

Bilineární forma

Def: (Bilineární forma): Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem T a zobrazení $f: V \times V \rightarrow T$ splňuje $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ a $\forall \alpha \in T$ podmínky:

- 1) $f(\bar{u} + \bar{v}, \bar{w}) = f(\bar{u}, \bar{w}) + f(\bar{v}, \bar{w})$
- 2) $f(\alpha \cdot \bar{u}, \bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}, \bar{v})$
- 3) $f(\bar{u}, \bar{v} + \bar{w}) = f(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{u}, \bar{w})$
- 4) $f(\bar{u}, \alpha \cdot \bar{v}) = \alpha \cdot f(\bar{u}, \bar{v})$

Potom f nazýváme bilineární formou na vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$.

Poznámka: Dá se dokázat, že když $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ je báze vektorového prostoru V , $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\langle E \rangle}$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{\langle E \rangle}$ a $f: V \times V \rightarrow T$ je bilineární forma, potom

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\langle E \rangle} \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_n, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\langle E \rangle} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) x_i y_j$$

matice bilineární formy vzhledem k E
značíme ji $B_f_{\langle E \rangle}$

Zapsáno vektorově:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}_{\langle E \rangle} B_{f, \langle E \rangle} \bar{y}_{\langle E \rangle}^T$$

Př: Najděte matici bilineární formy $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$ (kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$) a určete $f(\bar{x}, \bar{y})$, jestliže $\bar{x} = (1, 1, 0)$, $\bar{y} = (2, 3, -1)$ (matici hledejte, není-li řečeno jinak, vzhledem k standardní bázi, na $\mathbb{R}^3$ je standardní báze: $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$)

$$\Rightarrow B_f = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_3) \\ f(\bar{e}_3, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_3, \bar{e}_2) & f(\bar{e}_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 \\ f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = -1 \\ f(\bar{e}_3, \bar{e}_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \end{cases}$$

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrici B_f můžeme určit přímo z předpisu (jestliže x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3 jsou souřadnice vzhledem k bázi E)

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 - 2 x_3 y_2 + 5 x_3 y_3$$

řádek sloupec
před x_i je číslo 1
před x_i je číslo 0

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hodnotu $f(\vec{u}, \vec{v})$ můžeme určit:

a) Podle předpisu: $f((1,1,0), (2,3,-1)) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot (-1) = 2 - 3 + 6 + 6 = 11$

nebo:

b) Pomocí matice B_f : $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_{\langle E \rangle} \cdot B_f \cdot \vec{y}_{\langle E \rangle}^T$. Jestliže E je stand. báze $\Rightarrow (1,1,0) = (1,1,0)_{\langle E \rangle}$
 $(2,3,-1) = (2,3,-1)_{\langle E \rangle}$

$$f((1,1,0), (2,3,-1)) = (1,1,0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (4, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 11$$

Př: Dokažte, že zobrazení $f: P_3 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $\forall p, q \in P_3: f(p, q) = p(0) \cdot q(1)$ je bilineární forma a nalezněte její matici vzhledem ke standardní bázi.
 (kde je st. báze $E = \{x^2, x, 1\}$)

Nejprve se podívejme, jak funguje zobrazení f . Vezmeme $p = 3x^2 - 4x + 3$ a $q = 2x^2 - 1$
 potom $f(p) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$ a $q(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$. V tom případě je $f(p, q) = p(0) \cdot q(1) = 3 \cdot 1 = 3$

Nyní dokažeme, že f je bilineární forma, tj., že platí podmínky 1.) až 4.) z definice bilineární formy:

ad 1.) má platit: $f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$

(Zde jsou vektory polynomů, proto nadále nebudeme dělat číselný vektor $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$)

$$f(u+v, w) = (u+v)(0) \cdot w(1) = (u(0) + v(0)) \cdot w(1) = u(0)w(1) + v(0)w(1) = f(u, w) + f(v, w)$$

ad 2.) má platit $f(\alpha u, v) = \alpha \cdot f(u, v)$

$$\Rightarrow f(\alpha u, v) = (\alpha u)(0) \cdot v(1) = \alpha \cdot u(0) \cdot v(1) = \alpha \cdot f(u, v)$$

Podmiňujú 3.) a 4.) by som dohárali analogicky jakeo 1.) a 2.)

