Skalární součin

Def.: (Skalární součin): Skalárním součinem na vektorovém prostoru $(V,+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$ nazveme každou symetrickou bilineární formu $f: V\times V \Rightarrow \mathbb{R}$ k níž přísluší pozitivně definitní kvadratická forma Q_f.

Př. 1.) $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

matice této bilin. formy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ f je symetrická b.f.

matice Q_f je stejná $\Rightarrow$ Q_f je pozitivně def. kv. forma

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ je skalární součin}}}$

2.) $f(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

matice f i Q_f : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{1.) } f \text{ je symetrická b.f.} \\ \text{2.) } Q_f \text{ je pozit. def.} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ je skal. součin.}}}$

3.) $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$, $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

matice f : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ je symetrická $\Rightarrow$ je stejná jako matice Q_f

Ověříme, že Q_f je pozitivně definitní:

$$\underset{-r_1\to r_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}} \sim \left[\underset{-s_1\to s_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}} \sim \underset{2r_2\to r_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}}\right] \sim \left[\underset{2s_2\to s_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow Q_f \text{ je pozit. def.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f \text{ je skal. součin}}}$

Poznámka: Existuje nekonečně mnoho skalárních součinů. Ten ze 1.) znáte ze SŠ. Zapisovalo se:

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Dohoda: Pokud nebude řečeno jinak, pod pojmem skalární součin na $\mathbb{R}^3$ budeme mít na mysli ten ze 1.).

Poznámka: Kolmost vektorů je možné zavést pomocí skalárního součinu. Řekněme, že $f: V \times V \to \mathbb{R}$ je skalární součin. Obvykle zapisujeme:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Vektory $\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou kolmé vzhledem ke skalárnímu součinu f právě když:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$$

Př: a) Ověřte, zda jsou vektory $\bar{x} = (1, 0, 1)$ a $\bar{y} = (2, 1, -1)$ kolmé vzhledem ke skal. součinu: $f(\bar{x}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

$$(\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{1}) \cdot (\underset{y_1}{2}, \underset{y_2}{1}, \underset{y_3}{-1}) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow \text{nejsou kolmé vzhledem k } f \text{ !!!}$$

b) Ověřte, zda jsou vektory $\bar{x} = (1, 0, 1)$ a $\bar{y} = (2, 1, -1)$ kolmé vzhledem ke skal. součinu: $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3$.

$$(\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{1}) \cdot (\underset{y_1}{2}, \underset{y_2}{1}, \underset{y_3}{-1}) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \text{jsou kolmé vzhledem k tomuto } f \text{ !!!}$$

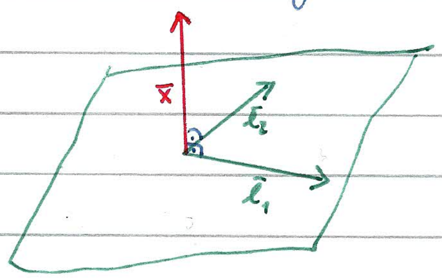
$\Rightarrow$ Vidíme, že vzhledem k jednomu skalárnímu součinu mohou být dané vektory kolmé a vzhledem k jinému skalárnímu součinu kolmé být nemusí.

Ale mohou! Například $\bar{x} = (1, -1, 0)$ a $\bar{y} = (1, 1, 3)$ by v a) i b) vyšly kolmé!

Př. Určete všechny vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $\bar{e}_1 = (1,3,1)$ a $\bar{e}_2 = (2,1,3)$.

Hledáme vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ splňující:

$$\bar{x} \cdot (1,3,1) = 0$$
$$\bar{x} \cdot (2,1,3) = 0$$



$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1,3,1) = 0$$
$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (2,1,3) = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Vyřešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 + 3t + 5t = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = -8t \\ \Rightarrow -5x_2 + x_3 = 0 \quad / \text{ zvolíme parametr } x_2 = t \end{array}$$

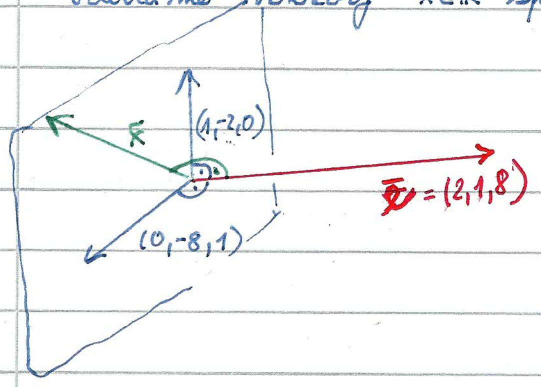
$$-5t + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5t$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = (-8t, t, 5t) = t(-8,1,5);\ t \in \mathbb{R}$$

Př. Určete všechny vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektor $\bar{e} = (2,1,8)$.

