Vektorový prostor

Def. (Reálný vektorový prostor): Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel (nebo též reálným vektorovým prostorem) nazveme uspořádanou trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je množina, $+$ je zobrazení definované na $V \times V$, $\cdot$ je zobrazení definované na $\mathbb{R} \times V$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$:

1.) $\alpha \cdot \bar{x} \in V$

2.) $\bar{x} + \bar{y} \in V$

3.) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ (sčítání je asociativní)

4.) $\exists \bar{o} \in V\ \forall \bar{x} \in V : \bar{o} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{o} = \bar{x}$ (existence nulového vektoru $\bar{o}$)

5.) $\forall \bar{x} \in V\ \exists -\bar{x} \in V : \bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{o}$ (ke každému vekt. existuje v. opačný)

6.) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (sčítání je komutativní)

7.) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

8.) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$

9.) $\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{x}$

10.) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

Prvky množiny V nazýváme vektory vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.

Poznámka: Formálně – podle definice – je vektorový prostor uspořádaná trojice $(V, +, \cdot)$ s vlastnostmi popsanými v definici. Intuitivně můžeme vektorový prostor chápat jako množinu, na níž jsme definovali sčítání (vektorů) a násobení (číslo krát vektor) a toto sčítání a násobení má „hezké" vlastnosti – tj. vlastn. 1.) – 10.).

Množinu na níž je definováno sčítání jejích prvků tak, že jsou splněny podmínky 2.) až 6.) nazýváme komutativní grupou. Tj. $(V, +)$ je komutativní grupa.

Poznámka: Jestliže $\bar{o}$ je nulovým vektorem ve vektorovém prostoru $(V,+,\cdot)$ nad $\mathbb{R}$, potom platí:

1.) $\forall \bar{x} \in V: \quad 0 \cdot \bar{x} = \bar{o}$

2.) $\forall \bar{x} \in V: \quad -1 \cdot \bar{x} = -\bar{x}$

3.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot \bar{o} = \bar{o}$

D: ad 1) $\forall x \in V: \quad 0 \cdot \bar{x} + \bar{x} = 0 \cdot \bar{x} + 1 \cdot \bar{x} = (0+1) \cdot \bar{x} = 1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \Rightarrow$

$$0 \cdot \bar{x} + \bar{x} = \bar{x} \qquad / + (-\bar{x}) \text{... existuje } \forall x \in V$$
$$0 \cdot \bar{x} + \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{x} + (-\bar{x})$$
$$0 \cdot \bar{x} + \bar{o} = \bar{o}$$
$$0 \bar{x} = \bar{o}$$

ad 2) $\forall x \in V: \quad -1 \cdot \bar{x} + \bar{x} = -1 \cdot \bar{x} + 1 \cdot \bar{x} = (-1+1) \bar{x} = 0 \cdot \bar{x} = \bar{o} \Rightarrow$

$$-1 \cdot \bar{x} + \bar{x} = \bar{o} \qquad / + (-\bar{x})$$
$$-1 \cdot \bar{x} + \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{o} + (-\bar{x})$$
$$-1 \cdot \bar{x} + \bar{o} = -\bar{x}$$
$$-1 \cdot \bar{x} = -\bar{x}$$

ad 3.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}:$ podle 1.) je $0 \cdot \bar{o} = \bar{o}$ (volíme $\bar{x} = \bar{o} \in V$) $\Rightarrow$

$$\alpha \cdot \bar{o} = \alpha \cdot (0 \cdot \bar{o}) = (\alpha \cdot 0) \bar{o} = 0 \cdot \bar{o} = \bar{o}$$

$\square$

Příklady vektorových prostorů:

1.) Reálná čísla : $V = \mathbb{R}$. zvolíme-li v definici vektorového prostoru za V množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a uvažujeme-li obvyklé sčítání a násobení reálných čísel, pak platí: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1.) $u+v \in \mathbb{R}$

2.) $(u+v)+w = u+(v+w)$

3.) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \; : \; u+0 = 0+u = u$ (nula)

4.) $\forall u \in \mathbb{R}\; \exists -u \in \mathbb{R} : u+(-u) = 0 = (-u)+u$

5.) $u+v = v+u$

6.) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

7.) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

8.) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

9.) $1 . u = u$

Proto $(\mathbb{R},+,\cdot)$ je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$).

