

Kvadratická forma

Def (Kvadratická f.): Necht' $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma. Kvadratickou formou příslušnou k bilineární formě f nazveme zobrazení $Q_f: V \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem: $\forall \bar{x} \in V$ platí

$$Q_f(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x})$$

Pozn: Do bilineární formy f „dosazujeme“ vektory $\bar{x}$ a $\bar{y}$ (mohou být různé). Kvadratickou formu dostaneme z f tak, že do ní budeme „dosazovat“ vždy dva stejné vektory, tj. $\bar{x}$ a $\bar{x}$.

Př: Nalezněte kvadratickou formu příslušnou k bilineární formě $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$

$$\Rightarrow Q_f(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = x_1 x_1 - x_1 x_2 + 3x_2 x_1 + 2x_2 x_2 - 2x_2 x_3 - 2x_3 x_2 + 5x_3 x_3 = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_2 x_3$$

↑
tj. $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3$

Poznámka: Matici kvadratické formy nazveme maticí symetrické bilineární formy, k níž kvadratická forma náleží, tj.:

$$Q_f(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = \underbrace{\bar{x}_{\langle E \rangle} (Q_f) \bar{x}_{\langle E \rangle}^T}_{\uparrow \text{ matice kvadratické formy.}}$$

Př: Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 6x_2 x_3$, kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)_{\langle E \rangle}$ a symetrickou bilineární formu, k níž Q_f náleží

$\Rightarrow$

Matici $(Q_f)_{\langle E \rangle}$ určíme z koeficientů v předpisu, ale pozor! $x_1 x_2 = x_2 x_1 \Rightarrow$ číslo před $x_1 x_2$ rozdělíme napůl a jednu polovinu dáme do 1. řádky 2. sloupce a druhou polovinu dáme do 2. řádku 1. sloupce. Obdobně u $x_1 x_3$ a $x_2 x_3 \Rightarrow$

$$\rightarrow (Q_f)_{\langle E \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{například } Q_f((1, -1, 2)) = (1, -1, 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1, -1, 2) \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 6 - 8 + 18 = \underline{16}$$

Toto je matice symetrické bilineární formy le mříž Q_f příslušící $\Rightarrow$

$$\underline{f_s(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - x_2 y_1 - 3x_2 y_2 + 3x_2 y_3 + 2x_3 y_1 + 3x_3 y_2 + 5x_3 y_3}$$

Poznámka: Matici kvadratické formy Q_f vzhledem k bázi $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ (může být i jiná, než standardní), nalezneme takto:

1.) Nalezneme symetrickou bilineární formu $f_s(u, v)$ le mříž Q_f příslušící (např. podle vztahu: $f_s(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}(Q_f(\vec{u} + \vec{v}) - Q_f(\vec{u}) - Q_f(\vec{v}))$)

$$2.) (Q_f)_{\langle E \rangle} = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Pr: Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f(\vec{x}) = 4x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3x_2^2$ vzhledem k bázi $E = \{\vec{e}_1 = (1, 1), \vec{e}_2 = (1, -1)\}$.

$\Rightarrow$ ad 1.) Symetrická bilin. forma f_s le mříž Q_f nalezneme vzhledem ke standardní bázi matici

$$(Q_f)_{\langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f_s(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2$$

st. báze lede $\vec{x} = (x_1, x_2)_{\langle S \rangle}$, $\vec{y} = (y_1, y_2)_{\langle S \rangle}$

$$\text{ad 2.) } f_s(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = f_s \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 2 - 2 + 3 = \underline{3}$$

$$f_s(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = f_s \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 - 2 + 2 - 3 = \underline{1}$$

$$f_s(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = f_s \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{11}$$

Protože f_0 je symetrická, je $f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 1 \Rightarrow$

$$\underline{(Q_{f_0})_{\langle E \rangle}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Př.: Materní matice kvadratické formy $Q_f: P_3 \rightarrow \mathbb{R}$, dané předpisem

$$Q_f(g) = g(0)g(1)$$

a) vzhledem ke standardní bázi $E = \{X^2, X, 1\}$

b) vzhledem k bázi $F = \{X^2+X, X^2+1, X+1\}$

ad a) Nejprve určíme matici Q_f vzhledem k standardní bázi $E = \{e_1 = X^2, e_2 = X, e_3 = 1\}$
Uvážíme toho, že

$$Q_f(\bar{X}) = \underbrace{\bar{X}_{\langle E \rangle}}_{\substack{\uparrow \\ \text{souřadnice vzhledem k bázi } \langle E \rangle}} (Q_{f_0})_{\langle E \rangle} \bar{X}_{\langle E \rangle}^T = \sum_i \sum_j \underbrace{f_0(e_i, e_j)}_{\substack{\uparrow \\ \text{číslo před } X_i X_j \text{ tvoří matici } (Q_{f_0})_{\langle E \rangle}}} X_i X_j$$

$$\Rightarrow \text{Přeměníme } g(X) = X_1 X^2 + X_2 X + X_3 = (X_1, X_2, X_3)_{\langle E \rangle} \Rightarrow g(0) = X_3 \text{ a } g(1) = X_1 + X_2 + X_3$$

$$\Rightarrow Q_f(g) = g(0)g(1) = X_3(X_1 + X_2 + X_3) = X_1 X_3 + X_2 X_3 + X_3 X_3$$

$$\Rightarrow \underline{(Q_{f_0})_{\langle E \rangle}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{\langle E \rangle}$$