Nyní nalezneme matrici bilineárnej formy $f(t, q) = f(0)q(1)$.

Musíme to odložiť dvoma spôsobmi:

a)

$$B_f = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_3) \\ f(\bar{e}_3, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_3, \bar{e}_2) & f(\bar{e}_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix} \quad \text{standardní báze je}$$

$$\bar{e}_1: \ell_1(x) = x^2 \Rightarrow \ell_1(1) = 1^2, \ell_1(0) = 0^2$$

$$\bar{e}_2: \ell_2(x) = x \Rightarrow \ell_2(1) = 1, \ell_2(0) = 0$$

$$\bar{e}_3: \ell_3(x) = 1 \Rightarrow \ell_3(0) = 1, \ell_3(1) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) &= f(x^2, x^2) = \overbrace{0^2 \cdot 1^2}^{\ell_1(0) \cdot \ell_1(1)} = 0 & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) &= f(x^2, x) = \overbrace{0^2 \cdot 1^2}^{\ell_1(0) \cdot \ell_2(1)} = 0 & f(\bar{e}_1, \bar{e}_3) &= f(x^2, 1) = 0^2 \cdot 1 = 0 \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) &= f(x, x^2) = \ell_2(0) \ell_1(1) = 0 \cdot 1 = 0 & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) &= \ell_2(0) \ell_2(1) = 0 \cdot 1 = 0 & f(\bar{e}_2, \bar{e}_3) &= \ell_2(0) \ell_3(1) = 0 \cdot 1 = 0 \\ f(\bar{e}_3, \bar{e}_1) &= \ell_3(0) \ell_1(1) = 1 \cdot 1 = 1 & f(\bar{e}_3, \bar{e}_2) &= \ell_3(0) \ell_2(1) = 1 \cdot 1 = 1 & f(\bar{e}_3, \bar{e}_3) &= \ell_3(0) \ell_3(1) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{B_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Nebo uvidíme předpis $f(t, q)$ pomocí souřadnic vzhledem ke standardní bázi $E = \{x^2, x, 1\}$
 t, q jsou polynomy z $P_2 \Rightarrow$

$$t: t(x) = x_1 x^2 + x_2 x + x_3 \Rightarrow t = (x_1, x_2, x_3)_{\langle E \rangle}, \quad t(0) = x_1 \cdot 0^2 + x_2 \cdot 0 + x_3 = x_3, \quad t(1) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$q: q(x) = y_1 x^2 + y_2 x + y_3 \Rightarrow q = (y_1, y_2, y_3)_{\langle E \rangle}, \quad q(0) = y_3, \quad q(1) = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\Rightarrow f(t, q) = t(0)q(1) = (x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = x_3(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$f_{(x_1, x_2, x_3)_{\langle E \rangle}, (y_1, y_2, y_3)_{\langle E \rangle}} = \underbrace{x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3}_{\substack{\text{řádek} \\ \text{sloupce}}} = x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_3 y_3$$

$\Rightarrow$ matrici B_f nalezneme:

$$\underline{B_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Pr:

Bilineární forma je dána předpisem $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_2 y_3 - x_3 y_1 + 2x_3 y_3$,
kde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Určete matici b.f. f vzhledem ke standardní bázi S .

$$B_{f, \langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Určete matici b.f. f vzhledem k bázi $B = \{(1, 1, 0); (0, 1, 2); (0, 0, 3)\}$

$$B_{f, \langle B \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -2 & 14 & 21 \\ -3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

c) Určete $f((1, -1, 0), (0, -1, 3))$

a) pomocí $B_{f, \langle S \rangle}$: $f((1, -1, 0), (0, -1, 3)) = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (1, 0, -3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-9}}$

b) podle předpisu: $f(\underset{x_1}{(1, -1, 0)}, \underset{y_1}{(0, -1, 3)}) = \underset{x_2}{1} \cdot \underset{y_2}{0} + 3 \underset{x_3}{(-1)} \cdot \underset{y_3}{3} - \underset{x_3}{0} \cdot \underset{y_1}{0} + 2 \underset{x_3}{0} \cdot \underset{y_3}{3} = \underline{\underline{-9}}$

gs) ověřte, že postup a) je korektní

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_3, 0, 3x_2 + 2x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{x_1 y_1 - x_3 y_1 + 3x_2 y_2 + 2x_3 y_3}_{= f(\vec{x}, \vec{y}) \text{ podle zadání!}}$$

