Lineární závislost a nezávislost

Def.: Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Vektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže existují reálná čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ z nichž je alespoň jedno nenulové (tj. $\exists k_i \neq 0$) a platí:

$$k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \ldots + k_n \bar{v}_n = \bar{o} \qquad (*)$$

V případě, že rovnice $(*)$ je splněna jen pro $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, říkáme, že vektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Př.: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $(1,-1,3)$, $(2,-2,6)$ a $(1,2,8)$.

$$-2\cdot(1,-1,3) + 1\cdot(2,-2,6) + 0\cdot(1,2,8) = (0,0,0) = \bar{o}$$

$\Rightarrow$ Vektory jsou lineárně závislé.

Př.: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů $(1,2,0)$, $(-1,2,1)$, $(1,1,1)$.

α) Podle definice: Hledáme $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$: $k_1(1,2,0) + k_2(-1,2,1) + k_3(1,1,1) = (0,0,0)$

To vede na soustavu lin. rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ \cdot(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 = 0 \\ \Rightarrow k_2 = 0 \\ \Rightarrow k_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ jediné řešení $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ $\Rightarrow$ lin. nezávislé

β) Jiný postup: Neřešíme žádnou soustavu! Jen vektory napíšeme do řádků matice a upravíme na schodový tvar. Pokud se nějaký řádek vynuluje, jsou závislé, když ne, jsou nezávislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 4 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Žádný nulový řádek $\Rightarrow$ lin. nezávislé

Poznámka: Při postupu B) je důležité upravit matici do schodového tvaru! Nuly pod diagonálou nemusí stačit!

Př: Rozhodněte o lineární závislosti vektorů:

1.) $\vec{v}_1 = (1,1,2)$; $\vec{v}_2 = (1,1,3)$; $\vec{v}_3 = (2,2,8)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{není to schodový tvar!}} \begin{matrix} \\ \\ -4r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ jsou lin. závislé}$$

2.) $\vec{v}_1 = (1,0,-1,1)$; $\vec{v}_2 = (1,0,1,2)$; $\vec{v}_3 = (-1,0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ jsou lin. nezávislé}$$

3.) $\vec{v}_1 = x^2 - x + 1$; $\vec{v}_2 = 2x^2 - x + 1$; $\vec{v}_3 = 3x^2 - 2x + 3$

$\downarrow (1,-1,1)$ $\quad \downarrow (2,-1,1)$ $\quad \downarrow (3,-2,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ jsou lin. nezávislé}$$

4.) $\vec{v}_1 = 2x^2 - x + 1$; $\vec{v}_2 = -x + 1$; $\vec{v}_3 = x^2 - 2x + 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lin. závislé}$$

5.) $\vec{v}_1 = (1,-1,3)$, $\vec{v}_2 = (2,-2,6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lin. závislé}$$

DVA VEKTORY JSOU LIN. ZÁV. KDYŽ JE JEDEN NÁSOBEK DRUHÉHO

6.) $\vec{v}_1 = (1,0,2)$ $\vec{v}_2 = (1,1,-1)$ $\vec{v}_3 = (2,0,5)$, $\vec{v}_4 = (1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{závislé!}$$

VÍCE NEŽ 3 VEKTORY Z $\mathbb{R}^3$ JSOU JISTĚ LIN. ZÁVISLÉ

Báze vektorového prostoru

Def (Báze): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad R. Množina $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}\subseteq V$ tvoří bázi V právě tehdy, když platí

1.) $V=\langle B\rangle=\{\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\dots+\alpha_n\vec{v}_n \mid \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in R\}$

(tj. každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z B)

2.) Vektory $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad: Vezmeme $\mathbb{R}^3$. Ukážeme, že $B=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

ad 1.) Libovolný vektor $(v_1,v_2,v_3)\in V$ můžeme napsat ve tvaru

$$(v_1,v_2,v_3)=v_1\cdot(1,0,0)+v_2(0,1,0)+v_3(0,0,1)$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3=\langle B\rangle$

ad 2.) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ => matice je již v trojúhelníkovém tvaru a není v ní žádný nulový řádek => jsou to lineárně nezávislé vektory

$\Rightarrow B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$

(samozřejmě existují i jiné báze $\mathbb{R}^3$)

Příklad: Vezmeme $V=M_{(2,2)}$. Dokažte, že bázi $M_{(2,2)}$ tvoří

$B=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$

ad 1.) Libovolnou matici $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{(2,2)}$ můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

tj. každý prvek z $M_{(2,2)}$ můžeme napsat jako lineární kombinaci vektorů z B

$\Rightarrow M_{(2,2)}=\langle B\rangle$

ad 2.) Ověříme lineární nezávislost prvků z B podle definice.