$\nwarrow$ matice kvadratické formy Q_f = matice symetr. bilineární formy f_0 k níž Q_f patří

ad b) Jelikož F není standardní báze, musíme nejprve uvážit toho, že

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{\langle E \rangle}$ je matice symetrické bilineární formy f_0 vzhledem k standardní bázi) k níž Q_f patří

$$\Rightarrow \bar{f}_1 = X^2 + X = (1, 1, 0)_{\langle E \rangle}$$

$$\bar{f}_2 = X^2 + 1 = (1, 0, 1)_{\langle E \rangle}$$

$$\bar{f}_3 = X + 1 = (0, 1, 1)_{\langle E \rangle}$$

$$f(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow f_0(\bar{f}_1, \bar{f}_1) = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_0(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$f_0(\bar{f}_1, \bar{f}_3) = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$f_0(\bar{f}_2, \bar{f}_3) = (1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$f_0(\bar{f}_3, \bar{f}_3) = (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow (Q_{f_s})_{\langle F \rangle} = \begin{pmatrix} f_s(\bar{t}_1, \bar{t}_1) & f_s(\bar{t}_1, \bar{t}_2) & f_s(\bar{t}_1, \bar{t}_3) \\ f_s(\bar{t}_1, \bar{t}_2) & f_s(\bar{t}_2, \bar{t}_2) & f_s(\bar{t}_2, \bar{t}_3) \\ f_s(\bar{t}_3, \bar{t}_1) & f_s(\bar{t}_3, \bar{t}_2) & f_s(\bar{t}_3, \bar{t}_3) \end{pmatrix}$$

Protože f_s je symetrická $\Rightarrow f(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = f(\bar{t}_2, \bar{t}_1) = 1$ atd.

$$\Rightarrow \underline{\underline{(Q_{f_s})_{\langle F \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}}$$

Klasifikace kvadratických forem

Def: Kvadratická forma Q_f je na vektorovém prostoru V

- a) pozitivně definitní $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in V - \{0\} : Q_f(\bar{x}) > 0$
- b) pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in V : Q_f(\bar{x}) \geq 0$
- c) negativně definitní $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in V - \{0\} : Q_f(\bar{x}) < 0$
- d) negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in V : Q_f(\bar{x}) \leq 0$
- e) indefinitní $\Leftrightarrow \exists \bar{u}, \bar{v} \in V : Q_f(\bar{u}) < 0$ a $Q_f(\bar{v}) > 0$

Pr: Určete typ kvadratické formy $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2$

$\Rightarrow$ Evidentní $\forall \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ platí: $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 > 0 \Rightarrow$ je pozitivně definitní

Pr: Určete typ kvadratické formy $Q_f(\bar{x}) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

Zde už situace není tak jednoduchá jako v předchozím případě.

Musíme rozhodnout na základě vlastností matice $(Q_f)_{\langle E \rangle}$.

Postup: 1.) Nejprve uvažujeme matici $(Q_f)_{\langle E \rangle}$

$$(Q_f)_{\langle E \rangle} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2.) Matici budeme upravovat na „dvojhroci“ cílem je, dostat pod diagonálu nuly, ale sestrojení, kterým jsme udělali s řádky musíme lineár udělat i se sloupci :

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -18 \end{pmatrix} \sim$$

1. řádek jsme přičetli k 2. řádku
1. sloupec přičteme k 2. sloupci
3. řádek jsme vynásobili číslem 3
3. sloupec vynásobíme číslem 3

1. dvoj krok.
(nakonec každého dvoj kroku musíme mít symetrickou matici! jinak se někde stala chyba!)

