

Matice

Označme: Matice známe nějakými mismenz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}} = \overset{(m, m)}{(a_{ij})} = A$$

Sčítání matic: Příklad: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

Obecně: $\overset{(m, m)}{(a_{ij})} + \overset{(m, m)}{(b_{ij})} = \overset{(m, m)}{(c_{ij})}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Pozor! Příklad: $\overset{(2, 3)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}} + \overset{(2, 2)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \neq$ není definováno, sčítáme pouze matice stejného typu!

Nulová matice: Značíme ji O . Věchuz její prvky jsou rovnou nule

$$\Rightarrow O = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}}, \text{ kde } \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, m\} : a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \overset{(m, m)}{A} + \overset{(m, m)}{O} = \overset{(m, m)}{A} \\ \overset{(m, m)}{O} + \overset{(m, m)}{A} = \overset{(m, m)}{A} \end{array}$$

Komutativnost sčítání:

$$\boxed{A + B = B + A} \text{ - Poradí sčítání matic}$$

můžeme mít, plyne to z komutativnosti sčítání

reálných čísel. Příklad: $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} = \underset{(2+0)}{(1+0)} \underset{(3+4)}{(-1+1)} = \underset{(2+2)}{(0+1)} \underset{(4+3)}{(-1+1)} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} + \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

Násobení matice číslem (reálným / komplexním): Příklad: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

Obečně: $\alpha \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{(m,n) \\ \in \mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}_{(m,n)}$, kde $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Transpozice: z řádků uděláme sloupce (případně ze sloupců řádky - výjde také)

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Skalární součin vektorů (aritmetických): Příklad: 1) $(1, -1, 2) \cdot (3, 1, 4) = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = \underline{10}$

2) $(1, 0, 3, 0) \cdot (2, 1, -1, 0) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = \underline{-1}$

3) $(1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 6 + 0 = \underline{7}$

4) $(1, -1, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 - 3 + 15 = \underline{16}$

5) $(1, 2, 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 20 = \underline{19}$

Násobení matic: Příklad: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{(1,3)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 19 & 17 \end{pmatrix}_{(1,2)}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(1,3)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}_{(1,3)}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{(2,3)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 8 & 20 & 19 \end{pmatrix}_{(2,3)}$

Obečně: $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}}_{(m,n)}$, kde

$c_{ij} = \bar{r}_{iA} \cdot \bar{s}_{jB}$ = řádek i -tý z matice A krát sloupec j -tý z matice B - výsledné číslo je v i -tém řádku a j -tém sloupci matice (AB)

Jednotková matice : Je to čtvercová matice, která má na diagonále jedničky, jinde nuly. Násobíme-li matici A jednotkovou maticí, výsledkem je opět A .

Př: 1.) $\begin{matrix} (3,3) & (3,2) & (2,2) \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_A & = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_A \end{matrix}$

2.) $\begin{matrix} (3,2) & (2,2) & (2,2) \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_A & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_E & = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_A \end{matrix}$

} obecně:
$$\begin{matrix} (m,n) & (m,n) \\ A \cdot E & = A \\ (m,m) & (m,n) \\ E \cdot A & = A \end{matrix}$$

Pozor! Násobení matic není komutativní! Tj. obecně neplatí, že $A \cdot B = B \cdot A$ (ale stát se to může).

Př: Necht' $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

Př: Necht' $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$

$$0.) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Vlastnosti:

$$1.) A + B = B + A$$

$$2.) (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$3.) (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$$

$$4.) \alpha (A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$5.) \alpha (\beta A) = (\alpha \beta) A$$

$$6.) E \cdot A = A \cdot E = A$$

$$7.) A \cdot O = O \cdot A = O \quad (O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix})$$

$$8.) A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$9.) A(B+C) = AB + AC$$

$$10.) (A+B) \cdot C = AC + BC$$

Důkaz: 1.) $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$

$$2.) (A+B)+C = ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) = A + (B+C)$$

$$3.) (\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha + \beta) (a_{ij}) = (\alpha + \beta) a_{ij} = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha (a_{ij}) + \beta (a_{ij}) = \alpha A + \beta A$$

4.)