2.) Matice daného typu (m,n) : $V = M_{m,n}$ = množina matic reálných čísel o m řádcích a n sloupcích

Matici A obsahující prvky $\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ budeme značit (a_{ij})

sčítání matic a jejich násobení definujeme $\forall (a_{ij}),(b_{ij}) \in M_{m,n}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ následovně:

a) sčítání : $(a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})$ (tj. sečteme prvky na stejných místech např. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix}$)

b) násobení : $\alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$ (tj. číslem α vynásobíme každý prvek matice, např. $3\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -3\\ 9 & 0\end{pmatrix}$)

Definujeme-li sčítání a násobení takto, potom $\forall$ matici $A,B,C \in M_{m,n}$ a $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ platí:

1.) $A+B \in M_{m,n}$ (součet dvou matic typu (m,n) je zase matice typu (m,n))

2.) $(A+B)+C = A+(B+C)$

3.) nulová matice $O = \begin{pmatrix}0 \cdots 0\\ 0 \cdots 0\end{pmatrix} \in M_{m,n}$ a platí $\forall A \in M_{m,n}$: $O+A = A+O = A$

4.) $\forall A = (a_{ij}) \in M_{m,n} \;\; \exists -A = (-a_{ij}) \in M_{m,n}$: $A+(-A) = O = (-A)+(A)$

5.) $A+B = B+A$

6.) $\alpha\cdot(A+B) = \alpha A + \alpha B$

7.) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

8.) $\alpha\cdot(\beta A) = \alpha.\beta A$

9.) $1 \cdot A = A$

3.) Aritmetické vektory: $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$,

$\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel.
Sčítání n-tic a jejich násobení reálným číslem definujeme
$\forall (a_1, \dots, a_n) = \bar{a}, (b_1, \dots, b_n) = \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ následovně

a) Sčítání: $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ (např. $(1,-1,3)+(1,0,2) = (2,-1,5)$)

b) Násobení: $\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$ (např. $3 \cdot (1,-1,3,5) = (3,-3,9,15)$)

Potom $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí podmínky 1.) až 9.)
(viz. definice vektorového prostoru!!!).

4.) Reálné funkce: $V = \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ = množina funkcí $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$, tj. $f(x)$ je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$.
Součet dvou funkcí z $\mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ a násobení funkcí číslem definujeme $\forall f, g \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ a $\forall x \in \mathbb{R}$ následovně:

a) Sčítání: $f+g$ je funkce daná předpisem: $\forall x \in \mathbb{R}: (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
(tj. funkční hodnotu funkce $f+g$ v bodě x určíme jako součet funkčních hodnot $f(x)$ a $g(x)$)
(např. $f(x) = x^2, g(x) = x \Rightarrow (f+g)(x) = x^2 + x$)

b) Násobení: $\alpha \cdot f$ je funkce daná předpisem: $\forall x \in \mathbb{R}: (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
(tj. funkční hodnotu funkce αf v bodě x určíme jako součin reálných čísel α a $f(x)$)
(např. $\alpha = 5$, $f(x) = x^3 \Rightarrow (5f)(x) = 5x^3$)

Definujeme-li na $\mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ sčítání a násobení takto, potom $\forall f, g, h \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

1.) $f+g \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ (f i g jsou definované na $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ existují hodnoty $f(x)$ i $g(x)$ $\Rightarrow$ existuje i $(f+g)(x)$ $\Rightarrow$ $f+g$ je také definovaná na $\mathbb{R}$)

