

Př. mn. jsou dány permutace $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1.) Určete α^{-1} a β^{-1}

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \alpha \\ \} \alpha^{-1} \end{matrix} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}}}$$

obdobně : $\underline{\underline{\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}}}$

2.) Určete $\alpha \circ \beta$ a $\beta \circ \alpha$

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \beta \\ \} \alpha \end{matrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

$$\beta \circ \alpha = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}}$$

3.) Najděte transpozice, z nichž je možné složit α , resp. β .

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

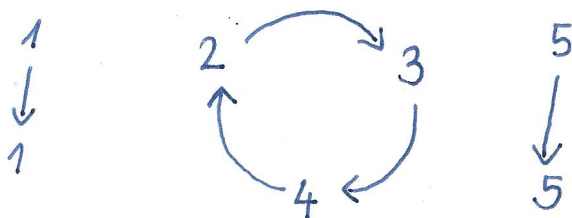
4.) Rozhodněte, zda α , β jsou liché, nebo sudé permutace.

Z 3.) plyne, že α i β jsou sudé permutace, tzn.

$$\underline{\underline{\alpha, \beta \in A_6}}$$

Cykly

Pr: Uvažujme permutaci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Vidíme, že σ „cyklicky“ zaměňuje prvky 2, 3, 4 a ostatní nechává na místě:



Takovou permutaci budeme označovat jako cyklus a budeme značit $\sigma = (2\ 3\ 4)$. Všimněme si, že $(2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 2) = (4\ 2\ 3)$.

Def (Cyklus): Permutaci $\sigma \in S_m$ nazveme cyklem v S_m právě tehdy, když existuje množina $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\} \subseteq I_m$, $m \geq 2$, taková, že $\sigma(r_1) = r_2$, $\sigma(r_2) = r_3$, ..., $\sigma(r_{m-1}) = r_m$, $\sigma(r_m) = r_1$,
a $\forall a \in I_m - R : \sigma(a) = a$.

Značíme $\sigma = (r_1\ r_2\ \dots\ r_m)$, říkáme, že σ je m -cyklus.
(Transpozice je 2-cyklus)

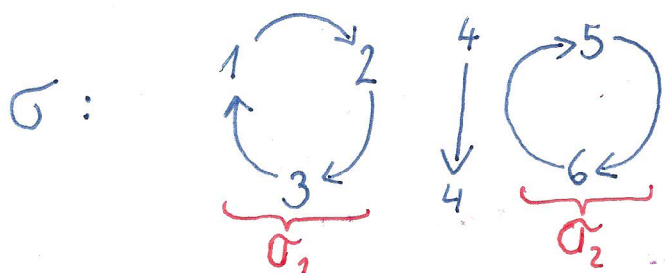
Pr: Uvažujme $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Vidíme, že σ není cyklus, ale:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5\ 6) \circ (1\ 2\ 3) \Rightarrow \text{je složením dvou cyklů.}$$

Def (Disjunktí cyklus): Cyklus $(a_1, a_2, \dots, a_r) \in S_m$ a $(b_1, b_2, \dots, b_s) \in S_m$ jsou disjunktí právě když $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_s\} = \emptyset$.

Pr: Permutace $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5\ 6) \circ (1\ 2\ 3)$ je

složena ze dvou disjunktích cyklů $(5\ 6)$ a $(1\ 2\ 3)$. Všimněme si:



Je zřejmé, že je jedno, zda nejprve provedeme σ_1 a pak σ_2 , nebo naopak $\Rightarrow \sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ a platí to obecně:

Věta: Jestliže jsou cykly σ_1 a σ_2 disjunktí, pak $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Pr: Jsou dány dvojcykly $\tau_1 = (1\ 2)$, $\tau_2 = (2\ 3) \in S_4$. Určete $\tau_1 \circ \tau_2$ a $\tau_2 \circ \tau_1$.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ \underline{2 & 3 & 1 & 4} \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ \underline{3 & 1 & 2 & 4} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \tau_1 \circ \tau_2 \\ \tau_2 \circ \tau_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \tau_1 \circ \tau_2 \neq \tau_2 \circ \tau_1 \quad !!!$$

Věta: Každá permutace $\sigma \in S_m$ -šidž je buď cyklus, nebo je složením vzájemně disjunktích cyklů.