Zjistíme, pro které $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ platí

$$\underbrace{\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{\parallel}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\vec{o}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_3&\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0,\alpha_4=0 \Rightarrow$ prvky z B jsou lineárně nezávislé

Příklad: Vezměme $V = P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Dokažte, že polynomy $x^2, x, 1$ tvoří bázi v.p. $(V,+,\cdot)$

ad 1.) Každý polynom ax^2+bx+c je možné napsat jako lineární kombinaci polynomů x^2, x a 1:

$$ax^2+bx+c = a\cdot(x^2) + b\cdot(x) + c\cdot(1)$$

ad 2.) Polynomy x^2, x a 1 jsou lineárně nezávislé

I.) Můžeme se o tom přesvědčit použitím definice lineární nezávislosti: zjistíme pro jaká $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$:

$$k_1\cdot x^2 + k_2\cdot x + k_3\cdot 1 = \bar{o}$$
← nulovým vektorem P_2 je funkce o s předpisem: $\forall x \in \mathbb{R}: o(x) = 0$.

⇒ Hledáme $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ takové, aby $\forall x \in \mathbb{R}$ platilo:

$$k_1x^2 + k_2x + k_3 = 0 \quad (*)$$

a) Kdyby $k_1 \neq 0$ ⇒ $k_1x^2+k_2x+k_3=0$ je kvadratická funkce a ta má nejvýše 2 řešení, neplatilo by $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ⇒ $k_1 = 0$ ⇒

b) Kdyby $k_2 \neq 0$ ⇒ $k_1x^2+k_2x+k_3 = k_2x+k_3 = 0$ je lineární rovnice s jediným řešením $x = -\frac{k_3}{k_2}$ ⇒ $(*)$ by neplatila $\forall x \in \mathbb{R}$, ale jen pro jedno! ⇒ $k_2 = 0$

c) ⇒ $k_1x^2+k_2x+k_3 = 0\cdot x^2+0\cdot x+k_3$. Proto je $(*)$ splněna jen v případě, že i $k_3 = 0$.

⇒ $(*)$ je splněna jen pro $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ⇒ $x^2, x, 1$ jsou lin. nez.

II.) Ověřit nezávislost $x^2, x, 1$ můžeme i postupem popsaným dříve:

$$\begin{array}{c} x^2 \rightarrow \\ x \rightarrow \\ 1 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice už je ve schodovém tvaru a není tam žádný nulový řádek ⇒ Polynomy $x^2, x, 1$ jsou lin. nezávislé.

Věta: Každé dvě báze daného vektorového prostoru V mají stejný počet prvků.

Def. (Dimenze): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor a $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ jeho báze. Potom n (počet prvků báze) nazýváme dimenzí vektorového prostoru V a značíme

$$\dim V = n$$

Věta: Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor a $\dim V = n$. Potom každá n-tice lineárně nezávislých vektorů tvoří bázi V.

Příklad: $V = \mathbb{R}^3$. Již víme, že $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Proto $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Dokažte, že $(1,2,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

Podle předchozí věty stačí dokázat, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ => žádný nulový řádek => jsou nezávislé

=> $\underline{(1,2,0);\ (-1,1,0);\ (0,0,1)}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$

Př.: Ověřte, zda $\vec{u}_1 = x^2+1$, $\vec{u}_2 = x+1$, $\vec{u}_3 = x^2+x$ tvoří bázi $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

! Př.: Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru
$V = \{(x_1,x_2,x_3) \in V \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$\underline{2x_1 - x_2 + x_3 = 0}$ ... soustava 1 rovnice o 3 neznámých => volíme 2 parametry:

$x_3 = r$; $x_2 = s$ => $2x_1 - s + r = 0$ => $x_1 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r$

=> $V = \{(x_1,x_2,x_3) \in V \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\} = \{(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r, s, r) \mid s, r \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\frac{1}{2}s, s, 0) + (-\frac{1}{2}r, 0, r) \mid s,r \in \mathbb{R}\} = \{s(\frac{1}{2},1,0) + r(-\frac{1}{2},0,1) \mid s,r \in \mathbb{R}\}$ =>

1.) každý vektor z V je možno napsat jako lin. komb. vektorů $(\frac{1}{2},1,0)$ a $(-\frac{1}{2},0,1)$

2.) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ => jsou lin. nezávislé

=> vektory $\underline{(\frac{1}{2},1,0), (-\frac{1}{2},0,1)}$ tvoří bázi V

$\underline{\dim V = 2}$

Př. Ověřte, zda je $(U,+,\cdot)$ podprostorem vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$. Pokud ano, nalezněte bázi a dimenzi $(U,+,\cdot)$.

1.) $U = \{(3, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - 2x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

$U \subseteq \mathbb{R}^3$, ale například $(3,0,0) \in U$ a také $(3,2,1) \in U$,
ale $(3,0,0) + (3,2,1) = (6,2,1) \notin U$ $\Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ není podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

2.) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0;\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

Vyřešíme soustavu ($U \subseteq \mathbb{R}^3$ je splněno):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)_{-r_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 - t = 0 \Rightarrow x_1 = t \\ \Rightarrow 3x_2 - x_3 = 0 \text{ zvolím } x_2 = t \Rightarrow x_3 = 3t \end{array}$$

$\Rightarrow U = \{(t, t, 3t \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1,3) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,3)\rangle$

U je lineárním obalem vektoru (1,1,3); lin. obal je vždy podprostor $\Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ báze $U = \{(1,1,3)\}$ $\dim U = 1$

3.) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

vyřešíme soustavu ($U \subseteq \mathbb{R}^3$ je splněno):

$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \Rightarrow$ zvolíme parametry: $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t$

$\Rightarrow U = \{(\frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t,\ s,\ t) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \{s(\frac{3}{2},1,0) + t(-\frac{5}{2},0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} =$
$= \langle(\frac{3}{2},1,0);(-\frac{5}{2},0,1)\rangle$ = lin. obal. $\Rightarrow$

$(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

Ověříme, zda jsou vektory $(\frac{3}{2},1,0)$ a $(-\frac{5}{2},0,1)$ lin. nezávislé:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 10 \\ \cdot 6 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ -15 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{+r_1} \sim \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{jsou nezávislé} \Rightarrow \text{tvoří bázi } U \Rightarrow$$

báze $U = \{(\frac{3}{2},1,0);(-\frac{5}{2},0,1)\}$ $\dim U = 2$

4.) $U = \{ax^2 + ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; $V = P_2$

$U \subseteq P_2$ je splněno a platí:

$U = \{a(x^2+x) + b \cdot 1 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle x^2+x ; 1 \rangle$ = lin. obal $\Rightarrow$

$(U, +, \cdot)$ je podprostorem $(P_2, +, \cdot)$

$\begin{array}{l} x^2+1 \to \\ 1 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ polynomy x^2+1 a 1 jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow$

báze $U = \{x^2+x ; 1\}$ $\quad$ $\dim U = 2$

5.) $U = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 - a_0 = 0,\ a_2 + a_1 = 0\}$; $V = P_2$

$U \subseteq P_2$ je splněno a platí:

$$\begin{array}{l} a_2 - a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow a_2 + s = 0 \Rightarrow a_2 = -s \\ a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = s \in \mathbb{R}\ \ a_0 = -s \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow U = \{-sx^2 + sx - s \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(-x^2+x-1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle -x^2+x-1 \rangle \Rightarrow$

$(U, +, \cdot)$ je podprostorem $(P_2, +, \cdot)$ $\quad$ báze $U = \{-x^2+x-1\}$ $\quad$ $\dim U = 1$

6.) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

$U \nsubseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow (U, +, \cdot)$ není podprostorem $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

