

Pr. Určete matici lineárního zobrazení A vzhledem ke standardním bázím.

$$1.) A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2)$$

$$\text{Stand. báze na } \mathbb{R}^3 \text{ a } \mathbb{R}^3 \text{ je } S = \{ \underbrace{(1, 0, 0)}_{\bar{e}_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{\bar{e}_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\bar{e}_3} \}$$

$$\Rightarrow A(\bar{e}_1) = A(\underbrace{(1, 0, 0)}_{\substack{x_1 \quad x_2 \quad x_3}}) = (\underbrace{2 \cdot 1 - 0}_{2x_1 - x_3}, \underbrace{0 + 2 \cdot 0}_{x_2 + 2x_3}, \underbrace{1 - 0}_{x_1 - x_2}) = (2, 0, 1)$$

$$A(\bar{e}_1)_{\langle S \rangle} = (2, 0, 1)_{\langle S \rangle} = (2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow A(\bar{e}_2) = A(\underbrace{(0, 1, 0)}_{\substack{x_1 \quad x_2 \quad x_3}}) = (2 \cdot 0 - 0, 1 + 2 \cdot 0, 0 - 1) = (0, 1, -1)$$

$$A(\bar{e}_2)_{\langle S \rangle} = (0, 1, -1)_{\langle S \rangle} = (0, 1, -1)$$

$$\Rightarrow A(\bar{e}_3) = A((0, 0, 1)) = (2 \cdot 0 - 1, 0 + 2 \cdot 1, 0 - 0) = (-1, 2, 0)$$

$$A(\bar{e}_3)_{\langle S \rangle} = (-1, 2, 0)_{\langle S \rangle} = (-1, 2, 0)$$

$\Rightarrow$ Matice lineárního zobrazení vzhledem ke stand. bázím:

$$A_{SS} = \begin{pmatrix} \overset{= A(\bar{e}_1)_{\langle S \rangle}}{2} & \overset{= A(\bar{e}_2)_{\langle S \rangle}}{0} & \overset{= A(\bar{e}_3)_{\langle S \rangle}}{-1} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Věnujme si:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = A(\bar{x})_{\text{ne sloupce}} = A(\bar{x})_{\langle S \rangle}$$

$$\Rightarrow A(\bar{x})_{\langle S \rangle} = A_{SS} \bar{x}_{\langle S \rangle}$$

$$\Rightarrow \text{např. } A((1, 3, 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.) $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $A((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + x_3, -3x_2 + 2x_3)$

$\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^2$
 $(1,0,0) \rightarrow (2,0)_{\langle s_2 \rangle} = (2,0) = A(\bar{e}_1)_{\langle s_2 \rangle}$
 $(0,1,0) \rightarrow (1,-3)_{\langle s_2 \rangle} = (1,-3) = A(\bar{e}_2)_{\langle s_2 \rangle}$
 $(0,0,1) \rightarrow (1,2)_{\langle s_2 \rangle} = (1,2) = A(\bar{e}_3)_{\langle s_2 \rangle}$
 $\Rightarrow A_{s_1 s_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
 $S_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $S_2 = \{(1,0), (0,1)\}$
 $\bar{e}_1$ $\bar{e}_2$ $\bar{e}_3$

Napr. $A((1,1,1))_{\langle s_2 \rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A((1,1,1)) = (4, -1)$

3.) $A((a,b,c)) = (a+b)x^2 - 2cx + (2a-3b)$; $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$

$\mathbb{R}^3$ P_2
 $(1,0,0) \rightarrow x^2 + 2_{\langle s_2 \rangle} = (1,0,2)$
 $(0,1,0) \rightarrow x^2 - 3_{\langle s_2 \rangle} = (1,0,-3)$
 $(0,0,1) \rightarrow 0x^2 - x + 0_{\langle s_2 \rangle} = (0,-1,0)$
 $\Rightarrow A_{s_1 s_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
 $S_2 = \{x^2, x, 1\}$

Napr. $A((1,0,1))_{\langle s_2 \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A((1,0,1)) = x^2 - x + 2$

Př. Lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem $A(a, b, c) = (2a - b, -b + c, 3a + c)$

a) Určete matici lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \\ \begin{array}{l} \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} (2, 0, 3) \\ (-1, -1, 0) \\ (0, 1, 1) \end{array} \end{array} \Rightarrow A_{S_1 S_2} = \begin{pmatrix} A(\bar{e}_1)_{S_2} & A(\bar{e}_2)_{S_2} & A(\bar{e}_3)_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \text{stand. báze v } \mathbb{R}^3 = S_2$$

b) Určete $A((3, 1, -1))$

α) Pomocí předpisu: $A\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (6 - 1, -1 - 1, 9 - 1) = \underline{(5, -2, 8)}$

β) Pomocí matice: $A((3, 1, -1)) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{S_1 S_2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{(3, 1, -1)_{S_1}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A((3, 1, -1)) = \underline{(5, -2, 8)}$

Př. Lineární zobrazení $A: P_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $A(ax^2 + bx + c) = (a + 5c, b - c)$

a) Určete matici vzhledem ke standardním bázím

$$\begin{array}{ccc} P_3 & & \mathbb{R}^2 \\ \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ 1 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} (1, 0) \\ (0, 1) \\ (3, -1) \end{array} \end{array} \Rightarrow A_{S_1 S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$S_1 = \{x^2, x, 1\}$ $S_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

b) Určete $A(3x^2 + 2x + 5)$.

α) podle předpisu: $A(3x^2 + 2x + 5) = (3 + 15, 2 - 5) = \underline{(18, -3)}$

β) pomocí matice: $A(3x^2 + 2x + 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(3x^2 + 2x + 5) = \underline{(18, -3)}$

Př. Lineární zobrazení $A: P_2 \rightarrow P_3$ je dáno předpisem $A(ax + b) = (a - 2b)x^2 + 2ax - 3b$

a) Určete matici lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím

$$\begin{array}{ccc} P_2 & & P_3 \\ \begin{array}{l} x \\ 1 \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{l} x^2 + 2x \\ -2x^2 - 3 \end{array} \end{array} \Rightarrow A_{S_1 S_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$S_1 = \{x, 1\}$ $S_2 = \{x^2, x, 1\}$

b) Určete $A(2x + 5) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow A(2x + 5) = \underline{-8x^2 + 4x - 15}$