$$8.) (A \cdot B) \cdot C = \left[(a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \cdot (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p}} \right] \cdot (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, k}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, p}} \cdot (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, k}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} b_{kj} \right) c_{ij} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} b_{kj} c_{ij} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k}} = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ik} (b_{kj} c_{ij}) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^p b_{kj} c_{ij} \right) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k}} = (a_{ij}) \cdot ((b_{ij}) \cdot (c_{ij})) =$$

$$= A \cdot (B \cdot C)$$

Pr: Dokažte, že $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
 (A \cdot B)^T &= \left[\begin{pmatrix} \bar{r}_{1A} \\ \bar{r}_{2A} \\ \vdots \\ \bar{r}_{mA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{s}_{1B} & \bar{s}_{2B} & \dots & \bar{s}_{pB} \end{pmatrix} \right]^T = \begin{bmatrix} \bar{r}_{1A} \bar{s}_{1B} & \bar{r}_{1A} \bar{s}_{2B} & \dots & \bar{r}_{1A} \bar{s}_{pB} \\ \bar{r}_{2A} \bar{s}_{1B} & \bar{r}_{2A} \bar{s}_{2B} & \dots & \bar{r}_{2A} \bar{s}_{pB} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_{mA} \bar{s}_{1B} & \bar{r}_{mA} \bar{s}_{2B} & \dots & \bar{r}_{mA} \bar{s}_{pB} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{r}_{1A} \bar{s}_{1B} & \bar{r}_{2A} \bar{s}_{1B} & \dots & \bar{r}_{mA} \bar{s}_{1B} \\ \bar{r}_{1A} \bar{s}_{2B} & \bar{r}_{2A} \bar{s}_{2B} & \dots & \bar{r}_{mA} \bar{s}_{2B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_{1A} \bar{s}_{pB} & \bar{r}_{2A} \bar{s}_{pB} & \dots & \bar{r}_{mA} \bar{s}_{pB} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^T \cdot A^T &= \begin{pmatrix} \bar{s}_{1B} & \bar{s}_{2B} & \dots & \bar{s}_{pB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_{1A} \\ \bar{r}_{2A} \\ \vdots \\ \bar{r}_{mA} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{s}_{1B} \\ \bar{s}_{2B} \\ \vdots \\ \bar{s}_{pB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_{1A} & \bar{r}_{2A} & \dots & \bar{r}_{mA} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{s}_{1B} \bar{r}_{1A} & \bar{s}_{1B} \bar{r}_{2A} & \dots & \bar{s}_{1B} \bar{r}_{mA} \\ \bar{s}_{2B} \bar{r}_{1A} & \bar{s}_{2B} \bar{r}_{2A} & \dots & \bar{s}_{2B} \bar{r}_{mA} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{s}_{pB} \bar{r}_{1A} & \bar{s}_{pB} \bar{r}_{2A} & \dots & \bar{s}_{pB} \bar{r}_{mA} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

KD!

Př. 1. Necht' $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Numericky vzhledně vypočítejte:

$$a) 3A + 3B = \begin{cases} \underbrace{3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{3 násobení}} + \underbrace{3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{3 součtu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{3 násobení}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{\text{3 součtu}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$3(A+B) = 3 \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{3 součtu}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{3 násobení}} \right) = 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{"správný" postup}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & 12 \end{pmatrix}}}$$

$$b) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3 \cdot (3m+2s) = 18m+12s} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{3s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \quad 18m+15s$$

$$A \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{3s} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}}} \quad 9m+9s$$

$$c) (A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{9 \cdot (3m+2s) = 27m+18s} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3 \cdot (3m+2s) = 9m+6s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \quad 36m+24s$$

$$A \cdot (B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = A \cdot \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{9m+6s} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{9m+6s} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}}} \quad 18m+12s$$

2. k. cvičení

Př.: Necht' $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ určete

$$1.) A+B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$4.) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$2.) 3A+3B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 15 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}}}$$

$$5.) B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}}$$

$$3.) A^T + B^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$6.) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$7.) (A^3) A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 18 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}}}$$

$$8.) A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 18 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}}}$$

$$9.) A \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 11 & -1 & 9 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$10.) A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}}}$$

$$11.) B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$12.) A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Toto uzávorkování je numericky výhodnější