2.) $(f+g)+h = f+(g+h)$ (neboť $\forall x \in \mathbb{R}: (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$)

3.) definujeme-li: $o \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ je funkce daná předpisem $o(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall f \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}: f + o = o + f = f$

4.) $\forall f \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ $\exists -f \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$, kde $(-f)(x) = -f(x)$: $f + (-f) = (-f) + f = o$
(neboť $f(x) + (-f(x)) = -f(x) + f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

5.) $f+g=g+h$ (neboť $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$)

6.) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $(\alpha(f+g))(x)=\alpha\cdot(f+g)(x)=\alpha(f(x)+g(x))=$
$=\alpha f(x)+\alpha g(x)$)

7.) $(\alpha+\beta)\cdot f=\alpha f+\beta f$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $((\alpha+\beta)f)(x)=(\alpha+\beta)\cdot f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)$)

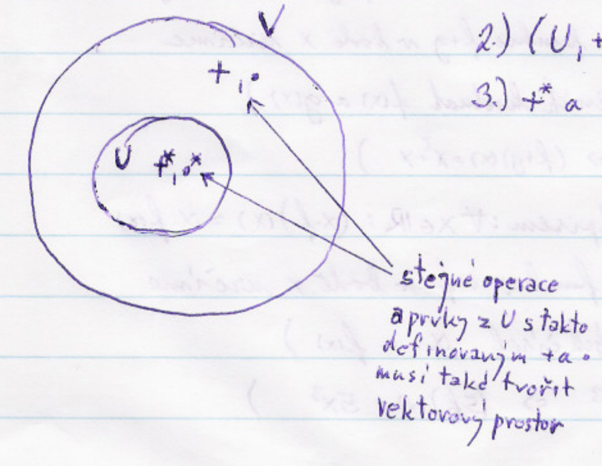
8.) $(\alpha\cdot\beta)f=\alpha(\beta f)$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $((\alpha\cdot\beta)f)(x)=(\alpha\cdot\beta)f(x)=\alpha\cdot(\beta f(x))$)

9.) $1.f=f$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$)

Podprostor

Def (Podprostor): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor. Potom $(U,+^*,\cdot^*)$ je podprostor vektorového prostoru V, právě když jsou splněny podmínky:

1.) $U\subseteq V$
2.) $(U,+^*,\cdot^*)$ je vektorový prostor
3.) $+^*$ a $\cdot^*$ jsou restrikce $+$ a $\cdot$ (tj. sčítání a násobení na U definováno stejně jako na V, ale jen pro prvky z U).



Příklad: Zvolme za V vektorový prostor matic $M_{(2,2)}$, tj. matic o dvou řádcích a dvou sloupcích. Uvažujme množinu U, která obsahuje matice typu (2,2), které mají na diagonále nuly, tj. matice $\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}$, kde $a,b\in\mathbb{R}$.
Tvoří U podprostor V (jestliže na U definujeme + a · stejně jako na V)?

Řešení: Zkontrolujeme platnost podmínek z definice podprostoru:

ad 3.) Podle zadání předpokládáme, že sčítání a násobení na U definujeme stejně jako na V (ale jen pro prvky z U) $\Rightarrow$ Podmínka 3.) je splněna.

ad 1.) Všechny matice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in U$ patří také do $V = M_{(2,2)}$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow U \subseteq V \quad \Rightarrow$ Podmínka 1.) je splněna.

ad 2.) Je $(U,+,\cdot)$ vektorový prostor? Měli bychom (podle def.) ověřit, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in U$ platí:

1.) $\alpha \cdot \bar{x} \in U$
2.) $\bar{x} + \bar{y} \in U$
3.) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x} + (\bar{y}+\bar{z})$
4.) $\exists \bar{o} \in U \; \forall \bar{x} \in U: \; \bar{x}+\bar{o} = \bar{o}+\bar{x} = \bar{x}$
⋮
10.) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

Podmínky 3.) až 10.) ale nemusíme ověřovat! Jsou jistě splněny, neboť $U \subseteq V$ a $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor.