Př: Bilineární forma je dána předpisem $f(\bar{x}, \bar{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - 3x_3y_2$,
kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

a) Určete matici bilineární formy f vzhledem ke standardní bázi S .

$$\underline{B_{f(S)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Určete matici $B_{f(G)}$, kde $G = \{(1, 0, -1), (0, 3, 0), (1, 0, 2)\}$

$$B_{f(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & -18 & 1 \end{pmatrix}}}$$

c) Určete $f((3, 1, 4), (2, 1, -5))$

$$f((3, 1, 4), (2, 1, -5)) = (3, 1, 4) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = (9, -11, -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 18 - 11 + 15 = \underline{\underline{22}}$$

Pr. Bilineární forma $f: P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(g(x), h(x)) = 2g(x)h(x)$.

a) Určete matici b.f. f vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$

Upravíme předpis: $g(x) = x_1x^2 + x_2x + x_3 \Rightarrow g(x)_{\langle S \rangle} = (x_1, x_2, x_3)$

$h(x) = y_1x^2 + y_2x + y_3 \Rightarrow h(x)_{\langle S \rangle} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\Rightarrow f(g(x), h(x)) = f\left(\underbrace{x_1x^2 + x_2x + x_3}_{g(x)}, \underbrace{y_1x^2 + y_2x + y_3}_{h(x)}\right) = 2 \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{g(1)} \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{h(1)} =$$

$$= 2x_1y_1 +$$

$$+ 18x_1y_2 + 6x_1y_3 +$$

$$+ 18x_2y_1 + 6x_2y_2 + 2x_2y_3 +$$

$$+ 18x_3y_1 + 6x_3y_2 + 2x_3y_3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B_{f\langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b) Určete matici $B_{f\langle H \rangle}$, kde $H = \{(1, 1, 1); (0, 1, -1); (0, 0, 1)\}$

$$B_{f\langle H \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 78 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 26 & 4 & 2 \end{pmatrix}}}$$

c) Určete $f(3x^2-1, 2x+3)$

$\alpha)$ podle předpisu: $f(3x^2-1, 2x+3) = 2(3 \cdot 1^2 - 1)(2 \cdot 3 + 3) = 2 \cdot 2 \cdot 9 = \underline{\underline{36}}$

$\beta)$ pomocí $B_{f\langle S \rangle}$: $f(3x^2-1, 2x+3) = (3, 0, -1) \begin{pmatrix} 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \\ 18 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (36, 12, 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 24 + 12 = \underline{\underline{36}}$

Def (Symetrická, Antisymetrická bilin. forma): Bilineární forma $f: V \times V \rightarrow T$ je symetrická jestliže $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ platí:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{v}, \bar{u})$$

Bilineární forma $f: V \times V \rightarrow T$ je antisymetrická jestliže $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ platí:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = -f(\bar{v}, \bar{u})$$

Věta: Bilineární forma je symetrická $\Leftrightarrow$ její matice B_f je symetrická.

Bilineární forma je antisymetrická $\Leftrightarrow$ její matice B_f je antisymetrická.

Poznámka: Každou bilineární formu můžeme rozložit na součet symetrické a antisymetrické bilineární formy:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = f_s(\bar{u}, \bar{v}) + f_a(\bar{u}, \bar{v})$$

symetrická část f

antisymetrická část f

f_s a f_a určíme:

$$f_s(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} (f(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{v}, \bar{u}))$$

$$f_a(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} (f(\bar{u}, \bar{v}) - f(\bar{v}, \bar{u}))$$

$\Rightarrow$ Matice symetrické a antisymetrické části určíme:

$$B_{f_s} = \frac{1}{2} (B_f + B_f^T)$$

$$B_{f_a} = \frac{1}{2} (B_f - B_f^T)$$

Pr: Materněle symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy
 $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$

$$\Rightarrow B_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B_f^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{fs} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f_s(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \frac{5}{2} x_1 y_2 + \frac{5}{2} x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$$

$$\Rightarrow B_{fa} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_a(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1$$
