuje znázorňovat komplexní čísla jako vektory v Gaussově rovině:

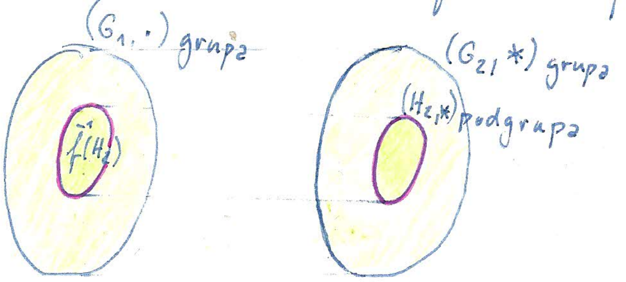
$(1+i) +_{\mathbb{C}} (1+0i) =$
$= 2+i$



Tj: $(1+i) +_{\mathbb{C}} (1+0i) = (2+i)$
$(1,1) +_{\mathbb{R}^2} (1,0) = (2,0)$

jde jen o jiný zápis téhož!

Lema: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1, \cdot)$ do grupy $(G_2, *)$. Nechť $(H_2, *)$ je podgrupa grupy $(G_2, *)$. Jestliže $H_1 = \{x \in G_1 \mid f(x) \in H_2\}$, (značíme $H_1 = f^{-1}(H_2)$), pak $(H_1, \cdot)$ je podgrupa $(G_1, \cdot)$.



Navíc, jestliže $(H_2, *)$ je normální podgrupa $(G_2, *)$, pak $(H_1, \cdot)$ je normální podgrupa $(G_1, \cdot)$.

Důkaz: $H_1 = f^{-1}(H_2)$ je jistě neprázdnou ($f(e_{G_1}) = e_{G_2} \in H_2$) podmnožinou množiny G_1. Stačí tedy dokázat:

1.) Uzavřenost:

$$\forall a, b \in H_1 : \left.\begin{array}{l} f(a) \in H_2 \\ f(b) \in H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a \cdot b) = \underbrace{f(a)}_{\in H_2} * \underbrace{f(b)}_{\in H_2} \in H_2 \Rightarrow a \cdot b \in H_1$$

2.) Asociativita: Plyne z asociativity operace $\cdot$ na $(G_1, \cdot)$.

3.) Neutrální prvek:

$$\left.\begin{array}{l} (H_2, *) \text{ je podgrupa} \Rightarrow e_{G_2} \in H_2 \\ f: G_1 \to G_2 \text{ je homomorf.} \Rightarrow f(e_{G_1}) = e_{G_2} \end{array}\right\} \Rightarrow e_{G_1} \in f^{-1}(H_2) = H_1$$

4.) Inverzní prvky: $\forall a \in H_1 : f(a) \in H_2$; $(H_2, *)$ je grupa $\Rightarrow f(a)^{-1} = f(a^{-1}) \in H_2$ $\Rightarrow a^{-1} \in H_1$

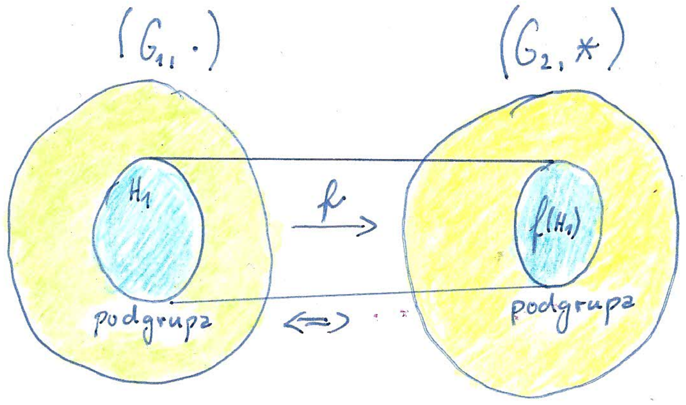
5.) Normalita: $(H_2, *)$ je normální $\Rightarrow \forall f(x) \in G_2 : f(x) * H_2 * f(x^{-1}) = H_2 \Rightarrow$

$$\forall x \in G_1 \; \forall h \in H_1 : f(x h x^{-1}) = f(x) \underbrace{f(h)}_{\in H_2} f(x^{-1}) \in H_2 \Rightarrow$$