$\Rightarrow$ I.) Ověříme, že $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in U: \; \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in U$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ \alpha b & 0 \end{pmatrix} \in U \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ II.) Ověříme, že $\forall \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in U: \; \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in U$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a_1+a_2) \\ (b_1+b_2) & 0 \end{pmatrix} \in U \quad \checkmark$$

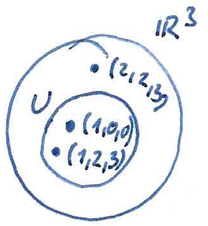
$\Rightarrow$ Podmínka 3.) je také splněna $\Rightarrow$ $\underline{\underline{(U,+,\cdot) \text{ je podprostor } (V,+,\cdot)}}$.

Pozn.: Toto platí obecně! Ověřujeme-li, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem vekt. prostoru $(V,+,\cdot)$, kde $U \subseteq V$, (pokud není řečeno jinak, předpokládáme, že na U sčítáme stejně jako na V) stačí ověřit:

I.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall \bar{x} \in U: \alpha \cdot \bar{x} \in U$ II.) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U: \; \bar{x}+\bar{y} \in U$

Př. Ověřte, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$.

a) $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(1,x_2,x_3)\mid x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$



$U\subseteq\mathbb{R}$, ale není splněno: $\forall \bar{x},\bar{y}\in U:\ \bar{x}+\bar{y}\in U$

například: $\underbrace{(1,0,0)}_{\in U}+\underbrace{(1,2,3)}_{\in U}=(\overset{\neq 1}{2},2,3)\notin U$

do U patří ty vektory, které mají první složku 1, ale tady je to 2!

$\Rightarrow$ $(U,+,\cdot)$ není podprostorem $(V,+,\cdot)$

b) $V=F_{\mathbb{R}}$ ... mža reálných fcí reálné proměnné s def. oborem $D(f)=\mathbb{R}$.

$P_2=U=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ ... mža polynomických funkcí stupně nejvýše 2.

Polynomická fce daná předpisem $f(x)=ax^2+bx+c$ má $D(f)=\mathbb{R}$ $\Rightarrow U\subseteq V$

Navíc: I.) $\forall f_1\in U$, kde $f_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$; $f_2\in U$, kde $f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c$:

f_1+f_2 je funkce daná předpisem:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^2+b_2x+c_2)=\underbrace{(a_1+a_2)}_{\in\mathbb{R}}x^2+\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in\mathbb{R}}x+\underbrace{(c_1+c_2)}_{\in\mathbb{R}}$$

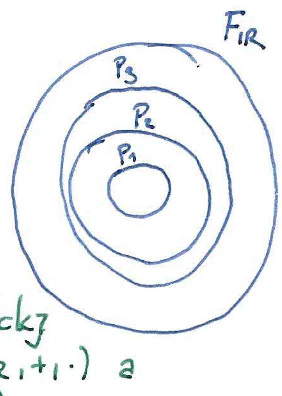
$\Rightarrow f_1+f_2\in U$

II.) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \ \forall f\in U$, kde $f(x)=ax^2+bx+c$:

$\alpha\cdot f$ je funkce daná předpisem:

$$(\alpha\cdot f)(x)=\alpha\cdot f(x)=\alpha(ax^2+bx+c)=\underbrace{(\alpha a)}_{\in\mathbb{R}}x^2+\underbrace{(\alpha b)}_{\in\mathbb{R}}x+\underbrace{(\alpha c)}_{\in\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \alpha\cdot f\in U$



$\Rightarrow$ $(P_2,+,\cdot)$ je podprostorem $(V,+,\cdot)$

Označíme-li $P_3=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(x)=ax^3+bx^2+cx+d;\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ a $P_1=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f(x)=ax+b;\ a,b\in\mathbb{R}\}$, mohli bychom analogicky ověřiti, že $(P_3,+,\cdot)$ i $(P_1,+,\cdot)$ jsou podprostory v. prostoru $(F_{\mathbb{R}},+,\cdot)$ a že $(P_1,+,\cdot)$ je podprostorem $(P_2,+,\cdot)$ a to je podprostor $(P_3,+,\cdot)$.

