

## A

- 1.) Určete matici bilineární formy  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_3$$

a to vzhledem k bázi  $G = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)\}$ .

- 2.) Klasifikujte kvadratickou formu  $Q_f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$Q_f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

- 3.) Určete všechny vektory  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ , které jsou kolmé na vektory  $(1, 2, 1)$  a  $(1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$  vzhledem ke skalárnímu součinu  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , který je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dán předpisem  $f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ .

- 4.) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 5.) Vypočtěte determinant matice  $A$ , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## B

- 1.) Nalezněte matice symetrické a antisymetrické části bilineární formy  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_3 - x_2y_2$$

a to vzhledem ke standardní bázi  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

- 2.) Nalezněte matici kvadratické formy  $Q_f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2$$

a to vzhledem k bázi  $G = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

- 3.) Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi  $G = \{\bar{\mathbf{g}}_1 = (1, 1, 0), \bar{\mathbf{g}}_2 = (0, -1, 2), \bar{\mathbf{g}}_3 = (0, 1, -1)\}$  v  $\mathbb{R}^3$  vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

- 4.) Ověřte, zda jsou vektory  $\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  a  $\bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  vlastními vektory

$$\text{matice } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 5.) Vypočtěte determinant matice  $A$ , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[A]

$$1.) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_{f(e)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -4 & 6 & 6 \\ -6 & 11 & 11 \end{pmatrix} = B_{f(e)}$$

$$2.) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_f \text{ je pozitivne semidefinitni}$$

$r_1 \rightarrow r_2$        $s_1 \rightarrow s_2$   
 $r_1 \rightarrow r_3$        $s_1 \rightarrow s_3$

$$3.) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + 2x_2 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4.) \left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1-2 & 4 \\ 2 & 1-2 \end{vmatrix} = 0 \\ & -(1+2)(1-2) - 8 = 0 \\ & 1-2^2 + 8 = 0 \\ & \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} & \boxed{\lambda = 3} \quad \begin{pmatrix} (-1-3) & 4 & | & 0 \\ 2 & (1-3) & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 4 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \\ & \boxed{\lambda = -3} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$5.) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0+8+0) - (0+0-4) = \underline{\underline{12}}$$

B

1.

$$B_{f \in \langle S \rangle} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$B_{f \in \langle S \rangle} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -7 & -8 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}}}$$

3.  $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = \underline{\underline{(1, 1, 0)}}$

$$\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{f}_1 = (0, -1, 2) + \alpha(1, 1, 0)$$

$$(0, -1, 2) + \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right) \Rightarrow$$

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = (1, 1, 0) \cdot \left[(0, -1, 2) + \alpha(1, 1, 0)\right] = -1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

přeznačí:

$$\bar{f}_2 = \underline{\underline{(1, -1, 4)}}$$

$$\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 = (0, 1, -1) + \alpha_1(1, 1, 0) + \alpha_2(1, -1, 4)$$

$$(0, 1, -1) - \frac{9}{18}(1, 1, 0) + \frac{5}{18}(1, -1, 4) =$$

$$= \left(-\frac{4}{18}, \frac{4}{18}, \frac{2}{18}\right) \sim (-4, 4, 2)$$

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_3 = 1 + 2\alpha_1 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2} = -\frac{9}{18}$$

$$\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_3 = -5 + 0 + 18\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{5}{18}$$

$$\bar{f}_3 = \underline{\underline{(-2, 2, 1)}}$$

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ je vlastním vektorem } A}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \neq 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ není vlastním vektorem } A}}$

5.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 3) - (0 + 0 + 0) = \underline{\underline{-3}}$$

## A

- 1.) Určete matici bilineární formy  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_3$$

a to vzhledem k bázi  $G = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)\}$ .

**Řešení :**

$$B_{f(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -4 & 6 & 6 \\ -6 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

- 2.) Klasifikujte kvadratickou formu  $Q_f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$Q_f(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

**Řešení :**  $Q_f$  je pozitivně semidefinitní.

- 3.) Určete všechny vektory  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ , které jsou kolmé na vektory  $(1, 2, 1)$  a  $(1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$  vzhledem ke skalárnímu součinu  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , který je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dán předpisem  $f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ .

**Řešení :**  $\bar{\mathbf{x}} = t(-2, 1, 0); t \in \mathbb{R}$ .

- 4.) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Řešení :** Vlastnímu číslu  $\lambda_1 = 3$  přísluší vlastní vektory  $\bar{\mathbf{v}} = t(1, 1)$ .

Vlastnímu číslu  $\lambda_2 = -3$  přísluší vlastní vektory  $\bar{\mathbf{v}} = t(-2, 1)$ .

- 5.) Vypočtěte determinant matice  $A$ , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Řešení :**  $|A| = 12$

## B

- 1.) Nalezněte matice symetrické a antisymetrické části bilineární formy  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \bar{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_3 - x_2y_2$$

a to vzhledem ke standardní bázi  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

**Řešení :**

$$B_{f_s\langle S \rangle} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{f_a\langle S \rangle} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2.) Nalezněte matici kvadratické formy  $Q_f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je  $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2$$

a to vzhledem k bázi  $G = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ .

**Řešení :**

$$(Q_f)_{\langle G \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -7 & -8 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

- 3.) Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi  $G = \{\bar{\mathbf{g}}_1 = (1, 1, 0), \bar{\mathbf{g}}_2 = (0, -1, 2), \bar{\mathbf{g}}_3 = (0, 1, -1)\}$  v  $\mathbb{R}^3$  vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

**Řešení :**  $F = \{\bar{\mathbf{f}}_1 = (1, 1, 0), \bar{\mathbf{f}}_2 = (1, -1, 4), \bar{\mathbf{f}}_3 = (-2, 2, 1)\}$

- 4.) Ověřte, zda jsou vektory  $\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  a  $\bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  vlastními vektory

$$\text{matice } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Řešení :**  $\bar{\mathbf{v}}_1$  je vlastním vektorem matice  $A$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_2$  není vlastním vektorem matice  $A$ .

5.) Vypočtete determinant matice  $A$ , jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Řešení :**  $|A| = -3$