Transformační matice

Př: Vypočítejte:

$$1.) \underset{\text{"T"}}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \underset{\text{"A"}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{"T} \cdot \text{A}}{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}} = 3 \cdot \text{A}$$

$$2.) \underset{\text{"T"}}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{\text{"A"}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{"T} \cdot \text{A}}{\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3r_{1A} \\ 2r_{2A} \\ -1r_{3A} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{TvA vynásobí 1. řádek číslem 3, druhý řádek číslem 2 a 3. řádek číslem -1}$$

$$3.) \underset{\text{"T"}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{\text{"A"}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{\text{"T} \cdot \text{A}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} r_{1A} \\ r_{3A} \\ r_{2A} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{TvA vymění 2. a 3. řádek}$$

$$4.) \underset{\text{"T"}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\text{"A"}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{"T} \cdot \text{A}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} r_{1A} \\ r_{1A} + r_{2A} \\ r_{3A} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{TvA přičte ke 2. řádku řádek 1.}$$

$$5.) \underset{\text{"T"}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\text{"A"}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{\text{"T} \cdot \text{A}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} r_{1A} \\ r_{2A} \\ 2r_{2A} + r_{3A} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{TvA přičte 2-násobek řádku druhého k řádku třetímu}$$

Př: Určete transformační matici, která v matici A typu (3,3)

1. první řádek nezmění a 2.) odečte řádek 1. od řádku 2. a 3.) 4-násobek řádku druhého přičte k řádku třetímu:

$$\underline{\underline{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Při Určete transformační matici, která provede smatici A typu (3,3) následující řádkové úpravy (v daném pořadí)

1.) výměni 1. a 2. řádek

2.) ke 2. ř. přičte -3-násobek řádku prvního a ke 3. řádku přičte 2-násobek prvního

3.) ke 3. ř. přičte (-5)-ti násobek řádku 2.

$\Rightarrow$ Máme A $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ První úprava: $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ obdržíme: $T_1 A$

$\Rightarrow$ Druhá úprava: $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ obdržíme: $T_2(T_1 A)$

$\Rightarrow$ Třetí úprava: $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ obdržíme: $T_3(T_2(T_1 A))$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & (T_3 T_2 T_1) \cdot A \\ & \parallel \\ & T \cdot A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ T je transformační matice, která s A provede požadované úpravy v daném pořadí $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} T &= T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 17 & 1 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Poznámka: Matici T můžeme také obdržet tak, že požadované úpravy děláme s jednotkovou maticí:

$$E \rightarrow T_1 \cdot E \rightarrow T_2 T_1 E \rightarrow \underbrace{T_3 T_2 T_1}_{\parallel T} E = T \cdot E = T$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 17 & 1 \end{pmatrix} = T \\ E & \quad T_1 E \quad T_2 T_1 E \quad T_3 T_2 T_1 E = T \cdot E = T \end{aligned}$$

Obecně: Provádějme řádkové úpravy v A a stejné úpravy v E $\Rightarrow$

$$\left(A \mid E \right) \sim \left(T_1 A \mid \underbrace{T_1 E}_{T_1} \right) \sim \left(T_2 T_1 A \mid T_2 T_1 \right) \sim \dots \sim \left(\underbrace{T_n \dots T_2 T_1 A}_{\cancel{A}^e} \mid \underbrace{T_n \dots T_2 T_1}_{T} \right)$$

$$\Rightarrow T \cdot A = \cancel{A}^e$$

$\Rightarrow$ matice T převede A na matici $\cancel{A}^e$

Pří: Zjistěte alespoň jednu transformační matici, která převede matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ na schodový tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-v_1]{+v_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-v_2]{+v_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{A} \quad \underbrace{\quad}_{E} \quad \underbrace{\quad}_{T \cdot A} \quad \underbrace{\quad}_{T}$

ZK: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{matice ve schodovém tvaru}$

Inverzní matice

Def (Inverzní matice): Necht' A je čtvercová matice. Matice inverzní k matici A nazveme maticí A^{-1} splňující:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Poznámka: 1.) Ne každá matice má k sobě matice inverzní.
(ty, co mají, se nazývají regulární, ty, co ne, singulární.)

2.) Pokud $A \cdot A^{-1} = E$, bude platit i $A^{-1} \cdot A = E$.

(ale pozor! Obecně NEPLATÍ, že $A \cdot B = B \cdot A$ — AB může být jiné, než BA !!!)

3.) Postup při hledání A^{-1} :

$$(A | E) \sim \dots \sim (E | A^{-1})$$

(můžeme vynásobovat řádky, násobit nemul. číslem, přičítat řádky k jiným.)

Př. úk. Najdeme-li matice inverzní k matici A .

1.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\begin{matrix} E & A^{-1} \end{matrix}$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Zk. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!

