# Bilineární forma

**Def**: (Bilineární forma): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a zobrazení $f: V\times V \to T$ splňuje $\forall \bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V$ a $\forall \alpha \in T$ podmínky:

1) $f(\bar{u}+\bar{v},\bar{w}) = f(\bar{u},\bar{w}) + f(\bar{v},\bar{w})$
2) $f(\alpha\cdot\bar{u},\bar{v}) = \alpha\cdot f(\bar{u},\bar{v})$
3) $f(\bar{u},\bar{v}+\bar{w}) = f(\bar{u},\bar{v}) + f(\bar{u},\bar{w})$
4) $f(\bar{u},\alpha\cdot\bar{v}) = \alpha\cdot f(\bar{u},\bar{v})$

Potom f nazýváme bilineární formou na vektorovém prostoru (V,+, .)

**Poznámka**: Dá se dokázat, že když $E=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n\}$ je báze vektorového prostoru $V$, $\bar{x}_{\langle E\rangle}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\bar{y}_{\langle E\rangle}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ a $f: V\times V\to T$ je bilineární forma, potom

$$f(\bar{x},\bar{y}) = (x_1,x_2,\dots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_1,\bar{e}_n)\\ f(\bar{e}_2,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_2,\bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_2,\bar{e}_n)\\ \vdots & & & \\ f(\bar{e}_n,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_n,\bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_n,\bar{e}_n)\end{pmatrix}}_{\text{matice bilineární formy vzhledem k bázi } E \text{, značíme ji } B_{f\langle E\rangle}}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{e}_i,\bar{e}_j)\, x_i y_j$$

Zapsáno vektorově:

$$\boxed{f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}_{\langle E\rangle}\, B_{f\langle E\rangle}\, \bar{y}_{\langle E\rangle}^{T}}$$

**Př**: Nalezněte matici bilineární formy $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$ (kde $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ a $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$) a určete $f(\bar{x},\bar{y})$, jestliže $\bar{x}=(1,1,0)$, $\bar{y}=(2,3,-1)$
(Matici hledejte, není-li řečeno jinak, vzhledem k standardní bázi; na $\mathbb{R}^3$ je standardní báze: $\bar{e}_1=(1,0,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0)$, $\bar{e}_3=(0,0,1)$)

$$\Rightarrow B_f = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) & f(\bar{e}_1,\bar{e}_3)\\ f(\bar{e}_2,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_2,\bar{e}_2) & f(\bar{e}_2,\bar{e}_3)\\ f(\bar{e}_3,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_3,\bar{e}_2) & f(\bar{e}_3,\bar{e}_3)\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) = f((1,0,0),(1,0,0)) = \underbrace{1\cdot1 - 1\cdot0 + 3\cdot0\cdot1 + 2\cdot0\cdot0 - 2\cdot0\cdot0 + 5\cdot0\cdot0}_{=1}\\ f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = f((1,0,0),(0,1,0)) = \underbrace{1\cdot0 - 1\cdot1 + 3\cdot0\cdot1 + 2\cdot0\cdot1 - 2\cdot0\cdot1 + 5\cdot0\cdot0}_{=-1}\\ \vdots\\ f(\bar{e}_3,\bar{e}_3) = f((0,0,1),(0,0,1)) = \dots = 5\end{cases}$$

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

Matici $B_{f_{\langle E\rangle}}$ však můžeme určit přímo z předpisu (jestliže $x_1, x_2, x_3$ a $y_1, y_2, y_3$ jsou souřadnice vzhledem k bázi E)

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 \cdot y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 - 2 x_3 y_2 + 5 x_3 y_3$$

řádek sloupec

před $x_1, y_1$ je číslo 1 =>

před $x_1 y_3$ je číslo 0

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hodnotu $f((\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{1}, \underset{x_3}{0}); (\underset{y_1}{2}, \underset{y_2}{3}, \underset{y_3}{-1}))$ můžeme určit:

a) Podle předpisu: $f((1,1,0), (2,3,-1)) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot (-1) = 2 - 3 + 6 + 6 = \underline{\underline{11}}$

nebo:

b) Pomocí matice $B_f$: $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}_{\langle E\rangle} \cdot B_{f_{\langle E\rangle}} \cdot \bar{y}_{\langle E\rangle}^T$, jestliže E je stand. báze => $(1,1,0) = (1,1,0)_{\langle E\rangle}$, $(2,3,-1) = (2,3,-1)_{\langle E\rangle}$

$$\Rightarrow \quad f((1,1,0), (2,3,-1)) = (1,1,0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (4, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{11}}$$

Př: Dokažte, že zobrazení $f: P_3 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\forall p, q \in P_3: f(p,q) = p(0) \cdot q(1)$ je bilineární forma a nalezněte její matici vzhledem ke standardní bázi. (zde je st. báze $E = \{x^2, x, 1\}$)