Př. Ověřte, zda je $(U,+,\cdot)$ podprostorem vekt. prostoru $(V,+,\cdot)$.

a) $V = \mathbb{R}^n$; $U = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{x} = \bar{o} \}$, kde $\overset{(m,n)}{A}$ je daná matice.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ a platí: 1.) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U : (A\bar{x} = \bar{o} \wedge A\bar{y} = \bar{o}) \Rightarrow$

$A(\bar{x}+\bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{o} + \bar{o} = \bar{o}$

$\Rightarrow \underline{\bar{x}+\bar{y} \in U}$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \bar{x} \in U$: $A(\alpha\bar{x}) = \alpha \cdot \underbrace{(A\bar{x})}_{=\bar{o}} = \alpha \cdot \bar{o} = \bar{o}$ protože $\bar{x} \in U$

$\Rightarrow \underline{\alpha\bar{x} \in U}$

$\Rightarrow$ <u>$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(V,+,\cdot)$</u>.

b) $V = F_{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid D(f) = \mathbb{R} \}$; $U = \{ f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(3) = 1 \}$

$U \subseteq F_{\mathbb{R}}$, ale pro $f, g \in U$: $(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f+g \notin U$

$\Rightarrow$ <u>$(U,+,\cdot)$ není podprostorem $(V,+,\cdot)$</u>

c) $V = F_{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid D(f) = \mathbb{R} \}$; $U = \{ f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(3) = 0 \}$

$U \subseteq F_{\mathbb{R}}$ a platí: 1.) $\forall f, g \in U$: $(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f+g \in U$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall f \in U$: $(\alpha f)(3) = \alpha f(3) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot f \in U$

$\Rightarrow$ <u>$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(V,+,\cdot)$</u>

Lineární kombinace vektorů

Def (Lin. kombinace): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Říkáme, že vektor $\bar{v} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \in V$ právě když existují čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\bar{v} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \ldots + k_n \bar{v}_n$$

Příklad: Snadno ověříme, že $\underbrace{2}_{k_1} \cdot \underbrace{(1,-1)}_{\bar{v}_1} + \underbrace{3}_{k_2}\underbrace{(1,2)}_{\bar{v}_2} = \underbrace{(5,4)}_{\bar{v}}$

Proto můžeme říci, že vektor $(5,4)$ je lineární kombinací vektorů $(1,-1)$

Příklad: Zjistěte, zda vektor $\bar{v} = (2,1,-3)$ je lineární kombinací vektorů $\bar{v}_1 = (1,1,0)$, $\bar{v}_2 = (0,1,1)$ a $\bar{v}_3 = (1,0,1)$.

$\Rightarrow$

Musíme zjistit, zda existují čísla x_1, x_2, x_3 takové, že

$\bar{v} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + x_3 \bar{v}_3$ / úpravami tohoto vztahu dojdeme k soustavě lineárních rovnic:

$$(2,1,-3) = x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(1,0,1)$$
$$(2,1,-3) = (x_1,x_1,0) + (0,x_2,x_2) + (x_3,0,x_3)$$
$$(2,1,-3) = (x_1+x_3,\ x_1+x_2,\ x_2+x_3)$$

/ vektory jsou si rovny, jestliže mají stejné souřadnice $\Rightarrow$ musí platit:

$$\begin{aligned} x_1+x_3 &= 2 \\ x_1+x_2 &= 1 \\ x_2+x_3 &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Dospěli jsme k tomu, že

$$\bar{v} = (2,1,-3) = 3\underbrace{(1,1,0)}_{\bar{v}_1} - 2\underbrace{(0,1,1)}_{\bar{v}_2} - 1\cdot\underbrace{(1,0,1)}_{\bar{v}_3}$$

$\Rightarrow$ vektor $\bar{v}$ je lineární kombinací vektorů $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

Poznámka: Pokud by $\bar{v}$ nebyl lineární kombinací $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ a $\bar{v}_3$, projevilo by se to ve výše uvedeném postupu tak, že řešená soustava rovnic by neměla řešení.