Pr. 1. Nađite matricu inverznu k matrici A

1.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\bar{A}^{-1} \text{ ne postoji!}}}$$

2.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_1, +r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2r_3, -r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\bar{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

ZK: $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ok!}$

3.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\bar{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

ZK: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ok!}$

Inverzní matice

U čtvercových matic A definujeme její inverzní matici A^{-1} vztahem

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \text{jednotková matice} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pro danou matici A najdeme A^{-1} (pokud existuje) postupem:

$$(A | I) \xrightarrow[\text{matice}]{\text{převodeme}} (I | A^{-1})$$

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Najdeme $A^{-1} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_A \quad \underbrace{\quad}_I$
řádky chceme
abychy bylo
 $\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

zkouška: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I \quad \checkmark \text{ výsledek je v pořádku}$

Př: $A^{-1} = ? \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-4)}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -20 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{1:4} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{+}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí $\bar{A}^{-1}$

Můžeme tak řešit soustavu n rovnic o n neznámých (pokud $\bar{A}^{-1}$ existuje).

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b}} \quad \dots \text{maticový zápis soustavy lineárních rovnic}$$

upravíme: $A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad | \cdot \bar{A}^{-1}$

$$\underbrace{\bar{A}^{-1} \cdot A}_{\bar{I}} \cdot \bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\underbrace{\bar{I} \cdot \bar{x}}_{\bar{x}} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\underline{\underline{\bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}}}$$

$\Rightarrow$ Př: Máme náležitě řešení soustavy rovnic

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\underline{-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Z předchozího příkladu víme, že $\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Potom

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -5, x_2 = -5, x_3 = 7}}$$

Př. 1. Vyřešte soustavu rovnic s více pravými stranami pomocí $\bar{A}^{-1}$:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = \begin{matrix} \swarrow 1. \text{ soust.} & \swarrow 2. \text{ soust.} & \swarrow 3. \text{ soustava} \\ 5 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$$X_2 + 2X_3 = 3 \quad -2 \quad 0 \Rightarrow A \cdot \tilde{x} \approx B$$

$$X_1 - 2X_2 = \underbrace{-1 \quad 1 \quad -2}_B \quad \tilde{x} \approx \bar{A}^{-1} \cdot B$$

~~ve~~ ve sloupcích výsledné matice jsou řešení jednotlivých soustav

$\Rightarrow$ Uvěme $\bar{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+5r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \cdot 9 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -45 & 9 & -27 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} +5r_3 \\ -2r_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \bar{A}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{A}^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 9 & -18 \\ 9 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Řešení 1. soustavy: $\bar{x} = (1, 1, 1)$

$\Rightarrow$ Řešení 2. soustavy: $\bar{x} = (1, 0, -1)$

$\Rightarrow$ Řešení 3. soustavy: $\bar{x} = (-2, 0, 0)$

Pr. 1 Nalezněte matici inverzní k matici A $(A|E) \rightarrow (E|\bar{A})$

$$1.) A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 11 & 10 & 4 \\ -5 & 5 & -5 \\ -4 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

Pr. 3 Vyřešte soustavu rovnic s více pravicemi stranami pomocí $\bar{A}^{-1}$

$$A \cdot \bar{x} \approx B$$

$$/\bar{A}^{-1}$$

B - matice daných sloupců pravých stran

$$\bar{x} \approx \bar{A}^{-1} \cdot B$$

$\bar{A}^{-1} \cdot B$ - matice ^{sloupců} řešení provedené B

$$\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{viz předch. Pr.})$$

$$\Rightarrow \bar{A}^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\swarrow$ řeš. pro $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\swarrow$ řeš. pro $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\swarrow$ řeš. pro $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\swarrow$ řeš. pro $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pr. 2 Nalezněte LU-rozklad matice A

Pr. 2 Vyřešte soustavu rovnic ~~s více pravicemi LU-rozkladem~~ pomocí $\bar{A}^{-1}$

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad / \bar{A}^{-1}$$

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$1x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1$$

$\Downarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

podle předch. pr.

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 11 & 10 & 4 \\ -5 & 5 & -5 \\ -4 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 11 & 10 & 4 \\ -5 & 5 & -5 \\ -4 & -10 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Pr. 3 Nalezněte transformační matici T , která

1.) $2v_1$ přičte k v_2 a $-3v_1$ přičte k v_3

2.) v_2 změní v_3 a v_3

3.) $k v_3$ přičte $-3v_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = T$$