Nejprve se podívejme, jak funguje zobrazení $f$. Vezměme $p = 3x^2 - 4x + 3$ a $q = 2x^2 - 1$, potom $p(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$ a $q(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$. V tom případě je $f(p,q) = p(0) \cdot q(1) = 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

Nyní dokážeme, že $f$ je bilineární forma, tj., že platí podmínky 1.) až 4.) z definice bilineární formy:

ad 1) má platit: $f(\bar{u} + \bar{v}, \bar{w}) = f(\bar{u}, \bar{w}) + f(\bar{v}, \bar{w})$

(zde jsou vektory polynomy, proto nadále nebudeme dělat čárky nad $\bar{u}$, $\bar{v}$ a $\bar{w}$)

$f(u+v, w) = (u+v)(0) \cdot w(1) = (u(0) + v(0)) \cdot w(1) = u(0) w(1) + v(0) w(1) = f(u,w) + f(v,w)$

ad 2.) má platit $f(\alpha u, v) = \alpha \cdot f(u,v)$

$\Rightarrow f(\alpha u, v) = (\alpha u)(0) \cdot v(1) = \alpha \cdot u(0) \cdot v(1) = \alpha \cdot f(u,v)$

Podmínky 3.) a 4.) bychom dokázali analogicky jako 1.) a 2.)

Nyní nalezneme matici bilineární formy $f(p,q) = p(0)\,q(1)$.

Můžeme to udělat dvěma způsoby:

a)
$$B_f = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) & f(\bar{e}_1,\bar{e}_3) \\ f(\bar{e}_2,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_2,\bar{e}_2) & f(\bar{e}_2,\bar{e}_3) \\ f(\bar{e}_3,\bar{e}_1) & f(\bar{e}_3,\bar{e}_2) & f(\bar{e}_3,\bar{e}_3) \end{pmatrix}$$

standardní báze je
$\bar{e}_1 : e_1(x) = x^2 \Rightarrow e_1(1) = 1^2 \quad e_1(0) = 0^2$
$\bar{e}_2 : e_2(x) = x \Rightarrow e_2(1) = 1 \quad e_2(0) = 0$
$\bar{e}_3 : e_3(x) = 1 \Rightarrow e_3(0) = 1, \; e_3(1) = 1$

$\Rightarrow f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) = f(x^2, x^2) \overset{e_1(0)\cdot e_1(1)}{\overbrace{=}} 0^2 \cdot 1^2 = 0 \qquad f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = f(x^2, x) \overset{e_1(0)e_2(1)}{\overbrace{=}} 0^2 \cdot 1^2 = 0 \qquad f(\bar{e}_1,\bar{e}_3) = f(x^2, 1) = 0^2 \cdot 1 = 0$

$f(\bar{e}_2,\bar{e}_1) = f(x, x^2) = e_2(0)e_1(1) = 0\cdot 1 = 0 \qquad f(\bar{e}_2,\bar{e}_2) = e_2(0)e_2(1) = 0\cdot 1 = 0 \qquad f(\bar{e}_2,\bar{e}_3) = e_2(0)e_3(1) = 0\cdot 1 = 0$

$f(\bar{e}_3,\bar{e}_1) = e_3(0)e_1(1) = 1\cdot 1 = 1 \qquad f(\bar{e}_3,\bar{e}_2) = e_3(0)e_2(1) = 1\cdot 1 = 1 \qquad f(\bar{e}_3,\bar{e}_3) = e_3(0)e_3(1) = 1\cdot 1 = 1$

$$\Rightarrow B_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Nebo určíme předpis $f(p,q)$ pomocí souřadnic vzhledem ke standardní bázi $E = \{x^2, x, 1\}$

$p, q$ jsou polynomy z $P_3 \Rightarrow$

$p: \; p(x) = x_1 \cdot x^2 + x_2 \cdot x + x_3 \Rightarrow p = (x_1, x_2, x_3)_{\langle E\rangle}, \quad p(0) = x_1 \cdot 0^2 + x_2 \cdot 0 + x_3 = x_3 \quad p(1) = x_1 + x_2 + x_3$

$q: \; q(x) = y_1 x^2 + y_2 x + y_3 \Rightarrow q = (y_1, y_2, y_3)_{\langle E\rangle}, \quad q(0) = y_3 \quad q(1) = y_1 + y_2 + y_3$

$\Rightarrow f(p,q) = p(0)\,q(1) = \cancel{(x_1 + x_2 + x_3)\cdot y_3 = x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3} = x_3(y_1 + y_2 + y_3)$

$f((x_1,x_2,x_3)_{\langle E\rangle}, (y_1,y_2,y_3)_{\langle E\rangle}) = \cancel{x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3} = x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_3 y_3$

řádek sloupec

$\Rightarrow$ Matici $B_f$ určíme:

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$