

Determinant

1. řádu: $|a| = a \Rightarrow$ Např. $|5| = 5, |-3| = -3$ (Pozor, nejde o absolutní hodnotu, i když se může zdát!!!)

2. řádu: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \Rightarrow$ Např. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1)(2) = 2 + 2 = 4$

3. řádu: Můžeme počítat rozvojem podle sloupce (či řádku), Sarrusovým pravidlem, nebo úpravou na 2. řád. Např.: Určete hodnotu determinantu matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

a) Rozvojem: Můžeme si vybrat libovolný sloupec, nebo řádek. My si vybereme třeba 2. řádek (směieme se, aby vybraný sloupec / řádek měl co nejvíce nul - usnadní nám to výpočet)

řádek sloupec, kde je 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

↑
výsledek v A
řádek = sloupec
kde je 3.

$$= 3 \cdot (-1)^3 \underbrace{[(-1)(-1) - 5 \cdot 2]}_{1 - 10} + 2 \cdot (-1)^5 \underbrace{[1 \cdot 5 - 0 \cdot (-1)]}_5 = \underbrace{-3 \cdot (-9)}_{27} - \underbrace{2 \cdot 5}_{10} = 17$$

b) Sarrusovo pravidlo: Např. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 2 \cdot 9 + 8 \cdot 6 \cdot 1) \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 - (0 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \cdot 1) =$$

$$= 0 + 0 + 30 - (0 + 3 + 10) = 30 - 13 = 17$$

c) Úpravou na Δ tvar: musíme vědět:

Např.:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4$$

Např.:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$
 (výměnou sloupců se změní znaménko výsled. determinantu, takže u výměny řádků!)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Např.
$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(vynásobili jsme 1. řádek číslem 3 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ musíme kompenzovat vynásobením determinantu číslem $\frac{1}{3}$)

Např.:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1 \\ -3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot (-1) = 5$$

Např.:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
 (Ladilo by udělat rozvoj podle 2. řádku)

$$\Rightarrow \text{Př.: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 15 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-5r_2} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 17 = \underline{\underline{17}}$$

Př: Určete hodnotu determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Rozvojem: (Podle 1. sloupce)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left[\underset{2}{1 \cdot 2 \cdot 1} + \underset{2}{2 \cdot 1 \cdot 1} + \underset{-1}{1 \cdot 1 \cdot (-1)} - (\underset{-2}{1 \cdot 2 \cdot (-1)} + \underset{2}{1 \cdot 2 \cdot 1} + \underset{1}{1 \cdot 1 \cdot 1}) \right] + 0 \cdot$$

$$- 1 \cdot [\text{vzjete mela - v determinantu jsou dva stejné řádky}] =$$

$$= 2 \cdot [3 - 1] = \underline{\underline{4}}$$

b) Upravou na tvar

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+2R_1 \\ +2R_1 \\ +R_1}} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{* \\ -R_2 \\ -R_2}} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)} =$$

$$= (-1) \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{+9R_3} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (1) \cdot (-3) \cdot (4) = \underline{\underline{4}}$$

1) Vypočítejte determinant matice A rozvojem podle řádku, nebo sloupce

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) $A = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$
 $= -2 \cdot (-1 - 4) + 0 - 3(2 + 1) = 10 - 9 = \underline{\underline{1}}$
 (rozvoj podle 2. řádku)

b) $A = 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$
 (rozvoj podle 3. řádku)

c) $A = -1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 3) + 1(3 - 6) + 0 =$
 $= 3 - 3 + 0 = \underline{\underline{0}}$
 (rozvoj podle 2. sloupce)

2.) Vypočítejte determinant matice A pomocí elementárních řádkových úprav.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Pozn: 1) Výměnou sloupců se změni znaménko det.

2) Vynásobením řádku číslem α se determinant "změní" α -krát

3) Přičtením násobku řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se hodnota determinantu nezmění

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot 2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3R_2} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

c) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R_1 \\ -3R_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-2) \cdot (-3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

3.) Určete hodnotu determinanta

$$a) \det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_4} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+r_1 \\ -2r_1 \\ -r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_3} (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+2r_2 \\ +r_2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{vmatrix} \xrightarrow{+2r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = -\underline{\underline{2}}$$

$$b) \det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)^{3+1} \\ (-1)^{3+1}}} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \left[3 \cdot \overset{3+1}{(-1)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1 \cdot \overset{3+3}{(-1)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= -1 [3 \cdot (4-1) + 1 \cdot (-3-4)] = -1 [9-7] = -\underline{\underline{2}}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť A je čtvercová matice. Řešíme soustavu lineárních rovnic

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

jestliže $|A| \neq 0$, pak

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|},$$

kde A_{x_i} vznikne z A nahrazením i -tého sloupce vektorem $\bar{b}$.

Pr: Vyřešte soustavu rovnic:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = -3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 2 - (0 + 4 - 1) = -3$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} + 0 \cdot (-1)^{2+2} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{zr}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) \cdot 0 = 0$$

$$|A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(6-3) = -6$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ x_2 &= \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{0}{-3} = 0 \\ x_3 &= \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\bar{x} = (1, 0, 2)}}$$

$$\text{zk: } 1 - 2 \cdot 0 + 2 = 3$$

$$2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$-1 + 0 - 2 = -3$$

Pr. : Vyřešte soustavu rovnic

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_3 = 19$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 14$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2 \quad (\text{viz. předch. pří a})$$

$$\det A_1^b = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 19 & 0 & 3 \\ 14 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)^3 \begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^3 \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 19 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (38 - 42) - 4(30 - 38) = -4 + 32 = 28$$

$$\det A_2^b = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 2 & 19 & 3 \\ 2 & 14 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-6r_2} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\det A_3^b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 19 \\ 2 & 4 & 14 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\det A_1^b}{\det A} = \frac{28}{2} = 14 \\ x_2 &= \frac{\det A_2^b}{\det A} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_3 &= \frac{\det A_3^b}{\det A} = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \underline{\underline{(14, -2, -3)}}$$

$$\text{Zk: } 14 - 2 - 6 = 10 \quad \checkmark$$

$$28 - 9 = 19 \quad \checkmark$$

$$28 - 8 - 6 = 14 \quad \checkmark$$

Výpočet matice inverzní pomocí determinantů (matice adjungované)

Pr: Určete matici inverzní k matici A

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1) Určeme $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$

2) Určeme $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|4| & (-1)^{1+2}|2| \\ (-1)^{2+1}|-1| & (-1)^{2+2}|1| \end{pmatrix}^T$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

zk: $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[-2r_1]{+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{+3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$

2) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & -11 & 5 \\ -11 & 7 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & -11 & -5 \\ -11 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}}}$

zk: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -11 & -5 \\ -11 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$