Hledáme vektory $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ splňující:

$$\bar{x} \cdot (2,1,8) = 0$$



$$(x_1, x_2, x_3)\,(2,1,8) = 0$$
$$\underbrace{2x_1 + x_2 + 8x_3 = 0}$$

soustava 1 rovnice o 3 neznámých $\Rightarrow$
zvolíme 2 parametry, např. $x_3 = t$, $x_1 = s$

$$\Rightarrow 2s + x_2 + 8t = 0$$
$$x_2 = -2s - 8t$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = (s, -2s-8t, t) = s(1,-2,0) + t(0,-8,1);\ s,t \in \mathbb{R}$$

Norma vektoru

Def. (Norma vektoru): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $n: V \to \mathbb{R}^+$ (značíme $n(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$) nazveme normou na vektorovém prostoru $(V,+,\cdot)$, právě když $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1.) $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

2.) $\|\alpha \cdot \bar{u}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{u}\|$

3.) $\|\bar{u}\| = 0 \iff \bar{u} = \bar{o}$ ... nulový vektor

Poznámka: Na daném vektorovém prostoru můžeme vytvořit různé normy, například na $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$:

a) $n: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$, kde $n((x_1,x_2,x_3)) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$

je normou na $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ - splňuje podmínky z def.:

1.) $\|(u_1,u_2,u_3) + (v_1,v_2,v_3)\| = \|(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)\| =$
$= |u_1+v_1| + |u_2+v_2| + |u_3+v_3| \leq |u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| +$
$+ |u_3| + |v_3| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

2.) $\|\alpha(u_1,u_2,u_3)\| = \|(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)\| =$
$= |\alpha u_1| + |\alpha u_2| + |\alpha u_3| = |\alpha|\,(|u_1| + |u_2| + |u_3|) = \alpha \|\bar{u}\|$

3.) $\|(u_1,u_2,u_3)\| = |u_1| + |u_2| + |u_3| = 0 \iff u_1 = u_2 = u_3 = 0 \iff \bar{u} = \bar{o}$

b) Euklidovská norma: Jestliže $f: V \times V \to \mathbb{R}$ je skalární součin, pak zobrazení dané předpisem:

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{f(\bar{u},\bar{u})} = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}$$

je normou na $(V,+,\cdot)$

Př: $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)$; $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3)$, je skal. součin na $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

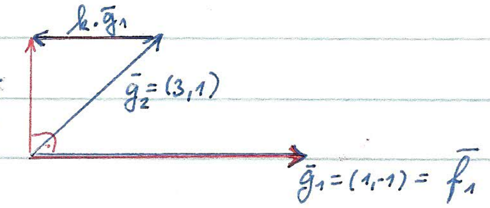
$$\|(1,1,1)\| = \sqrt{\underset{x_1\,x_2\,x_3}{(1,1,1)} \cdot \underset{y_1\,y_2\,y_3}{(1,1,1)}} = \sqrt{1+2+1} = \sqrt{4} = 2$$

Záleží na tom, který skalární součin zvolíme! Při „obvyklém" $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ by $\|(1,1,1)\| = \sqrt{(1,1,1)(1,1,1)} = \sqrt{3}$

Gramm - Schmidtův ortogonalizační proces v $\mathbb{R}^2$

Př.: Ortogonalizujte bázi $G = \{(1,-1) ; (3,1)\}$ a poté bazové vektory normalizujte (tzn. ortonormalizujte bázi G).

$$g_2 + k \cdot \bar{g}_1 = \bar{f}_2$$



1.) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = (1,-1)$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + k \bar{f}_1 = (3,1) + k(1,-1)$ a musí platit: $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0 \Rightarrow$

$$(1,-1)\left[(3,1) + k(1,-1)\right] = 0$$
$$2 + k \cdot 2 = 0$$
$$k = -1 \Rightarrow \bar{f}_2 = (3,1) - 1 \cdot (1,-1) = (2,2)$$