$x h x^{-1} \in H_1$ $\Rightarrow H_1$ je normální (viz kritérium normality – dokázáno dříve)

$\square$

Důsledek: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je homomorfismus grupy $(G_1, \cdot)$ do grupy $(G_2, *)$ a $H_1 \subseteq G_1$. Potom $(H_1, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G_1, \cdot)$ právě tehdy, když $(f(H_1), *)$ je podgrupou v $(G_2, *)$.



Důkaz:

$\boxed{\Rightarrow}$ Dříve jsme dokázali, že podgrupa $(H_1, \cdot)$ se při homomorfismu zobrazuje na podgrupu $(f(H_1), *)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Předchozí lema říká, že vzorem podgrupy $(f(H_1), *)$ je jistě podgrupa v $(G_1, \cdot)$, tj. $(H_1, \cdot)$ je podgrupa.

$\square$

Př: Nalezněte nějaký isomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \cdot)$ (násobíme „modulo 7“) a grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ (sčítáme „modulo 7“).

Řešení:

$(G_1, \cdot) = (\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \cdot)$

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Předpokládejme, že f je isomorfismus $\Rightarrow$

Víme, že:

a) $f(1) = 0$

b) Víme, že podgrupa se zobrazí na podgrupu $\Rightarrow$

$\{1, 6\} \to \{0, 3\}$

jediné 2-prvkové podgrupa v G_1 — " — v G_2

víme: $1 \to 0$
$\Downarrow$
$6 \to 3$

$(G_2, +) = (\mathbb{Z}_6, +)$

+	0	2	1	4	5	3
0	0	2	1	4	5	3
2	2	4	3	0	1	5
1	1	3	2	5	0	4
4	4	0	5	2	3	1
5	5	1	0	3	4	2
3	3	5	4	1	2	0

c) Jediná 3-prvková podgrupa v G_1: se musí zobrazit na jedinou 3-prvkovou podgrupu v G_2

$\{1, 2, 4\} \longrightarrow \{0, 2, 4\}$

Víme, že $1 \to 0$, a tak 2 se zobrazí na 2, nebo na 4. Zvolme $2 \to 2$. Potom $4 \to 4$ (kdyby $4 \to 0$, nebo $4 \to 2$, nebyla by to bijekce!)

$\Rightarrow$ Už víme, že $1 \to 0$, $2 \to 2$, $4 \to 4$, $6 \to 3$

d) Určíme $f(3)$: $f(3) = f(6 \cdot 4) = f(6) + f(4) = 3 + 4 = 1 \Rightarrow 3 \to 1$

e) Zbývá určit $f(5)$: $f(5) = f(4 \cdot 3) = f(4) + f(3) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow 5 \to 5$

$\Rightarrow$ f:

$1 \to 0$
$2 \to 2$
$3 \to 1$
$4 \to 4$
$5 \to 5$
$6 \to 3$

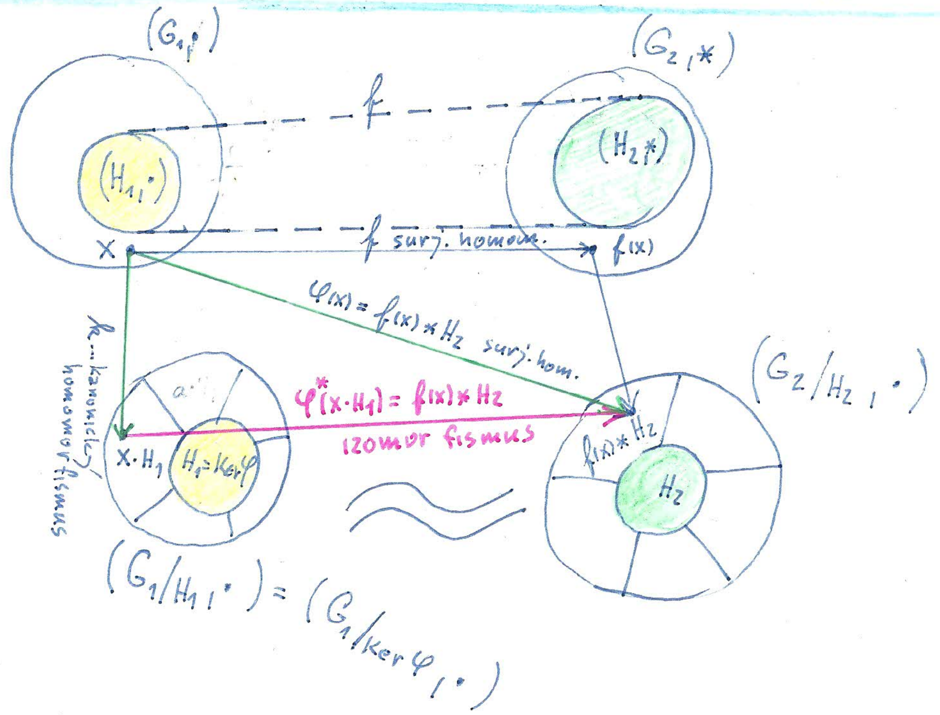
$\Rightarrow$ doplníme do záhlaví tabulky sčítání v $(\mathbb{Z}_6, +)$ v tomto pořadí a vidíme, že $(\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$ jsou skutečně isomorfní

Kdybychom v c) zvolili $2 \to 4$, obdrželi bychom isomorfismus:

f:

$1 \to 0$
$2 \to 4$
$3 \to 5$
$4 \to 2$
$5 \to 1$
$6 \to 3$

Lema: Nechť $f: G_1 \to G_2$ je surjektivní homomorfismus grupy $(G_1, \cdot)$ na grupu $(G_2, *)$ a $(H_2, *)$ je normální podgrupa grupy $(G_2, *)$. Potom $(G_2/H_2, *)$ je izomorfní s $(G_1/f^{-1}(H_2), \cdot)$. Značíme: $G_2/H_2 \cong G_1/f^{-1}(H_2)$



Důkaz: V předchozím jsme viděli, že $H_1 = f^{-1}(H_2)$ je normální podgrupou v G_1, neboť H_2 je normální v G_2.

a) Dokážeme, že $\varphi: G_1 \to G_2/H_2$ dané předpisem: $\forall x \in G_1: \ \varphi(x) = f(x) * H_2$ je surjektivní homomorfismus:

I.) φ je homomorfismus:

$$\forall x, y \in G_1: \ \varphi(x \cdot y) = f(x \cdot y) * H_2 = (f(x) * f(y)) * H_2 =$$
$$= (f(x) * H_2) * (f(y) * H_2) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