7.) $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^2$

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ je splněno a platí:

$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = s,\ x_1 = 3s \Rightarrow$

$U = \{(3s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(3,1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \langle (3,1) \rangle \Rightarrow$

$(U, +, \cdot)$ je podprostorem $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ $\quad$ báze $U = \{(3,1)\}$ $\quad$ $\dim U = 1$

Souřadnice vektoru

Def. (Souřadnice): Nechť $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\} \subseteq V$ je báze vektorového prostoru V. (nad R)
Souřadnicemi vektoru $\bar{v} \in V$ vzhledem k bázi E nazveme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$, jestliže

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

symbolicky zapisujeme: $\bar{v}_{\langle E \rangle} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Př: Určete souřadnice vektoru $\bar{v} = (2,0,4) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi

a) $E = \{\overbrace{(1,0,0)}^{\bar{e}_1}; \overbrace{(0,1,0)}^{\bar{e}_2}; \overbrace{(0,0,1)}^{\bar{e}_3}\}$

b) $F = \{\underbrace{(1,0,1)}_{\bar{f}_1}; \underbrace{(-1,3,0)}_{\bar{f}_2}; \underbrace{(0,0,1)}_{\bar{f}_3}\}$

ad a) Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$$

tzn.: $(2,0,4) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) + \alpha_3 (0,0,1)$

snadno se rozmyslí, že $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 4$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\bar{v}_{\langle E \rangle} = (2,0,4)}}$

ad b) Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \alpha_3 \bar{f}_3$$

tzn.: $(2,0,4) = \alpha_1 (1,0,1) + \alpha_2 (-1,3,0) + \alpha_3 (0,0,1)$

$(2,0,4) = (\alpha_1, 0, \alpha_1) + (-\alpha_2, 3\alpha_2, 0) + (0,0,\alpha_3)$

$(2,0,4) = (\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3)$

Vektory z $\mathbb{R}^3$ jsou si rovny, pokud mají stejné souřadnice $\Rightarrow$
musí platit:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2$$
$$3\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 4$$

Řešením této soustavy obdržíme $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$ $\Rightarrow$

$\underline{\underline{\bar{v}_{\langle F \rangle} = (2,0,2)}}$

Př.: Nechť ~~$V = P_3 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$~~ $V = P_3 = \{ f \mid f(x) = ax^2+bx+c \,;\, a,b,c \in \mathbb{R} \}$

Určete souřadnice vektoru (funkce) f dané předpisem $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ vzhledem k bázi

a) $\bar{e}_1 = x^2$, $\bar{e}_2 = x$, $\bar{e}_3 = 1$

b) $\bar{f}_1 = x^2 + x$, $\bar{f}_2 = x^2 + 1$, $\bar{f}_3 = x + 1$

ad a) Evidentně $f = 3 \cdot \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 \Rightarrow f_{\langle E \rangle} = (3, -2, 1)$

ad b) Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak aby

$$f = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \alpha_3 \bar{f}_3$$

tj. aby: $3x^2 - 2x + 1 = \alpha_1 (x^2 + x) + \alpha_2 (x^2 + 1) + \alpha_3 (x + 1)$

$3x^2 - 2x + 1 = (\alpha_1 + \alpha_2) x^2 + (\alpha_1 + \alpha_3) x + \alpha_2 + \alpha_3$

$\Rightarrow$ musí platit

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= -2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \end{aligned} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_{\langle F \rangle} = (0, 3, -2)$

Př. Určete souřadnice vektoru $\bar{v}$ vzhledem k bázi B.