$\Rightarrow$ Ortogonální báze $F = \{(1,-1) ; (2,2)\}$

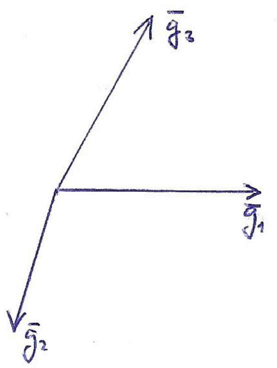
3.) Normalizace:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}} \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1,-1)(1,-1)}} (1,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,-1)$$

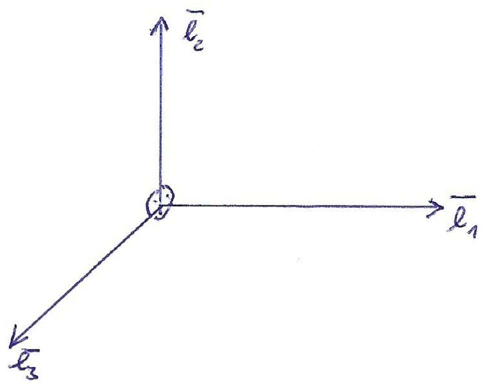
$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2}} \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{(2,2) \cdot (2,2)}} = \frac{1}{\sqrt{8}} (2,2)$$

$\Rightarrow$ Ortonormální báze: $\underline{\underline{E = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) ; \frac{1}{\sqrt{8}}(2,2)\right\}}}$.

Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces



$\longrightarrow$



Báze $G = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ $\longrightarrow$ Báze $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

jsou navzájem kolmé $\Leftrightarrow$ 1.) $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$
2.) $(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$
3.) $(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$
} je ortogonální

mají jednotkovou Eukl. normu („délku" pokud jde o obvyklý skal. součin) $\Leftrightarrow$ 1.) $(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$
2.) $(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 1$
3.) $(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = 1$

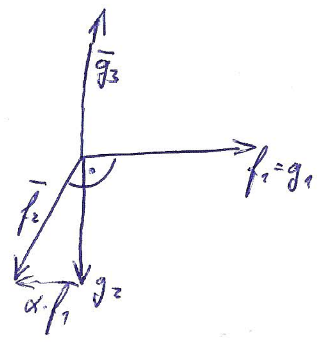
} je ortonormální

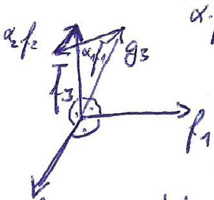
Postup: I.) Nejprve vytvoříme bázi $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$, která je ortogonální.

1) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \cdot \bar{f}_1$ tak, aby $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$

3.) $\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2$ tak, aby $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_3 = 0$, $\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_3 = 0$





II.) Normujeme vektory z báze F na „jednotkovou velikost"

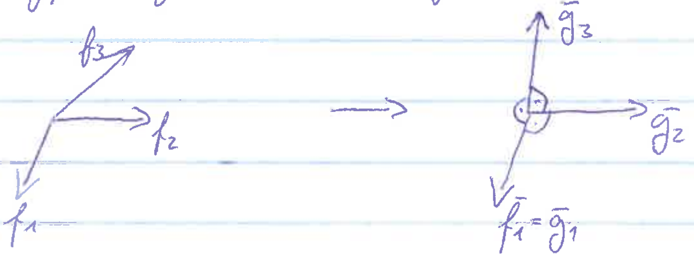
1.) $\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{f}_1\|} \cdot \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}} \bar{f}_1$

2.) $\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{f}_2\|} \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2}} \bar{f}_2$

3.) $\bar{e}_3 = \frac{1}{\|\bar{f}_3\|} \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{\bar{f}_3 \cdot \bar{f}_3}} \bar{f}_3$

Př: $V = \mathbb{R}^3$, skalární součin je dán předpisem $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte z vektorů $\bar{f}_1 = (1,1,0)$, $\bar{f}_2 = (0,1,1)$, $\bar{f}_3 = (1,0,1)$ ortonormální množinu vektorů $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Postup: Nejprve vytvoříme ortogonální množinu vektorů $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$



tzn. $\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 = 0$
$\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_3 = 0$
$\bar{g}_2 \cdot \bar{g}_3 = 0$

1) $\bar{g}_1 = \bar{f}_1 = (1,1,0)$

2) $\bar{g}_2 = \bar{f}_1 + \alpha \bar{f}_2$, kde $\bar{g}_1 \bar{g}_2 = 0 \quad \Rightarrow$