2. dvoj krok

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

přičetli jsme 1. řádek ke 3.
přičetli jsme k 3. sloupci první sloupec
(-3) násobek 2. řádku jsme přičetli ke 3. řádku
(-3) násobek 2. sloupce přičteme ke 3. sloupci

3.) Na konci úprav slyž na diagonále ne' jala' čísla, jinak jsou všude nuly. Jestliže

a) všechna čísla na diagonále jsou $> 0 \Rightarrow$ pozitivně definitní

b) $\text{---} || \text{---} \geq 0 \Rightarrow$ pozitivně semidef.

c) $\text{---} || \text{---} < 0 \Rightarrow$ negativně def.

d) $\text{---} || \text{---} \leq 0 \Rightarrow$ negativně semidef.

e) některá čísla na diag. jsou > 0 a některá $< 0 \Rightarrow$ indefinitní

$\Rightarrow$ V našem případě je na diag. $-3, -1$ a $-6 \Rightarrow Q_f$ je negativně definitní

Př. Určete bázi B vzhledem k níž má kvadratická forma Q_f diagonální matici. Určete také typ kvadratické formy.

a) $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$, kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ matice Q_f vzhledem ke st. bázi: $(Q_f)_{\langle s \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ klasifikace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1 \rightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-s_1 \rightarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 \rightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-s_2 \rightarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_f \text{ je indefinitní!}$$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, -1, 1)\}}$

Zk: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$

b) $Q_f(\bar{x}) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

$$\Rightarrow (Q_f)_{\langle s \rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot s_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -12 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1 \rightarrow r_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-s_1 \rightarrow s_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{7 \cdot r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 4 \\ 0 & 28 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{7 \cdot s_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 28 \\ 0 & 28 & 49 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2 \rightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 28 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 28 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix} \xrightarrow{2s_2 \rightarrow s_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Q_f \text{ je indefinitní!}}$$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B = \{(1, 0, 0), (-1, 2, 0), (-2, 4, 7)\}}$

Zk: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix} \checkmark$

Pr.: Určete kanonický tvar kvadratické formy $Q_f(\bar{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

$$(Q_f)_{(S)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} -2r_1 \rightarrow r_2 \\ -r_1 \rightarrow r_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -2s_1 \rightarrow s_2 \\ -s_1 \rightarrow s_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -r_2 \rightarrow r_3 \\ -s_2 \rightarrow s_3 \end{matrix}$

$$G: E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_f(\bar{x}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

$$\text{Ldc } \bar{x}_{(0)} = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3]{-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q_f(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{ZK: } (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 &= (x_1 + 2x_2)^2 + 2(x_1 + 2x_2)x_3 + x_3^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + x_3^2 = \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 = \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

Pr: Uvěte typ kvadratické formy $Q_f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

$$\Rightarrow (Q_f)_{(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\nwarrow r_2 - r_1$ $\nwarrow r_2 - r_1$ $\nwarrow 2 \cdot r_1 + r_3$ $\nwarrow 2 \cdot r_1 + r_3$

$\Rightarrow Q_f$ je indefinitní

Skalární součin

Def: (Skalární součin): Skalárním součinem na vektorovém prostoru V nazýváme každou symetrickou, pozitivně definitní bilineární formu. Její příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.

Pr: Dokažte, že $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3$

Pr: Ověřte, zda $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$ je skalární součin na $V = \mathbb{R}^3$.

1.) Ověříme, že $f(\vec{x}, \vec{y})$ je symetrická bilin. forma: její matice je:

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \text{symetrická matice } (B_f = B_f^T) \Rightarrow f \text{ je symetr. bilin. forma}$$

2.) $Q_f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 \Rightarrow$ musíme ověřit, zda je pozitivně definitní:

$$(Q_f)_{(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_f \text{ je pozitivně definitní}$$

$\nwarrow r_2 - r_1$ $\nwarrow r_2 - r_1$ $\nwarrow r_3 + 2r_2$ $\nwarrow r_3 + 2r_2$

$\Rightarrow f(\vec{x}, \vec{y})$ je skalární součin na $\mathbb{R}^3$

Skalární součin

Def.: (Skalární součin): Skalárním součinem na vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ nazveme každou symetrickou bilineární formu $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ k níž přísluší pozitivně definitní kvadratická forma Q_f .

Př. 1.) $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

matice této bilin. formy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ je symetrická b.f.

matice Q_f je stejná $\nearrow \Rightarrow Q_f$ je pozitivně def. kv. forma

$\Rightarrow f$ je skalární součin

2.) $f(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, kde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

matice f i Q_f : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1) f \text{ je symetrická b.f.} \\ 2) Q_f \text{ je pozit. def.} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ je skal. součin.}$

3.) $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

matice f : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ je symetrická $\Rightarrow$ je stejná jako matice Q_f

ověříme, že Q_f je pozitivně definitní:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_f \text{ je pozit. def.} \Rightarrow f \text{ je skal. součin}$$

$-r_1 \rightarrow r_2 \quad -s_1 \rightarrow s_2 \quad 2r_2 \rightarrow r_3 \quad 2s_2 \rightarrow s_3$

Poznámka: Existuje nekonečně mnoho skalárních součinů.

Ten ze 1.) znáte ze SŠ. Zamyslejte se:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Dohoda: Pokud nebude řečeno jinak, pod pojmem skalární součin na $\mathbb{R}^3$ budeme mít na mysli ten ze 1.).