Př: Zjistěte, zda vektor $\vec{v} = (1,0,3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1,-1,3)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$ a $\vec{v}_3 = (1,1,5)$.

$\Rightarrow$ Hledáme $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$: $k_1(1,-1,3) + k_2(0,1,1) + k_3(1,1,5) = (1,0,3)$.

To vede na soustavu (neznámé jsou k_1, k_2, k_3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = -1 \text{ spor!}$$

$\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$

Soustava nemá řešení $\Rightarrow$ $\vec{v}$ není lin. kombinací $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Př: Zjistěte, zda polynom $p = 3x^2 - x - 2$ je lineární kombinací polynomů $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 2x^2 + x$

Polynomy můžeme reprezentovat aritmetickými vektory:

$3x^2 - x - 2 \Rightarrow (3,-1,-2)$ $\quad x^2 - 1 \Rightarrow (1,0,-1)$, $\quad x+1 \Rightarrow (0,1,1)$, $\quad 2x^2 + x \Rightarrow (2,1,0)$

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 + 2\cdot 2 = 3 \Rightarrow k_1 = -1 \\ \Rightarrow k_2 + 2 = -1 \Rightarrow k_2 = -3 \\ \Rightarrow k_3 = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ p je lin. komb. p_1, p_2, p_3: $3x^2 - x - 2 = -1(x^2 - 1) - 3(x+1) + 2(2x^2 + x)$

Př: Zjistěte, zda je polynom $p = 3x - 3$ lineární kombinací polynomů $p_1 = x - 1$ $\quad p_2 = -x + 1$ a $p_3 = 2x - 1$

Polynomy „převedeme" na aritm. vektory a řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 - k_2 + 2\cdot 0 = 3 \Rightarrow k_1 - k_2 = 3 \Rightarrow \begin{array}{l} k_2 = t \in \mathbb{R} \\ k_1 = 3 + t \end{array} \\ \Rightarrow k_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ p je lin. kombinací p_1, p_2, p_3: $3x - 3 = (3+t)(x-1) + t(-x+1) + 0(2x-1)$, $t \in \mathbb{R}$

(a dá se z nich vykombinovat nekonečně mnoho způsobů)

Lineární kombinace

Vektor $\vec{v} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V \iff \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v} = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n$$

Př: Zjistěte, zda vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$

1.) $\vec{v} = (3,-2,4)$; $\vec{v}_1 = (1,-1,3)$; $\vec{v}_2 = (1,0,1)$; $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ [$(3,-2,4) = 1\cdot(1,-1,3) + 2(1,0,1) - 1(0,1,1)$]

2.) $\vec{v} = (1,3,3)$; $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$; $\vec{v}_3 = (1,1,3)$ [$(1,3,3) = -1(1,2,0) + 3(0,1,0) + 2(1,1,3)$]

3.) $\vec{v} = (1,1,2)$; $\vec{v}_1 = (1,1,3)$, $\vec{v}_2 = (-1,0,-2)$; $\vec{v}_3 = (2,3,7)$ [$\vec{v}$ není lin. kombinací $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$]

4.) $\vec{v} = 3x^2 - 2x + 4$; $\vec{v}_1 = x^2 - x + 3$; $\vec{v}_2 = x^2 + 1$, $\vec{v}_3 = x + 1$ [stejné řešení jako 1.) $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -1$]