$\bar{g}_2 = (1,1,0) + \alpha(0,1,1)$, kde $(1,1,0)\left[(1,1,0) + \alpha(0,1,1)\right] = 0$

$$2 + \alpha \cdot 1 = 0$$
$$\alpha = -2$$

$\bar{g}_2 = (1,1,0) - 2(0,1,1) = (1,-1,-2)$

3.) $\bar{g}_3 = \bar{f}_1 + \alpha_1 \bar{f}_2 + \alpha_2 \bar{f}_3$, kde $g_1 g_3 = 0$, $\bar{g}_2 \bar{g}_3 = 0$

$\bar{g}_3 = (1,1,0) + \alpha_1 (0,1,1) + \alpha_2 (1,0,1)$, kde
$$(1,1,0)\left[(1,1,0) + \alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,0,1)\right] = 0$$
$$(1,-1,-2)\left[(1,1,0) + \alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,0,1)\right] = 0$$

$\bar{g}_3 = (1,1,0) + (0,1,1) - 3(1,0,1)$

$$2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$0 - 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2 = -3\alpha_1$$

$\bar{g}_3 = (-2, 2, -2)$

$$2 + \alpha_1 - 3\alpha_1 = 0$$
$$2 = 2\alpha_1$$
$$\alpha_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -3$$

4) Normalizujeme: $\bar{e}_1 = \dfrac{\bar{g}_1}{\sqrt{\bar{g}_1 \bar{g}_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$\bar{e}_2 = \dfrac{\bar{g}_2}{\sqrt{\bar{g}_2 \bar{g}_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$ $\qquad \bar{e}_3 = \dfrac{\bar{g}_3}{\sqrt{\bar{g}_3 \bar{g}_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}(-2,2,-2)$

Př. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte ortonormální bázi E víte-li, že vektory $\bar{g}_1=(1,1,0)$, $\bar{g}_2=(0,1,1)$, $\bar{g}_3=(1,0,1)$ tvoří bázi a skalární součin je dán předpisem $f(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, kde $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ a $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

I) 1.) $\bar{f}_1=\bar{g}_1=\underline{\underline{(1,1,0)}}$

2.) $\bar{f}_2=\bar{g}_2+\alpha\bar{f}_1=(0,1,1)+\alpha(1,1,0)$ tak, aby $\bar{f}_1\bar{f}_2=0$

$$(1,1,0)\left[(0,1,1)+\alpha(1,1,0)\right]=0$$
$$1+\alpha\cdot 2=0$$
$$\alpha=-\tfrac{1}{2}$$

$\bar{f}_2=(0,1,1)+-\frac{1}{2}(1,1,0)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}(-1,1,2)$

přeznačíme:

$\underline{\underline{\bar{f}_2=(-1,1,2)}}$

3.) $\bar{f}_3=\bar{g}_3+\alpha_1\bar{f}_1+\alpha_2\bar{f}_2=(1,0,1)+\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(-1,1,2)$ tak, aby $\bar{f}_1\cdot\bar{f}_3=0$, $\bar{f}_2\cdot\bar{f}_3=0$

$$(1,1,0)\cdot\left[(1,0,1)+\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(-1,1,2)\right]=0$$
$$(-1,1,2)\cdot\left[(1,0,1)+\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(-1,1,2)\right]=0$$

$$1+\alpha_1\cdot 2+0=0 \Rightarrow \alpha_1=-\tfrac{1}{2}$$
$$1+0+\alpha_2 6=0 \Rightarrow \alpha_2=-\tfrac{1}{6}$$

$\bar{f}_3=(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)-\frac{1}{6}(-1,1,2)$

$\bar{f}_3=\frac{1}{6}(6,0,6)+\frac{1}{6}(-3,-3,0)+\frac{1}{6}(1,-1,-2)$

$\bar{f}_3=\frac{1}{6}(4,-4,4)=\frac{4}{6}(1,-1,1)$

přeznačíme:

$\underline{\underline{\bar{f}_3=(1,-1,1)}}$

II.) Normujeme:

1.) $\bar{e}_1=\frac{1}{\|\bar{f}_1\|}\cdot\bar{f}_1=\frac{1}{\sqrt{(1,1,0)(1,1,0)}}(1,1,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

2.) $\bar{e}_2=\frac{1}{\|\bar{f}_2\|}\cdot\bar{f}_2=\frac{1}{\sqrt{(-1,1,2)(-1,1,2)}}(-1,1,2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

3.) $\bar{e}_3=\frac{1}{\|\bar{f}_3\|}\bar{f}_3=\frac{1}{\sqrt{(1,-1,1)(1,-1,1)}}(1,-1,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$$\underline{\underline{E=\left\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0);\ \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2);\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}}}$$

Př. Určete souřadnice vektoru $\bar{x} = (1,-8,6)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1,1,0);(-1,1,2);(1,-1,1)\}$.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$ řešením této soustavy jsou hledané souřadnice.

