

Pr: Uvažujme grupu $(\mathbb{Z}_{10}, +)$. Ta je generovaná prvkem 1 řádu 10, neboť

$$\underbrace{10 \cdot 1}_{a^n} = \underbrace{0}_e$$

- 1.) Určete řád všech prvků ze $\mathbb{Z}_{10}$
- 2.) Nalezněte všechny generátory grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$. Overte!
- 3.) Určete jaké řády mohou mít podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.
- 4.) Určete všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$. V každé z nich určete všechny její generátory. Overte!

Řešení: $\mathbb{Z}_{10} = \langle m \cdot 1 \mid m \in \mathbb{Z} \rangle \Rightarrow$ generátor $a=1$

1.) $\langle 1 \rangle = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10=0=\ell\} \Rightarrow |1|=10$

$\langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, 8, 10=0\} \Rightarrow |2|=5$

$\langle 3 \rangle = \{3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 10=0=\ell\} \Rightarrow |3|=10$

$\langle 4 \rangle = \{4, 8, 2, 6, 10=0=\ell\} \Rightarrow |4|=5$

$\langle 5 \rangle = \{5, 10\} \Rightarrow |5|=2$

$\langle 6 \rangle = \{6, 2, 8, 4, 10=0=\ell\} \Rightarrow |6|=5$

$\langle 7 \rangle = \{7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 10=0=\ell\} \Rightarrow |7|=10$

$\langle 8 \rangle = \{8, 6, 4, 2, 10=0=\ell\} \Rightarrow |8|=5$

$\langle 9 \rangle = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 10=0=\ell\} \Rightarrow |9|=10$

$\langle 10 \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$

$|10|=1$

$|a| = \frac{10}{\gcd(10,a)}$ (Věta 5, bod 7.)

2.) $\mathbb{Z}_{10} = \langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle \Rightarrow \mathbb{Z}_{10} = \langle a \rangle \Leftrightarrow \gcd(a, 10)=1$

3.) Podle Lagrangeovy věty řád podgrup musí dělit řád grupy $\Rightarrow$
možné řády podgrup v $\mathbb{Z}_{10}$: 1, 2, 5, 10

Pozn.: Podle Věty 5, bod 6.), existuje právě jedna podgrupa každého řádu
1 tj. řádu k , kde $k \mid 10$

4.) Podgrupy: 1.) Řádu 1 : $\langle 0 \rangle$

3.) Řádu 5 : $\langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 8 \rangle$

2.) Řádu 2 : $\langle 5 \rangle$

4.) Řádu 10 : $\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle$

Pozn. Podle Věty 5, bod 5.) všechny prvky řádu k generují stejnou podgrupu.