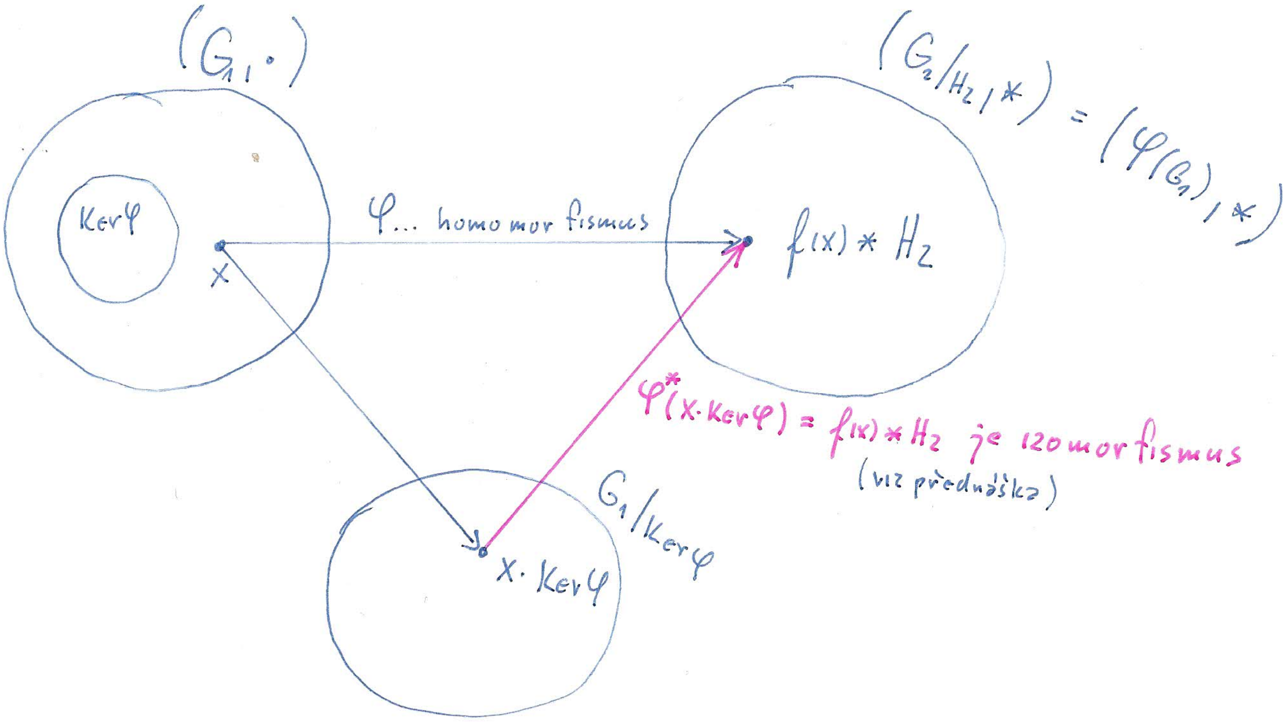
II.) φ je surjektivní: Zobrazení f je surjektivní $\Rightarrow \forall g_2 \in G_2 \ \exists x \in G_1:$
$f(x) = g_2$

$$\Rightarrow \forall g_2 * H_2 \in G_2/H_2 \ \exists x \in G_1 : \ g_2 * H_2 = f(x) * H_2 = \varphi(x)$$

Důsledkem je, že $\varphi(G_1) = G_2/H_2$.

b) Dokážeme, že $\varphi^*: G_1/H_1 \to G_2/H_2$, kde $H_1 = f^{-1}(H_2)$;

dané předpisem $\varphi^*(x \cdot H_1) = f(x) * H_2$ je izomorfismus.



Nejprve určíme jádro zobrazení $\varphi(x) = f(x) * H_2$. Neutrálním prvkem v $(G_2/H_2, *)$ je $e_{G_2} * H_2 = H_2$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ x \in G_1 \mid \varphi(x) = f(x) * H_2 = H_2 \}$$

Rovnost $f(x) * H_2 = H_2$ nastává $\Leftrightarrow$ $f(x) \in H_2$ $\Leftrightarrow$ $x \in f^{-1}(H_2) = H_1$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = H_1$$

Dříve bylo dokázáno, že když $\varphi: G_1 \to G^*$ je izomorfismus, pak $G_1/\mathrm{Ker}\,\varphi$ je izomorfní s $\varphi(G_1)$ a izomorfismem je zobrazení $\varphi^*: G_1/\mathrm{Ker}\,\varphi \to \varphi(G_1)$, kde $\varphi^*(x \cdot \mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(x)$ $\Rightarrow$

V našem případě je $\mathrm{Ker}\,\varphi = H_1$; $\varphi(G_1) = G_2/H_2$; $\varphi(x) = f(x) * H_2$ $\Rightarrow$

$\varphi^*: G_1/H_1 \to G_2/H_2$, kde $\varphi^*(x \cdot H_1) = f(x) * H_2$ je izomorfismus.

$\square$