Sbírka úloh z lineární algebry pro kombinované studium

Pavel Jahoda

3. července 2023

Úvod

Z názvu je zřejmé o čem text pojednává. Takže, nezdržujte se čtením úvodu a vrhněte se hned na první kapitolu.

Obsah

Kapitola 1

Maticové operace

Budeme se zabývat maticemi reálných čísel. Maticí typu (m, n) rozumíme matici o m řádcích a n sloupcích[1]. Budeme používat následující značení. Matice budeme značit velkými písmeny, prvek matice A, který je v i-tém řádku a j-tém sloupci budeme značit a_{ij}, prvek matice B, který je v i-tém řádku a j-tém sloupci budeme značit b_{ij}.... Pokud to bude užitečné, napíšeme nad matici jakého je typu. To jest, budeme psát:

$$A = \overset{(m,n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \overset{(m,n)}{=(a_{ij})}$$

Množinu všech reálných matic typu (m, n) budeme značit $M_{m,n}$.

Definice 1. *(*Čtvercová matice*) Matice A je čtvercová právě když je typu (n, n).*

O matici tedy říkáme, že je čtvercová, jestliže má stejný počet řádků jako sloupců. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je čtvercová.

[1] Formálně je to prvek kartézského součinu $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n}_{m \text{ krát}}$, ale představa čísel uspořádaných do řádků a sloupců pro nás bude výhodnější.

1.1 Sčítání matic

Definujme operaci sčítání matic daného typu (m, n):

Definice 2. (Sčítání matic) *Nechť A, B jsou matice typu (m, n), potom*

$$\overset{(m,n)}{A} + \overset{(m,n)}{B} = \overset{(m,n)}{(c_{ij})}, \quad \textit{kde} \;\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Sčítáme tedy matice stejných typů, a to tak, že sečteme čísla na stejných pozicích. Sčítání matic různých typů není definováno. Ukážeme na konkrétních příkladech.

1. Sečtěte matice.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \; \underline{\underline{\text{Není definováno!}}}$$

Poznámka 3. *Uvážíme-li, že sčítání reálných čísel je komutativní, pak je zřejmé, že také sčítání matic je komutativní. To jest, pro libovolné dvě matice A, B stejného typu platí :*

$$A + B = B + A.$$

Nulovou maticí nazveme matici, jež obsahuje pouze nuly. V dalším textu pro ni vyhradíme označení O. Formální definice je uvedena níže:

Definice 4. (Nulová matice) *Nulovou maticí typu (m, n) nazveme matici*

$$\overset{(m,n)}{O} = \overset{(m,n)}{(o_{ij})}, \quad \textit{kde} \;\; \forall i \in 1, 2, \ldots, m \;\; \forall j \in 1, 2, \ldots, n : o_{ij} = 0.$$

2. Sečtěte matice.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}}$$

Poznámka 5. *Z předchozího příkladu je zřejmé, že i pro libovolnou matici A typu (m, n) a nulovou matici O typu (m, n) platí :*

$$A + O = O + A = A.$$

1.2 Násobení matice číslem

Definujme násobení, které danému číslu α a dané matici A typu (m,n) přiřadí zase matici typu (m,n).

Definice 6. *(*Násobení matice číslem*) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a A je matice typu (m,n), potom*

$$\alpha \cdot \overset{(m,n)}{A} = \overset{(m,n)}{(c_{ij})}, \quad \textit{kde } c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

Číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ násobíme matici A tak, že číslem α vynásobíme všechny její prvky. Zápis budeme často zjednodušovat tak, že místo $\alpha \cdot A$ budeme psát jen αA.

1. Vynásobte matici.

a)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ -8 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

d)

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}}}$$

1.3 Násobení matic

Definujme násobení, které dvěma maticím, první typu (m, n) a druhé typu (n, p), přiřadí matici typu (m, p).

Definice 7. *Nechť A je matice typu (m, n) a B je matice typu (n, p), potom*

$$\overset{(m,n)}{A} \cdot \overset{(n,p)}{B} = \overset{(m,p)}{(c_{ij})}, \quad \textit{kde} \;\; c_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_j,$$

$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_j$ *označuje skalární součin i - tého řádku matice A a j - tého sloupce matice B.*

Jak tedy máme podle definice násobit matice? Nejprve připomeňmě skalární součin dvou aritmetických vektorů. Obecně, násobíme-li vektor $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s vektorem $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, pak

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Vyzkoušejme pár příkladů:

1. $(1, 3, 2) \cdot (2, 0, 1) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 + 0 + 2 = \underline{\underline{4}}$

2. $(-2, 0, 3) \cdot (1, 2, 1) = -2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -2 + 0 + 3 = \underline{\underline{1}}$

3. $(5, 1, 6) \cdot \begin{matrix} (2 & & \\ & 3 & \\ & & -1) \end{matrix} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 10 + 3 - 6 = \underline{\underline{7}}$

   Tady se zápis druhého z vektorů příliš nepovedl, je nějak nakřivo, že by tisková chyba? No nevadí.