5.) $\vec{v} = x^2 + 3x + 3$; $\vec{v}_1 = x^2 - 2x + 1$, $\vec{v}_2 = -x^2 + x$, $\vec{v}_3 = x^2 + 4x + 2$ [$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$]

6.) $\vec{v} = x^2 - 5x + 1$; $\vec{v}_1 = x^2$, $\vec{v}_2 = x$, $\vec{v}_3 = 1$ [$\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 1\cdot\vec{v}_3$]

7.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ [např. $\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 + 1\cdot\vec{v}_2 - 1\cdot\vec{v}_3$]

8.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ [$\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 - 1\cdot\vec{v}_4$]

9.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [$\vec{v} = 1\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 + 8\vec{v}_4$]

Lineární obal množiny vektorů

Def (Lineární obal): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad R. Lineárním obalem množiny $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ nazveme množinu:

$$\langle M \rangle = \{ k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_n\vec{v}_n \mid k_1, k_2, \dots, k_n \in R \}$$

(značíme též $\langle M \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$)

Poznámka: Tj. lineární obal množiny M značíme $\langle M \rangle$ a je to množina všech možných lineárních kombinací vektorů z M.

Poznámka: Jestliže $M \subseteq V$, kde V je vektorový prostor, pak $\langle M \rangle$ je podprostor vektorového prostoru V (dá se dokázat).

Příklad: Dokažte, že $U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 + u_2 - u_3 = 0\}$ je podprostor $\mathbb{R}^3$.

=> Zjistíme, jaké vektory konkrétně patří do U => jde o vektory (u_1, u_2, u_3), jejichž souřadnice splňují $u_1 + u_2 - u_3 = 0$ =>

3 neznámé a jedna rovnice => volíme 2 parametry ->

$u_3 = t \in \mathbb{R}$, $u_2 = s \in \mathbb{R}$ => $u_1 = t - s$ =>

$$(u_1, u_2, u_3) = (t-s, s, t) = (t, 0, t) + (-s, s, 0) = t(1,0,1) + s(-1,1,0)$$

=>

$U = \{ t(1,0,1) + s(-1,1,0) \mid t, s \in \mathbb{R} \}$ => U je množina všech lineárních kombinací vektorů $(1,0,1)$ a $(-1,1,0)$ =>

$U = \langle (1,0,1), (-1,1,0) \rangle$ <=> U je lineární obal vektorů $(1,0,1)$ a $(-1,1,0)$ =>

=> U je podprostor $\mathbb{R}^3$

Př.: Ověřte, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(V,+,\cdot)$.

1.) $U = \{(a,b,a,c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$; $V = \mathbb{R}^4$

$U \subseteq V$ a navíc platí:

$U = \{a(1,0,1,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,0,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle (1,0,1,0); (0,1,0,0); (0,0,0,1) \rangle$

Lineární obal vektorů z V je podprostorem $(V,+,\cdot) \Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$

2.) $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-b=0,\ a+b+c=0\}$, $V = \mathbb{R}^3$

Vyřešme soustavu: $\left.\begin{array}{r} a-b=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 2b + c = 0 \Rightarrow \text{zvolíme parametr: } b = t \in \mathbb{R} \Rightarrow c = -2t \\ a + b + c = 0 \Rightarrow a + t - 2t = 0 \Rightarrow a = t \end{array}\right\} \Rightarrow$

$U = \{(t,t,-2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-2) \rangle \Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

(Kdybychom změnili zadání třeba na $V = \mathbb{R}^2$, nebyl by to podprostor $\mathbb{R}^2$, neboť $U \not\subseteq \mathbb{R}^2$!)

3.) $U = \{ax^3 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, $V = P_3$ ... mn. polynomů stupně nejvýše 3.

$U = \{a \cdot (x^3) + b \cdot (x) + c \cdot (1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \langle x^3, x, 1 \rangle \Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(P_3,+,\cdot)$