Nebo :

b)

$$(1,-8,6) \overset{?}{=} k_1(1,1,0) + k_2(-1,1,2) + k_3(1,-1,1) \quad / \cdot (1,1,0) \quad / \cdot (-1,1,2) \quad / \cdot (1,-1,1)$$

$$-7 = k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0$$
$$3 = 0 \cdot k_1 + k_2 \cdot 6 + k_3 \cdot 0$$
$$15 = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 3$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{7}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(1,-8,6)_{\langle E\rangle} = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 5\right)}}$$

Př: Určete souřadnice vektoru $\bar{x} = (1,-1,3)$ vzhledem k orto-gonální bázi $B = \{(1,1,0);\ (1,-1,-2);\ (-2,2,-2)\}$

1. možnost: Řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right)_{-r_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$k_1 - \frac{4}{6} + \frac{10}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow k_1 = 0$

$-2k_2 = -\frac{20}{6} = -\frac{12}{6} \Rightarrow k_2 = -\frac{4}{6}$

$\Rightarrow k_3 = -\frac{5}{6}$

2. možnost: Hledáme k_1, k_2, k_3:

$$(1,-1,3) = \bar{x} = k_1(1,1,0) + k_2(1,-1,-2) + k_3(-2,2,-2)$$

$$(1,1,0)(1,-1,3) = k_1(1,1,0)(1,1,0) + k_2(1,-1,-2)(1,1,0) + k_3(-2,2,-2)(1,1,0)$$
$$(1,-1,-2)(1,-1,3) = k_1(1,1,0)(1,-1,-2) + k_2(1,-1,-2)(1,-1,-2) + k_3(-2,2,-2)(1,-1,-2)$$
$$(-2,2,-2)(1,-1,3) = k_1(1,1,0)(-2,2,-2) + k_2(1,-1,-2)(-2,2,-2) + k_3(-2,2,-2)(-2,2,-2)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 &=& k_1 \cdot 2 \\ -4 &=& k_2 \cdot (6) \\ -10 &=& k_3\, 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = -\frac{4}{6} \\ k_3 = -\frac{5}{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\bar{x}_{\langle B \rangle} = \left(0, -\frac{4}{6}, -\frac{5}{6}\right)}}$$

Př: Je dána báze $G = \{(1,0,-1);(0,1,3);(0,1,-1)\}$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte bázi E, která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

1.) $\underline{\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = (1,0,-1)}$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{f}_1 = (0,1,3) + \alpha(1,0,-1)$, kde $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0 \Rightarrow$

$$(1,0,-1)\left[(0,1,3) + \alpha(1,0,-1)\right] = 0$$
$$-3 + \alpha \cdot 2 = 0$$
$$\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) + \frac{3}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ přeznačíme: $\underline{\bar{f}_2 = (3,2,3)}$

3.) $\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 = (0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(3,2,3)$, kde $\bar{f}_1\bar{f}_3 = 0$ a $\bar{f}_2\bar{f}_3 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &(1,0,-1)\cdot\left[(0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(3,2,3)\right] = 0 \\ &(3,2,3)\cdot\left[(0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(3,2,3)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &1 + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ &-1 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 22 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

$\bar{f}_3 = (0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) + \frac{1}{22}(3,2,3) = \left(0, \frac{22}{22}, -\frac{22}{22}\right) + \left(-\frac{11}{22}, 0, \frac{11}{22}\right) + \left(\frac{3}{22}, \frac{2}{22}, \frac{3}{22}\right) = \left(\frac{-8}{22}, \frac{24}{22}, -\frac{8}{22}\right) \Rightarrow$

přeznačíme $\underline{\bar{f}_3 = (-1,3,-1)}$

4.)