4. $(0, 1, -2) \cdot \begin{matrix} (4 \\ 1 \\ 5) \end{matrix} = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = 0 + 1 - 10 = \underline{\underline{-9}}$

   Tak tady už se to vůbec nepovedlo - druhý z vektorů je svisle! No nevadí, alespoň jsme se naučili násobit řádek se sloupcem. Vyzkoušejme na dalším příkladu.

5. $(3, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 6 + 1 - 5 = \underline{\underline{2}}$

6. Vypočítejme předchozí příklad ještě jednou a všimněme si, že jde vlastně o násobení matice typu $(1, 3)$ s maticí typu $(3, 1)$. Podle definice tedy musí být

výsledkem matice typu $(1,1)$. To odpovídá našemu výsledku. Číslo můžeme chápat jako matici o jednom řádku a jednom sloupci:

$$\overset{(1,3)}{(3,1,-1)} \cdot \overset{(3,1)}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 6 + 1 - 5 = 2 = \underline{\underline{\overset{(1,1)}{(2)}}} = (\mathbf{r}_1\mathbf{s}_1)$$

7. Co kdyby měla druhá z matic více sloupců? Nevadí, postupujme podle definice. Řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. To jest:

$$\overset{(1,3)}{(3,1,-1)} \cdot \overset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{(1,2)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overset{(1,2)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix}}}}$$

8. Druhá matice může mít sloupců kolik chce, ale řádků musí mít stejně jako je sloupců v první matici (jinak by nešlo násobit řádky se sloupci):

$$\overset{(1,3)}{(3,1,-1)} \cdot \overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{(1,4)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_4 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overset{(1,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & -5 \end{pmatrix}}}}$$

9. Co když bude mít první matice dva řádky? **První** řádek výsledku vytvoříme tak, že **prvním** řádkem násobíme všechny sloupce. **Druhý** řádek výsledku vytvoříme tak, že **druhým** řádkem násobíme všechny sloupce:

$$\overset{(2,3)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{(2,4)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_4 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underline{\underline{\overset{(2,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & -5 \\ 14 & 13 & 3 & 6 \end{pmatrix}}}}$$

10. Obdobně:

$$\overset{(4,3)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{(4,4)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_3\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_3\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_3\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_3\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_4\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_4\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_4\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_4\mathbf{s}_4 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underline{\underline{\overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & -5 \\ 14 & 13 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}}}}$$

1. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Určete matici AB.

Řešení:

Řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. To jest:

$$\overset{(1,3)}{(3, 1, -1)} \cdot \overset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{(1,2)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 \end{pmatrix}} = \underline{\underline{\overset{(1,2)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix}}}}$$

2. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Určete matici AB.

Řešení:

Prvním řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. Dostaneme tak první řádek výsledné matice. Poté druhým řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. Dostaneme tak druhý řádek výsledné matice.:

$$\overset{(2,3)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{(2,4)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_4 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underline{\underline{\overset{(2,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & -5 \\ 14 & 13 & 3 & 6 \end{pmatrix}}}}$$

3. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Určete matici AB.

Řešení: Prvním řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. Dostaneme tak první řádek výsledné matice. Poté druhým řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. Dostaneme tak druhý řádek výsledné matice. Poté třetím řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. Dostaneme tak třetí řádek výsledné matice.Nakonec čtvrtým řádkem první matice postupně vynásobíme všechny sloupce matice druhé. Dostaneme tak čtvrtý řádek výsledné matice:

$$\overset{(4,3)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{(4,4)}{\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_1\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_2\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_2\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_3\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_3\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_3\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_3\mathbf{s}_4 \\ \mathbf{r}_4\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_4\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_4\mathbf{s}_3 & \mathbf{r}_4\mathbf{s}_4 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underline{\underline{\overset{(3,4)}{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & -5 \\ 14 & 13 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}}}}$$

4. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Určete AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Určete BA.

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Určete AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Určete BA.

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka 8. *Z výše uvedených příkladů je zřejmé, že násobení matic není komutativní: obecně neplatí, že $AB = BA$. Ale, jak jsme viděli, v některých případech tato rovnost nastat může.*

V odstavci věnovaném sčítání matic jsme viděli, že nulová matice neudělá při sčítání matic vůbec nic (viz Poznámka 5). A protože je v matematice důležité míti někoho, kdo nic neudělá, chtěli bychom mít k dispozici matici, která nic neudělá při násobení matic. Jak uvidíme později, toto splňuje takzvaná jednotková matice. Jde o čtvercovou matici (tj. má stejný počet sloupců jako řádků), která má na diagonále jedničky a jinde nuly. Její formální definice je uvedena níže.

Definice 9. *(*Jednotková matice*) Jednotkovou maticí nazveme libovolnou matici* $E \overset{(n,n)}{=} (e_{ij})$ *splňující:*

$$\forall\, i \in 1, 2, \ldots, n \;\forall j \in 1, 2, \ldots, n : (i \neq j \Rightarrow e_{ij} = 0) \wedge (i = j \Rightarrow e_{ij} = 1).$$

6. Vynásobte matice.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Poznámka 10. *Pro jednotkovou matici typu* (n, n) *budeme používat značení* $\overset{(n,n)}{E}$. *Pokud bude z kontextu jasné, jakého je typu, budeme ji značit pouze* E. *Po prostudování výše uvedených příkladů je zřejmé, že můžeme obecně tvrdit:*

$$\overset{(n,n)}{E}\overset{(n,p)}{A} = A \ \text{a také} \ \overset{(n,p)}{A}\overset{(p,p)}{E} = A.$$

1.3.1 Násobení matic - příklady k procvičení

1. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Určete matici AB

Řešení :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -13 \end{pmatrix}}}$$

2. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Určete matici AB

Řešení :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}}}$$

3. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Určete matici AB

Řešení :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}}}$$

4. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Určete matici AB

Řešení :

Součin AB není definován.

1.4 Transpozice matice

Mějme matici A. Vytvořme matici tak, že z řádků matice A uděláme sloupce. Tuto novou matici bývá zvykem označovat A^T. Říkáme, že matice A^T vznikla transpozicí matice A.

Definice 11. *Nechť A je matice typu (m,n). Transponovanou maticí A nazveme matici A^T splňující:*

$$\overset{(n,m)}{A^T} = \overset{(n,m)}{(c_{ij})}, \quad kde \;\; c_{ij} = a_{ji}.$$

1. Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Transponujte matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poznámka 12. *Všimněme si:*

- *Je jedno, zda při transpozici z řádků uděláme sloupce, nebo zda ze sloupců uděláme řádky - dopadne to stejně.*
- *Transpozici si můžeme také představit jako překlopení matice podle hlavní diagonály (vymění si pozice čísla, která jsou naproti sobě vzhledem k diagonále).*

1.5 Vlastnosti maticových operací

Dá se odvodit mnoho zajímavých vztahů popisujících vlastnosti výše zavedených maticových operací. V následující poznámce jsou shrnuty základní vlastnosti sčítání matic a násobení matic skalárem:

Poznámka 13. *Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí:*

1. $\forall\, A, B \in M_{m,n} \,:\, A + B \in M_{m,n}$
   (uzavřenost sčítání)
2. $\forall\, A, B, C \in M_{m,n} \,:\, A + (B + C) = (A + B) + C$
   (asociativita sčítání)
3. $\exists\, O \in M_{m,n}\, \forall A \in M_{m,n} \,:\, A + O = O + A = A$
   (existence nulového prvku)
4. $\forall\, A \in M_{m,n}\, \exists B \in M_{m,n} \,:\, A + B = B + A = O$
   (existence opačného prvku)
5. $\forall\, A, B \in M_{m,n} \,:\, A + B = B + A$
   (komutativita sčítání)
6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, A \in M_{m,n} \,:\, \alpha A \in M_{m,n}$
   (uzavřenost násobení skalárem)
7. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, A, B \in M_{m,n} \,:\, \alpha A + \alpha B = \alpha\,(A + B)$
   (distributivita násobení skalárem vzhledem ke sčítání matic)
8. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \forall\, A \in M_{m,n} \,:\, \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)\, A$
   (distributivita násobení skalárem vzhledem ke sčítání reálných čísel)
9. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \forall\, A \in M_{m,n} \,:\, \alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\, A$
   (kompatibilita násobení skalárem s násobením reálných čísel)
10. $\forall\, A \in M_{m,n} \,:\, 1A = A$

Jak uvidíme později, výše uvedená tvrzení lze stručně vyjádřit tvrzením jediným: **Množina matic spolu s jejich sčítáním a násobením skalárem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.**

Dále uvedeme vlastnosti týkající se transponování matic a jejich násobení.

Poznámka 14. *Pro libovolné* $m, n, p, r \in \mathbb{N}$ *platí*

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, A \in M_{m,n} : (\alpha A)^T = \alpha A^T$
2. $\forall\, A, B \in M_{m,n} : (A+B)^T = A^T + B^T$
3. $\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B \in M_{n,p} : (AB)^T = B^T A^T$
4. $\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B \in M_{n,p}\, \forall\, C \in M_{p,r} : A\,(BC) = (AB)\,C$
5. $\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B, C \in M_{n,p} : A\,(B+C) = AB + AC$
6. $\forall\, A, B \in M_{m,n}\, \forall\, C \in M_{n,p} : (A+B)\,C = AC + BC$

1. Dokažte, že sčítání matic je komutativní.

Řešení : Nechť $A = \overset{(n,m)}{(a_{ij})}$ a $B = \overset{(n,m)}{(b_{ij})}$. Potom (využijeme toho, že sčítání reálných čísel je komutativní):

$$A + B = \overset{(n,m)}{(a_{ij})} + \overset{(n,m)}{(b_{ij})} = \overset{(n,m)}{(\underbrace{c_{ij}}_{=a_{ij}+b_{ij}})} = \overset{(n,m)}{(\underbrace{c_{ij}}_{=b_{ij}+a_{ij}})} = \overset{(n,m)}{(b_{ij})} + \overset{(n,m)}{(a_{ij})} = B + A$$

2. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Numericky výhodně určete matici $5A + 5B$.

Řešení :

Víme, že $5A + 5B = 5(A + B)$, a dá se snadno rozmyslet, že výpočet $5A + 5B$ je numericky náročnější (9 násobení pro výpočet $5A$, 9 násobení pro výpočet $5B$ a ještě 9 součtů pro výpočet $5A+5B$), než výpočet $5(A+B)$ (9 součtů pro výpočet $A + B$ a potom 9 násobení pro výpočet $5(A + B)$). Proto budeme místo $5A + 5B$ počítat $5(A + B)$. Víme, že vyjde totéž!

$$5A + 5B = 5(A + B) = 5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 \\ 10 & -10 & 25 \\ 20 & 0 & 15 \end{pmatrix}}}$$

3. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Numericky výhodně určete matici $2A + 3A$.

Řešení :

Víme, že $2A+3A = (2+3)A$, a dá se snadno rozmyslet, že výpočet $2A+3A$ je numericky náročnější (9 násobení pro výpočet $2A$, 9 násobení pro výpočet $3A$ a ještě 9 součtů pro výpočet $2A + 3A$), než výpočet $(2 + 3)A$ (pouze jeden součet pro výpočet $(2 + 3) = 5$ a 9 násobení pro výpočet $5A$). Proto budeme místo $2A + 3A$ počítat $5A$. Víme, že vyjde totéž!

$$2A + 3A = 5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & 10 \\ 15 & 0 & 10 \end{pmatrix}}}$$

4. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Numericky výhodně určete matici $AB + AC$.

Řešení :

Víme, že $AB + AC = A(B + C)$, a dá se snadno rozmyslet, že výpočet $AB + AC$ je numericky náročnější (27 násobení a 18 součtů pro výpočet AB, 27 násobení a 18 součtů pro výpočet AC a ještě 9 součtů pro výpočet $AB+AC$), než výpočet $A(B+C)$ (9 součtů pro výpočet $A+B$ a 27 násobení a 18 součtů pro výpočet $A(B+C)$). Proto budeme místo $AB+AC$ počítat $A(B + C)$. Víme, že vyjde totéž!

$$AB + AC = A(B+C) = A \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}}}$$

5. Vyberte nepravdivý výrok.

(a) $\forall A \in M_{n,n}\, \exists B \in M_{n,n} \;:\; AB = BA = E$, kde E je matice jednotková.

(b) $\forall A, B \in M_{m,n} \;:\; A + B = B + A$

(c) $\forall A \in M_{m,n}\, \exists B \in M_{m,n} \;:\; A + B = B + A = O$

(d) $\forall A, B, C \in M_{m,n} \;:\; A + (B + C) = (A + B) + C$

Řešení : Výrok:

„$\forall A \in M_{n,n}\, \exists B \in M_{n,n} \;:\; AB = BA = E$, kde E je matice jednotková."

není pravdivý, neboť ne pro každou matici existuje matice inverzní.

6. Vyberte nepravdivý výrok.

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall A, B \in M_{m,n} \;:\; \alpha A + \alpha B = \alpha\,(A + B)$

(b) $\forall A, B \in M_{n,n} \;:\; AB = BA$

(c) $\forall A \in M_{m,n}\, \exists B \in M_{m,n} \;:\; A + B = B + A = O$

(d) $\forall A, B, C \in M_{m,n} \;:\; A + (B + C) = (A + B) + C$

Řešení : Výrok:

„$\forall A, B \in M_{n,n} \;:\; AB = BA$"

není pravdivý, neboť násobení matic není komutativní.

7. Vyberte nepravdivý výrok.

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall A, B \in M_{m,n} \;:\; \alpha A + \alpha B = \alpha\,(A + B)$

(b) $\forall A, B \in M_{m,n} \;:\; A + B = B + A$

(c) $\forall A \in M_{m,n}\, \exists B \in M_{m,n} \;:\; A + B = B + A = O$

(d) $\forall A, B, C \in M_{n,n} \;:\; A(B + C) = AB + CA$

Řešení : Výrok „$\forall\, A, B, C \in M_{n,n}\ :\ A(B+C) = AB + AC$"je pravdivý, ale výrok

„$\forall\, A, B, C \in M_{n,n}\ :\ A(B+C) = AB + CA$"

není pravdivý, neboť násobení matic není komutativní. Existují matice A, C takové, že $AC \neq CA$. V tom případě potom $A(B+C) = AB + AC \neq AB + CA$.

8. Vyberte nepravdivý výrok.

(a) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, A, B \in M_{m,n}\ :\ \alpha A + \alpha B = \alpha\,(A+B)$

(b) $\forall\, A, B \in M_{m,n}\ :\ A + B = B + A$

(c) $\forall\, A \in M_{m,n}\, \exists B \in M_{m,n}\ :\ A + B = B + A = O$

(d) $\forall\, A, B, C \in M_{m,n}\ :\ A\,(BC) = (AB)\,C$

Řešení : Výrok „$\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B \in M_{n,p}\, \forall\, C \in M_{p,r}\ :\ A\,(BC) = (AB)\,C$"je pravdivý, ale výrok

„$\forall\, A, B, C \in M_{m,n}\ :\ A\,(BC) = (AB)\,C$"

není pravdivý, neboť pro $m \neq n$ by nebyl definován například součin BC.

9. Vyberte nepravdivý výrok.

(a) $\forall\, A, B \in M_{m,n}\ :\ (A+B)^T = A^T + B^T$

(b) $\forall\, A, B \in M_{m,n}\ :\ (A+B)^T = B^T + A^T$

(c) $\forall\, A, B \in M_{m,n}\, \forall\, C \in M_{n,p}\ :\ (A+B)\,C = AC + BC$

(d) $\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B \in M_{n,p}\ :\ (AB)^T = A^T B^T$

Řešení : Výrok „$\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B \in M_{n,p}\ :\ (AB)^T = B^T A^T$"je pravdivý, ale výrok

„$\forall\, A \in M_{m,n}\, \forall\, B \in M_{n,p}\ :\ (AB)^T = A^T B^T$"

není pravdivý, neboť násobení matic není komutativní. Znamená to, že existují matice A^T a B^T takové, že $B^T A^T \neq A^T B^T$. V takovém případě $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$. Navíc součin $A^T B^T$ vůbec nemusí být definován.

1.5.1 Vlastnosti maticových operací - příklady k procvičení

1. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Numericky výhodně určete matici $3A + 3B$.

Řešení :

$$\begin{aligned} 3A + 3B &= 3(A+B) = 3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 9 \\ 6 & -6 & 15 \\ 12 & 0 & 9 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

2. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Numericky výhodně určete matici $6A - 3A$.

Řešení :

$$6A - 3A = 3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}}}$$

3. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, matice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Numericky výhodně určete matici $AB + AC$.

Řešení :

$$\begin{aligned}
AB + AC &= A(B+C) = A \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 10 & -4 & 10 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}}}
\end{aligned}$$

1.6 Transformační matice

Vynásobme matici A maticí T zleva a pozorujme výsledek:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3}\cdot 1 & \mathbf{3}\cdot 2 & \mathbf{3}\cdot 1 \\ \mathbf{2}\cdot 5 & \mathbf{2}\cdot 1 & \mathbf{2}\cdot 2 \\ \mathbf{1}\cdot 0 & \mathbf{1}\cdot 1 & \mathbf{1}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Jak vznikl první řádek výsledku? Vzali jsme první řádek matice T a postupně s ním vynásobili všechny řádky matice A. Konkrétně jsme trojkou násobili čísla z prvního řádku matice A, k tomu připočetli nula–násobek čísla z druhého řádku matice A a ještě nula–násobek čísla z třetího řádku matice A. To ale znamená, že jsme vlastně jen čísla v prvním řádku matice A vynásobili číslem 3.

Jak jsme určili druhý řádek výsledné matice? Nulou jsme násobili čísla z prvního řádku matice A, dvojkou čísla z druhého řádku matice A, nulou násobili čísla z třetího řádku matice A a poté vše sečetli. Můžeme to říci i tak, že výsledný druhý řádek je součtem nula–násobku prvního řádku matice A, dvojnásobku druhého řádku matice A a nula–násobku řádku matice A. To ale znamená, že jsme vlastně vynásobili druhý řádek matice A číslem 2.

Třetí řádek výsledku je pak jedna–násobkem původního třetího řádku z matice A. Tetí řádek se tedy nijak nezměnil. Označíme-li i-tý řádek symbolem $\mathbf{r_{iA}}$, můžeme výše uvedený výpočet symbolicky zapsat následujícím způsobem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{r_{1A}} \\ \mathbf{r_{2A}} \\ \mathbf{r_{3A}} \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3}\mathbf{r_{1A}} + 0\mathbf{r_{2A}} + 0\mathbf{r_{3A}} \\ 0\mathbf{r_{1A}} + \mathbf{2}\mathbf{r_{2A}} + 0\mathbf{r_{3A}} \\ 0\mathbf{r_{1A}} + 0\mathbf{r_{2A}} + \mathbf{1}\mathbf{r_{3A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3}\mathbf{r_{1A}} \\ \mathbf{2}\mathbf{r_{2A}} \\ \mathbf{1}\mathbf{r_{3A}} \end{pmatrix}$$

Můžeme tedy říci, že tato matice T transformuje libovolnou matici A (mající tři řádky) tak, že první řádek vynásobí trojkou, druhý řádek dvojkou a třetí nezmění.

Podívejme se na jinou transformační matici T a libovolnou matici A o třech řádcích:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{r_{1A}} \\ \mathbf{r_{2A}} \\ \mathbf{r_{3A}} \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 0\mathbf{r_{1A}} + \mathbf{1}\mathbf{r_{2A}} + 0\mathbf{r_{3A}} \\ \mathbf{1}\mathbf{r_{1A}} + 0\mathbf{r_{2A}} + 0\mathbf{r_{3A}} \\ 0\mathbf{r_{1A}} + 0\mathbf{r_{2A}} + \mathbf{1}\mathbf{r_{3A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}\mathbf{r_{2A}} \\ \mathbf{1}\mathbf{r_{1A}} \\ \mathbf{1}\mathbf{r_{3A}} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že tato transformační matice vyměňuje první a druhý řádek.

A podívejme se ještě na jednu transformační matici:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix}\mathbf{r_{1A}}\\\mathbf{r_{2A}}\\\mathbf{r_{3A}}\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}1\mathbf{r_{1A}}+0\mathbf{r_{2A}}+0\mathbf{r_{3A}}\\-2\mathbf{r_{1A}}+1\mathbf{r_{2A}}+0\mathbf{r_{3A}}\\0\mathbf{r_{1A}}+1\mathbf{r_{2A}}+1\mathbf{r_{3A}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{r_{1A}}\\-2\mathbf{r_{1A}}+\mathbf{r_{2A}}\\\mathbf{r_{2A}}+\mathbf{r_{3A}}\end{pmatrix}$$

Tato transformační matice první řádek nezmění, ke druhému přičte mínus dvojnásobek řádku prvního a ke třetímu řádku přičte (původní) řádek druhý.

Vidíme, že jsme schopni vytvořit transformační matice, které danou matici A nezmění (transformační maticí by byla matice jednotková), které umí vynásobit řádky dané matice požadovaným číslem (transformační matice je v tom případě diagonální), které vyměňují řádky a které přičtou násobek jednoho řádku k násobku jiného řádku.

Všimněme si, že u těchto transformací záleží na pořadí! Například, jednou úpravou nechť je výměna prvního a třetího řádku a druhou úpravou je přičtení druhého řádku k řádku třetímu. Zkusme provést na konkrétní matici:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}}_{A}\begin{array}{l}\mathbf{r_1}\circlearrowleft\mathbf{r_3}\\ \\ \mathbf{r_1}\circlearrowleft\mathbf{r_3}\end{array}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}}_{T_1A}\begin{array}{l} \\ \\ +\mathbf{r_2}\end{array}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}}_{\underbrace{T_2T_1}_{T}A}$$

První transformaci provede matice T_1 (viz níže) a druhou transformaci provede matice T_2 (viz níže). Transformační matici T, která provede tyto úpravy (v tomto pořadí) v matici A, získáme jako součin matic T_1 a T_2:

$$T=T_2T_1=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{T_2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{T_1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

A opravdu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

Nyní pořadí úprav obrátíme. První úpravou bude přičtení druhého řádku k řádku třetímu a druhou úpravou nechť je výměna prvního a třetího řádku. Zkusme provést na stejné matici jako výše:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix}\\ \\ +\mathbf{r_2}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\5&5&5\end{pmatrix}}_{T_2A}\begin{matrix}\mathbf{r_1}\circlearrowright\mathbf{r_3}\\ \\ \mathbf{r_1}\circlearrowright\mathbf{r_3}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}5&5&5\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}}_{\underbrace{T_1T_2}_{T^*}A}$$

První transformaci provede matice T_2 a druhou transformaci provede matice T_1 (viz níže). Transformační matici T^*, která provede tyto úpravy (v tomto pořadí) v matici A, získáme jako součin matic T_2 a T_1 (v opačném pořadí, než v předcházejícím případě!):

$$T^* = T_1T_2 = \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{T_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{T_2} = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

A opravdu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{T^*}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix}5&5&5\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

Transformační matici při „ručním" výpočtu můžeme obdržet i jinak, než násobením matic. Všimněme si, že

$$T = T_2T_1 = T_2T_1E.$$

To znamená, že matici T jsme mohli získat tak, že bychom úpravy (které provádí matice T_1 a T_2) provedli v požadovaném pořadí v matici jednotkové. To jest:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{E}\begin{matrix}\mathbf{r_1}\circlearrowright\mathbf{r_3}\\ \\ \mathbf{r_1}\circlearrowright\mathbf{r_3}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{T_1E=T_1}\begin{matrix}\\ \\ +\mathbf{r_2}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}}_{T_2T_1E=T_2T_1=T}$$

Obdobně můžeme zjistit matici T^*:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{E}\begin{matrix}\\ \\ +\mathbf{r_2}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{T_2E=T_2}\begin{matrix}\mathbf{r_1}\circlearrowright\mathbf{r_3}\\ \\ \mathbf{r_1}\circlearrowright\mathbf{r_3}\end{matrix}\rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{T_1T_2E=T_1T_2=T^*}$$

1. Nalezněte transformační matici T, která transformuje matici A typu $(2,5)$ tak, že

1.) První řádek vynásobí číslem -1;

2.) Druhý řádek vynásobí číslem 5;

3.) Přičte dvojnásobek prvního řádku k řádku druhému.

Řešení : Požadované úpravy provedeme v daném pořadí s jednotkovou maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\mathbf{1}) \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(\mathbf{5}) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} \to \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = T}}$$

2. Nalezněte transformační matici T, která transformuje matici A typu $(3,4)$ tak, že

1.) Třetí řádek matice A vynásobí číslem 3;

2.) Ke druhému řádku matice A přičte dvojnásobek prvního řádku A;

3.) Vymění první a druhý řádek matice A.

Řešení : Požadované úpravy provedeme v daném pořadí s jednotkovou maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = T}}$$

1.6.1 Transformační matice - příklady k procvičení

1. Nalezněte transformační matici T, která transformuje matici A typu $(4,5)$ tak, že vymění její první a třetí řádek.

Řešení :

$$T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

2. Nalezněte transformační matici T, která transformuje matici A typu $(3,4)$ tak, že

1.) 1. řádek matice TA je dvojnásobek prvního řádku matice A;

2.) 2. řádek matice TA je pětinásobek druhého řádku matice A;

3.) 3. řádek matice TA mínus trojnásobek třetího řádku matice A.

Řešení :

$$T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}}$$

3. Nalezněte transformační matici T, která transformuje matici A typu $(3,n)$ tak, že

1.) 1. řádek matice TA je trojnásobek druhého řádku matice A;

2.) 2. řádek matice TA je součet prvního a třetího řádku matice A;

3.) 3. řádek matice TA je roven pětinásobku 1. řádku matice A, od něhož odečteme dvojnásobek 2. řádku matice A a přičteme šestinásobek 3. řádku A.

Řešení :

$$T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}}}$$

4. Nalezněte transformační matici T, která transformuje matici A typu $(4, n)$ tak, že

1.) 1. řádek matice TA je trojnásobek druhého řádku matice A;

2.) 2. řádek matice TA je součet prvního a třetího řádku matice A;

3.) 3. řádek matice TA je roven pětinásobku 1. řádku matice A, od něhož odečteme dvojnásobek 2. řádku matice A a přičteme šestinásobek 3. řádku A.

Řešení :

$$T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

1.7 Matice inverzní

Definice 15. *Nechť A je matice typu (n,n) (tj. jde o čtvercovou matici). Matici A^{-1} splňující:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \overset{(n,n)}{E}$$

nazveme maticí inverzní k matici A.

Požadujeme tedy, aby součin matice a matice k ní inverzní byl roven matici jednotkové. Všimněme si analogie s reálnými čísly (ty můžeme vlastně chápat jako matice o jednom řádku a jednom sloupci). Tam úlohu jednotkové matice E hraje číslo 1. Například pro $A = 2$ je $A^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, neboť:

$$\underbrace{2 \cdot \frac{1}{2}}_{AA^{-1}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2}_{A^{-1}A} = \underbrace{1}_{E}.$$

Příklad 16. *Vezměme například matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ vidíme, že*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

A také

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Můžeme proto tvrdit, že matice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ je maticí inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Značíme:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 17.

- *V definici matice inverzní k matici A je požadováno, aby $AA^{-1} = E$ a také $A^{-1}A = E$. Je-li však nějaká matice B v podezření, že je maticí inverzní k A, není třeba dokazovat platnost obou těchto rovností. Dá se dokázat, že když nějaká matice B splňuje $AB = E$, pak již můžeme tvrdit, že $B = A^{-1}$ (není již třeba ověřovat, že $BA = E$, jistě to platí také). V předchozím příkladu tedy bylo ověřování obou rovností zbytečné, stačilo ověřit jen jednu z nich.*

- *Ne ke každé matici matice inverzní existuje! Vezměme například matici A, jejíž první řádek je tvořen nulami a vynásobme :*

  $$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \neq E.$$

  Vidíme, že výsledek má zase nulový první řádek. A není to náhoda. I kdybychom matici A vynásobili jakoukoli jinou maticí (typu (2,2)), ve výsledku bude nulový první řádek a tedy výsledkem nebude matice jednotková. To ale znamená, že žádná matice nemůže být inverzní k A.

- *Matici, k níž existuje matice inverzní nazýváme* **maticí regulární** *a matici k níž matice inverzní neexistuje nazýváme* **maticí singulární**.

A jak k dané matici A najít matici inverzní? Když si uvědomíme, že A^{-1} je vlastně transformační matice, která převádí matici A na matici jednotkovou, můžeme použít následující postup. Napíšeme zadanou matici A, za čáru matici jednotkovou E a upravujeme matici A tak, abychom místo ní obdrželi matici jednotkovou. Stejné úpravy provádíme s jednotkovou maticí za čárou - matice, kterou obdržíme po provedení těchto úprav, je matice inverzní k A. Schematicky:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array} \right) \sim \cdots \longrightarrow \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array} \right)$$

1. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení : Můžeme postupovat tak, že dostaneme nuly nejprve pod diagonálu a pak nuly nad diagonálu. Nakonec upravíme diagonálu tak, aby na ní byly jedničky.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A|E)} \begin{array}{l} \\ -\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +3\mathbf{r_3} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4\mathbf{r_2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-\mathbf{1}) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Zkouška :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\mathbf{4} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3\mathbf{r_3} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -20 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :\mathbf{4} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +\mathbf{r_2} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Zkouška :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka 18. *Všimněme si:*

- *Na předchozích dvou příkladech je možno pozorovat fakt, že matice inverzní k matici inverzní je původní matice. To jest, jestliže k A existuje A^{-1}, pak*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

3. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3\mathbf{r_2} \\ \\ +5\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\mathbf{9} \\ \cdot\mathbf{9} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 9 & 0 & -45 & 9 & -27 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5\mathbf{r_3} \\ -2\mathbf{r_3} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 9 & 0 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\mathbf{\frac{1}{9}} \\ \cdot\mathbf{\frac{1}{9}} \\ \cdot\mathbf{\frac{1}{9}} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Zkouška :

$$A^{-1}A = \tfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Matice A není čtvercová. Úloha proto nemá řešení.

5. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r_1} \\ -2\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Při úpravách matice A jsme obdrželi nulový řádek (před čarou). Z toho plyne, že matice A nemá matici inverzní (je singulární - viz Poznámka 17). