

Soustavy lineárních rovnic

Pr:
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$$
 soustava 2 rovnic o 2 neznámých

otázka: jaké čísla musíme dosadit za x_1 a x_2 ~~musíme~~, aby byly splněny rovnosti?

řešení: $x_1 = 1, x_2 = 1$

Obecně: Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých zapisujeme ve tvaru:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

matice soustavy: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

matice soust. rozšířená: $\Pi = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Čísla a_{ij} a b_i známe, cílem je určit $x_1, \dots, x_n$. Pozor! řešení nemusí vždy existovat! Pokud ano, jak jej určíme? Existuje více metod.

Gaussova eliminační metoda: Cílem je upravit matici Π tak, aby poddiagonála byla nulová. Pak určit $\vec{x}$.

Pr: $x_1 + x_2 = 2$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$0x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1)^T$$

maticeový zápis

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+1 \cdot \text{ř. 1}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{1:2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + 1 = 2$$

$$x_1 = 1$$

Pr: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{výměna řádků}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

1. řádek vynásobit 3 a přičíst k 2. řádku
pak 1. řádek vynásobíme 2 a přičteme k 3. řádku

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \cdot 5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right)$$

3. řádek $\Rightarrow -3x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = 1$

2. řádek $\Rightarrow 5x_2 - 2x_3 = -2 \Rightarrow 5x_2 - 2 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$

1. řádek $\Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = -2 \Rightarrow x_1 + 0 - 1 = -2 \Rightarrow x_1 = 1$

Př. Následující soustava nemá řešení:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+ \\ -}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow 0 = -1 \text{ spor!} \Rightarrow \text{neexistují } x_1, x_2, x_3 \text{ takové, aby platily všechny rovnosti zároveň.}$$

$\Rightarrow$ nemá řešení

Př. Následující soustava má nekonečně mnoho řešení

$$x_1 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-1) \cdot \text{řádek 1} \\ (-3) \cdot \text{řádek 1}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \cdot \text{řádek 2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2. řádek: $x_2 - 2x_3 = -5$

(Znakujeme v jedné rovnici, protože jedná o nich zvolíme za parametr. Třeba $x_3 = t \in \mathbb{R}$, x_2 pak musíme dopočítat) $\Rightarrow \underline{x_3 = t}$

$$x_2 - 2t = -5$$

$$\underline{x_2 = 2t - 5}$$

1. řádek: $x_1 + x_3 = 5$

$$x_1 + t = 5$$

$$\underline{x_1 = -t + 5}$$

$\Rightarrow$ vektor řešení $\underline{\underline{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (-t + 5, 2t - 5, t), t \in \mathbb{R}}}$

Pr. Pomoci' Gaussovy eliminační metody určete řešení soustavy:

1.) $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

$x_1 + x_3 + x_4 = 1$

$x_2 + x_4 = -1$

$-x_1 + x_3 - x_4 = 2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_2, +r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

hodnost A = hodnost matice rozšířené = 3 < 4 = počet neznámých $\Rightarrow$ volíme parametr

$\Rightarrow 2x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}$; z 2. rovnice plyne $-x_2 - x_4 = 1$ volíme

$x_4 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow -x_2 - \lambda = 1 \Rightarrow x_2 = -\lambda - 1$ i z 1. rovnice:

$x_1 + (-\lambda - 1) + \frac{3}{2} + 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} - \lambda \Rightarrow$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda \\ -\lambda - 1 \\ \frac{3}{2} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R}$

2.) $3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1$

$6x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -1$

$6x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$h(A) = h(M) = 2 < 4$ neznámé $\Rightarrow$ 2 parametry:

$2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow$ zvolíme $x_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x_3 = 1 - 2\lambda$; z 1. rovnice:

$3x_1 + \lambda - (1 - 2\lambda) + x_4 = -1 \Rightarrow$ zvolíme $x_1 = \delta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$3\delta + \lambda - (1 - 2\lambda) + x_4 = -1 \Rightarrow x_4 = -3\delta - 3\lambda$

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} \delta \\ \lambda \\ 1 - 2\lambda \\ -3\delta - 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \delta, \lambda \in \mathbb{R}$

Pr. Pomocí Gaussovy eliminační metody uřešte řešení soustavy :

$$\begin{array}{rcl} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 & = & 1 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 & = & 5 \\ 3X_1 + 5X_2 + X_3 & = & 11 \\ -X_2 - 2X_3 + 3X_4 & = & -4 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -3r_1 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow (2) \\ \Rightarrow (1) \\ \\ \end{array}$$

$$(1) \Rightarrow X_1 + 2X_3 - 3X_4 = 4 \quad | \text{ zvolíme parametry } \underline{X_4 = t \in \mathbb{R}} \quad \underline{X_3 = s \in \mathbb{R}}$$

$$X_2 + 2s - 3t = 4$$

$$\underline{\underline{X_2 = 4 - 2s + 3t}}$$

$$(2) \Rightarrow X_1 + (4 - 2s + 3t) - s + 2t = 1$$

$$X_1 + 4 - 3s + 5t = 1$$

$$\underline{\underline{X_1 = -3 + 3s - 5t}}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \begin{pmatrix} -3 + 3s - 5t \\ 4 - 2s + 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}$$

Zkouška:

$$\begin{array}{rcl} (-3 + 3s - 5t) + (4 - 2s + 3t) - s + 2t & = & 1 \\ (-3 + 3s - 5t) + (8 - 4s + 6t) + s - t & = & 5 \\ (-9 + 9s - 15t) + (20 - 10s + 15t) + s & = & 11 \\ (-4 + 2s - 3t) - 2s + 3t & = & -4 \end{array}$$

Př: Vyřešte soustavu lineárních rovnic s komplexními koeficienty

$$(1+i)x_1 + (2-i)x_2 = 5-2i$$

$$(3+2i)x_1 + i x_2 = -2+6i$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1+i) & (2-i) & 5-2i \\ (3+2i) & i & -2+6i \end{array} \right) \cdot (3+2i) \sim$$

$$(1+i) \cdot (3+2i) = 1+5i$$

$$(2-i) \cdot (3+2i) = 8+i$$

$$(3+2i) \cdot (1+i) = 1+5i$$

$$(i) \cdot (1+i) = -1+i$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} (1+5i) & (8+i) & 19+4i \\ (1+5i) & (-1+i) & -8+4i \end{array} \right) - r_1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} (1+5i) & (8+i) & 19+4i \\ 0 & -9 & -27 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 3}} \quad (\text{Dosadíme do 1. rovnice} \Rightarrow)$$

$$(1+5i)x_1 + (8+i)3 = 19+4i$$

$$(1+5i)x_1 + 24+3i = 19+4i$$

$$(1+5i)x_1 = -5+i$$

$$x_1 = \frac{-5+i}{1+5i} = \frac{(-5+i)}{(1+5i)} \cdot \frac{(1-5i)}{(1-5i)} = \frac{-5+5+i+25i}{26} = \frac{26i}{26} = \underline{\underline{i}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{X} = (i, 3)}}$$

Gaussova eliminační metoda

Pr. 1: $3X_1 - 2X_2 + 2X_3 = 10$

$X_1 + 3X_2 - X_3 = 2$

$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 15$

Řeš: $X_1 = 2$
 $X_2 = 1$
 $X_3 = 3$

$\bar{X} = (2, 1, 3)$

Pr. 2: $X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 0$
 $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$
 $-X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 0$

⇒ má řešení
1 / ∞ mnoho?

Řeš: $X_1 = 0$
 $X_2 = 0$
 $X_3 = 0$

$\bar{X} = (0, 0, 0)$

Pr. 3: $X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 3$
 $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 3$
 $-X_1 + 3X_2 + X_3 = 2$

Řeš: nemá řešení

Pr. 4: $X_1 + 2X_2 - X_3 = 5$
 $2X_1 - X_2 + 3X_3 = -5$
 $4X_1 + 3X_2 + X_3 = 5$

Řeš: $X_1 = -1 - \lambda$
 $X_2 = 3 + \lambda$
 $X_3 = \lambda$

$\lambda \in \mathbb{R}$

najdete řešení! kde $X_2 = 13$
 $\Rightarrow \bar{X} = (-11, 13, 10)$

Pr. 5: $X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 5$
 $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 5$
 $-X_1 + 3X_2 + X_3 = 0$

Řeš: $X_1 = 3 - 2\lambda$
 $X_2 = 1 - \lambda$
 $X_3 = \lambda$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Pr. 6: a) $X_1 - 3X_2 - X_3 + 5X_4 = 0$
 $2X_1 + X_2 + 5X_3 + 3X_4 = 0$
 $X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 = 0$

Řeš: $X_1 = -2s - 2t$
 $X_2 = \lambda - b$
 $X_3 = s$
 $X_4 = \lambda$

a) najděte nějaké řešení! kde $X_2 = 2$
 $\Rightarrow$ např. $\lambda = 2, b = 0 \Rightarrow \bar{X} = (-4, 2, 0, 2)$

c) najděte všechna řešení! kde $X_2 = 2$
 $\Rightarrow \lambda - s = 2 \Rightarrow \lambda = s + 2 \Rightarrow \bar{X} = (-4 - 4s, 2, s, s + 2), s \in \mathbb{R}$

Pr. 7: $3A + 2B = 10$ (nožiček)
 $2A + 4B = 16$ (nožiček)

$B = 3,5$ nožiček

$A = 1$ nožička

Gauss-Jordanova metoda

$(A|b) \rightarrow (E|X)$

Pr. 8: $X_1 - X_2 + X_3 = 2$
 $X_1 + X_2 - X_3 = 0$
 $-X_1 + X_2 + X_3 = 2$

Řeš: $\bar{X} = (1, 1, 2)$

Pr. 9: $X_1 + X_2 + X_3 = 6$
 $2X_1 - 3X_2 + 3X_3 = 5$
 $-X_1 - 2X_3 = -7$

Řeš: $\bar{X} = (1, 2, 3)$

Gauss-Jordanova metoda

Řešíme soustavu rovnic $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$ převedeme na $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & | & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & | & x_n \end{pmatrix}$
 (Používáme u inverzního A)

Pr: Gauss-Jordanovou metodou vyřešte soustavu rovnic :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$$

$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -1 \\ -1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 3 & -1 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+r_1 \\ -2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 7 & -3 & | & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_2 \\ +7r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 3 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -17 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot(-1) \\ :(-17)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-5r_3 \\ -2r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\underline{\bar{X} = (3, 2, 0)}}$$

Pr: Gauss-Jordanovou metodou vyřešte soustavu rovnic :

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$$

$$-3x_1 + x_2 - x_3 = -4$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ -3 & 1 & -1 & | & -4 \\ 4 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot 2 \\ -2r_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ -6 & 2 & -2 & | & -8 \\ 4 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+3r_1 \\ -2r_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ 0 & -1 & 7 & | & 7 \\ 0 & 5 & -7 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+r_2 \\ +5r_2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & | & -2 \\ 0 & -1 & 7 & | & 7 \\ 0 & 0 & 28 & | & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & | & -2 \\ 0 & -1 & 7 & | & 7 \\ 0 & 0 & 28 & | & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{:(-2) \\ \cdot(-1) \\ :28}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -1 \\ 0 & 1 & -7 & | & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+2r_3 \\ +7r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{\bar{X} = (1, 0, 1)}}$$

Pr. Gauss-Jordanovou metodou vyřešíme soustavu:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-3) \uparrow \\ \cdot (-2) \downarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-4) \\ \cdot (11) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & 5 & 4 \\ 0 & -44 & -20 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 44 & -20 & -16 \\ 0 & 0 & 35 & 105 \end{array} \right) \begin{array}{l} :4 \\ :35 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-5) \uparrow \\ \cdot (-3) \downarrow \end{array} \sim$$

Nyní dostaneme nuly i nad
diagonálou (opíšeme 3. řádek
a upravíme 1. a 2. řádek)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} :11 \\ \cdot (-3) \downarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{array} \Rightarrow \bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (2, 1, 3)^T$$

Pr. 11. Gauss-Jordanovou metodou vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\underline{-x_1 + x_2 - 2x_3 = -2}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$

$$\underline{-x_1 + x_2 - 2x_3 = -5}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$\underline{-x_1 + x_2 - 2x_3 = -2}$$

Všechny tři soustavy mají stejnou matici soustavy, liší se jen pravými stranami. (Zde o tzv. soustavu s více pravými stranami.) $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

E. řešení

řešení 1. soustavy: $\underline{\underline{\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

řešení 2. soustavy: $\underline{\underline{\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

řešení 3. soustavy: $\underline{\underline{\bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí $\bar{A}^{-1}$

Můžeme tak řešit soustavu n rovnic o n neznámých (pokud $\bar{A}^{-1}$ existuje).

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b}} \quad \dots \text{maticový zápis soustavy lineárních rovnic}$$

upravíme: $A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad | \cdot \bar{A}^{-1}$

$$\underbrace{\bar{A}^{-1} \cdot A}_{\bar{I}} \cdot \bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\underbrace{\bar{I} \cdot \bar{x}}_{\bar{x}} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\underline{\underline{\bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b}}}$$

$\Rightarrow$ Př: Máme náležitě řešení soustavy rovnic

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\underline{-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Z předchozího příkladu víme, že $\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Potom

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -5, x_2 = -5, x_3 = 7}}$$

Př. 1. Vyřešte soustavu rovnic s více pravými stranami pomocí $\bar{A}^{-1}$:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 = 5 \quad \begin{matrix} \swarrow \text{1. soust.} \\ \downarrow \text{2. soust.} \\ \swarrow \text{3. soustava} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$$

$$X_2 + 2X_3 = 3 \quad -2 \quad 0 \Rightarrow A \cdot \tilde{x} \approx B$$

$$X_1 - 2X_2 = -1 \quad 1 \quad -2 \Rightarrow \tilde{x} \approx \underbrace{\bar{A}^{-1}}_B \cdot B$$

~~ve~~ ve sloupcích výsledné matice jsou řešení jednotlivých soustav

$\Rightarrow$ Uvěme $\bar{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+5r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \cdot 9 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -45 & 9 & -27 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} +5r_3 \\ -2r_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \bar{A}^{-1} = \frac{1}{9} \left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{A}^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{array} \right) = \frac{1}{9} \left(\begin{array}{ccc} 9 & 9 & -18 \\ 9 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Řešení 1. soustavy: $\bar{x} = (1, 1, 1)$

$\Rightarrow$ Řešení 2. soustavy: $\bar{x} = (1, 0, -1)$

$\Rightarrow$ Řešení 3. soustavy: $\bar{x} = (-2, 0, 0)$