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{f}_1\|}\cdot\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1,0,-1)(1,0,-1)}}(1,0,-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{f}_2\|}\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{(3,2,3)(3,2,3)}}(3,2,3) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{22}}(3,2,3)}}$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{\|\bar{f}_3\|}\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{(-1,3,-1)(-1,3,-1)}}(-1,3,-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{11}}(-1,3,-1)}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{E = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1); \frac{1}{\sqrt{22}}(3,2,3); \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,3,-1)\right\}}}$

Př: Je dána báze $G = \{(1,1,1); (0,1,3); (0,0,1)\}$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte bázi E, která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \quad , \text{kde } \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \ \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

1.) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = \underline{(1,1,1)}$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{f}_1$, kde $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) + \alpha(1,1,1)$, kde $(1,1,1)\cdot[(0,1,3) + \alpha(1,1,1)] = 0$

$5 + \alpha \cdot 5 = 0$

$\Leftarrow \quad \alpha = -1$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) - 1\cdot(1,1,1)$

$\bar{f}_2 = \underline{(-1,0,2)}$

3.) $\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2$, kde: $\bar{f}_1 \bar{f}_3 = 0$, $\bar{f}_2 \bar{f}_3 = 0$

$\bar{f}_3 = (0,0,1) + \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,2)$, kde: $(1,1,1)[(0,0,1) + \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,2)] = 0$

$(-1,0,2)[(0,0,1) + \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,2)] = 0$

$\bar{f}_3 = (0,0,1) - \frac{1}{5}(1,1,1) - \frac{1}{3}(-1,0,2) = \left(\frac{2}{15}, \frac{-3}{15}, \frac{2}{15}\right)$

$1 + 5\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{5}$

$2 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{3}$

přeznačíme: $\bar{f}_3 = \underline{(2,-3,2)}$

4.)

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{f}_1\|}\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot1^2 + 2\cdot1^2 + 1^2}}(1,1,1) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1)}}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{f}_2\|}\cdot\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot(-1)^2 + 2\cdot0^2 + 2^2}}(-1,0,2) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2)}}$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{\|\bar{f}_3\|}\cdot\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot2^2 + 2\cdot(-3)^2 + 2^2}}(2,-3,2) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-3,2)}}$$

tvoří bázi E

Př: Je dána báze $G = \{(1,0,-3); (0,1,3); (0,1,-1)\}$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte bázi E, která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \text{ kde } \bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ a } \bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$$

1.) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = \underline{(1,0,-3)}$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \cdot \bar{f}_1 = (0,1,3) + \alpha(1,0,-3)$

chceme: $\bar{f}_1 \perp \bar{f}_2 \Leftrightarrow \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$

$(1,0,-3)\cdot[(0,1,3) + \alpha(1,0,-3)] = 0$

$-9 + \alpha \cdot 10 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{10}$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) + \frac{9}{10}(1,0,-3) = \left(\frac{9}{10}, \frac{10}{10}, \frac{3}{10}\right)$

přeznačíme:

$\bar{f}_2 = \underline{(9,10,3)}$

3.) $\bar{f}_3 = g_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 = (0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(9,10,3)$

chceme: $\bar{f}_1 \perp \bar{f}_3$ a $\bar{f}_2 \perp \bar{f}_3$ tzn.

$(1,0,-3)[(0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(9,10,3)] = 0$

$(9,10,3)[(0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(9,10,3)] = 0$

$3 + \alpha_1 10 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-3}{10}$

$7 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 190 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{-7}{190}$

$\bar{f}_3 = (0,1,-1) + \frac{-3}{10}(1,0,-3) + \frac{-7}{190}(9,10,3)$

$\bar{f}_3 = \left(0, \frac{190}{190}, \frac{-190}{190}\right) + \left(\frac{-57}{190}, 0, +\frac{171}{190}\right) + \left(\frac{-63}{190}, \frac{-70}{190}, \frac{-21}{190}\right)$

$\bar{f}_3 = \left(\frac{-120}{190}, \frac{120}{190}, \frac{-40}{190}\right) \Rightarrow$ přeznačíme $\bar{f}_3 = \underline{(-6,6,-2)}$

4.)

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \frac{1}{\|\bar{f}_1\|} \cdot \bar{f}_1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (1,0,-3)}} \\ \bar{e}_2 &= \frac{1}{\|\bar{f}_2\|} \cdot \bar{f}_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{190}} (9,10,3)}} \\ \bar{e}_3 &= \frac{1}{\|\bar{f}_3\|} \bar{f}_3 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{76}} (-6,6,-2)}} \end{aligned}\right\} \text{ tvoří bázi E}$$