1.) $\bar{v} = (-1,3,8)$; $B = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ ... kanonická báze v $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ (standardní)

$$\bar{v} = (-1,3,8) = -1\cdot(1,0,0) + 3(0,1,0) + 8(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\bar{v}_{\langle B\rangle} = (-1,3,8)$$

2.) $\bar{v} = (3,1,0)$; $B = \{(1,2,0);(-1,2,1);(1,1,1)\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2r_1 \\ \cdot 4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$k_1+1+1=3 \Rightarrow k_1 = 1$

$4k_2-1=-5 \Rightarrow k_2=-1$

$\Rightarrow 5k_3=5 \Rightarrow k_3=1$

$$\Rightarrow (3,1,0) = 1\cdot(1,2,0) - 1\cdot(-1,2,1) + 1\cdot(1,1,1) \Rightarrow (3,1,0)_{\langle B\rangle} = (1,-1,1)$$

3.) $\bar{v} = -5x^2+3$; $B = \{x^2, x, 1\}$ ... kanonická báze v $(P_2,+,\cdot)$

$$-5x^2+3 = -5\cdot(x^2) + 0\cdot(x) + 1\cdot(1)$$

$$-5x^2+3_{\langle B\rangle} = (-5,0,1)$$

4.) $\bar{v} = 6x+7$; $B = \{x^2+x+3,\ x^2+1,\ x+1\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow k_1-1=0 \Rightarrow k_1 = 1$

$\Rightarrow -k_2+5=6 \Rightarrow k_2=-1$

$\Rightarrow k_3=5$

$$\Rightarrow 6x+7 = 1\cdot(x^2+x+3) - 1\cdot(x^2+1) + 5(x+1) \Rightarrow 6x+7_{\langle B\rangle} = (1,-1,5)$$

Báze vektorového prostoru

Množina vektorů $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \in V$ tvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$

$\Leftrightarrow$ 1.) $\forall \bar{x} \in V \ \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}: \quad \bar{x} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n$

2.) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ jsou lineárně nezávislé

Pozn.: Jestliže $\dim V = n$ $\Rightarrow$ každá n-tice lineárně nezávislých vektorů $\in V$ je báze $(V, +, \cdot)$

Př.: Ověřte, zda vektory $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots$ tvoří bázi vekt. prostoru V

1.) $\bar{v}_1 = (1,2,1)$, $\bar{v}_2 = (1,-1,3)$, $V = \mathbb{R}^3$ [ne]

2.) $\bar{v}_1 = (1,2,1)$, $\bar{v}_2 = (1,1,2)$, $\bar{v}_3 = (-1,1,5)$, $V = \mathbb{R}^3$ [ano]

3.) $\bar{v}_1 = (2,-1,3)$, $\bar{v}_2 = (1,-1,2)$, $\bar{v}_3 = (0,1,-1)$, $V = \mathbb{R}^3$ [ne]

4.) $\bar{v}_1 = x^2 - 2x$, $\bar{v}_2 = -x^2 + 2x - 1$, $\bar{v}_3 = x$, $V = P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ [ano]

5.) $\bar{v}_1 = x^3 - x^2$, $\bar{v}_2 = x^3 - x$, $\bar{v}_3 = x^2 - x$, $\bar{v}_4 = x - 1$, $V = P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ [ne]

Př.: Ověřte, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostor $(V, +, \cdot)$. Pokud ano, naleznete jeho bázi a dimenzi.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ $[U = \langle (1,0,2); (0,1,-1) \rangle, \dim U = 2]$

b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ $[U = \langle (-1,1,0,0); (1,0,1,0); (1,0,0,1) \rangle, \dim U = 3]$

c) $V = P_2$, $U = \{ax^2 + ax + c \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ $[U = \langle x^2 + x, 1 \rangle, \dim U = 2]$

Př.: Určete souřadnice vektoru $\bar{v}$ vzhledem k bázi B.

a) $\bar{v} = (1,5,8)$, $B = \{(1,1,0); (0,1,1); (0,1,3)\}$ $[\bar{v}_{\langle B \rangle} = (1,2,2)]$

b) $\bar{v} = (2,6,2)$, $B = \{(1,2,0), (1,0,2), (0,1,1)\}$ $[\bar{v}_{\langle B \rangle} = (2,0,2)]$

c) $\bar{v} = x^2 + 1$, $B = \{x^2 - 2x + 1, -x^2 + x + 1, x^2 + x - 1\}$ $[\bar{v}_{\langle B \rangle} = (1,1,1)]$

d) $\bar{v} = 5x^2 + x - 2$, $B = \{2x^2 - 1, x^2 + x, -2x + 2\}$ $[\bar{v}_{\langle B \rangle} = (2,1,0)]$