$P_{\min}^v$: Rozložte $\sigma \in S_8$ na disjunktní cykly

a) $\sigma = (2356) \circ (253) = (26)$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 = \sigma(2) \\ 6 \rightarrow 6 \rightarrow 2 = \sigma(6) \\ 5 \rightarrow 3 \rightarrow 5 = \sigma(5) \\ 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 = \sigma(3) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ } \uparrow$$

navíc $\sigma(1) = 1$
 $\sigma(4) = 4$
 $\sigma(7) = 7$

a opravdu: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (26)$

b) $\sigma = (13857) \circ (213) \circ (386) = \underline{\underline{(1862357)}}$

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 8 = \sigma(1) \\ 8 &\rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow 6 = \sigma(8) = \sigma^2(1) \\ 6 &\rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 = \sigma(6) = \sigma^3(1) \\ 2 &\rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 = \sigma(2) = \sigma^4(1) \\ 3 &\rightarrow 8 \rightarrow 8 \rightarrow 5 = \sigma(3) = \sigma^5(1) \\ 5 &\rightarrow 5 \rightarrow 5 \rightarrow 7 = \sigma(5) = \sigma^6(1) \\ 7 &\rightarrow 7 \rightarrow 7 \rightarrow 1 = \sigma(7) = \sigma^7(1) \end{aligned}$$

g) $\sigma = (124) \circ (315) \circ (234567) = \underline{\underline{(156743)}}$

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 1 \\ 2 &\xrightarrow{\sigma} 2 \end{aligned}$$

δ) $\sigma = (314) \circ (241) \circ (315) = \underline{\underline{(15) \circ (23)}}$

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 5 \rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 3 \rightarrow 2 \\ 4 &\rightarrow 4 \end{aligned}$$

Věta: Řád prvku $\sigma \in S_m$, který je složen z disjunktivních cyklů je roven nejmenšímu společnému násobku ^{děleč} těchto cyklů.

Pr.: Určete řád prvku $\sigma \in S_m$



Každé posunutí $\rightarrow$ znamená jedno "použití" $\sigma \Rightarrow \sigma^m = \text{id} \Leftrightarrow$ po m posunutích $\rightarrow$ se kolečka dostanou do "výchozího postavení" $\Rightarrow m = \text{lcm}(4, 2) = 12$

a) $\sigma = (1, 3) \circ (3, 5, 4) \in S_5$

Napišeme σ jako složení disjunktivních cyklů:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = (1354) \Rightarrow \underline{\underline{|\sigma| = 4}}$$

Zk.: $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{matrix} = \text{id} \quad \checkmark$

b) $\sigma = (315) \circ (214) \circ (182) \in S_8$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \\ 6 \rightarrow 6 \\ 7 \rightarrow 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = (1853) \circ (24) \Rightarrow \underline{\underline{|\sigma| = \text{lcm}(4, 2) = 4}}$$

c) $\sigma = (1, 3, 11) \circ (2, 1, 3) \circ (7, 8, 9, 6) \circ (9, 7, 3, 11) \in S_{11}$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 4 \\ 5 \rightarrow 5 \\ 8 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \\ 10 \rightarrow 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = (1, 11, 6, 7, 2, 3) \circ (8, 9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\sigma| = \text{lcm}(6, 2) = 6}}$$

Př. Určete všechny možné řády prvků v S_7 .

Cykly délek m označme (m). Potom $\sigma \in S_7$ může být složením disjunktních cyklů (nebo cyklem):

	1 5 1
(7)	7
(6)	6
(5) o (2)	10
(5)	5
(4) o (3)	12
(4) o (2)	4
(4)	4
(3) o (3)	3
(3) o (2) o (2)	6
(3) o (2)	6
(3)	3
(2) o (2) o (2)	2
(2) o (2)	2
(2)	2
	1

Pozor! ještě identita!

$\Rightarrow$ možné řády: 12, 10, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

(a ke každému z těchto čísel jistě existuje permutace tohoto řádu)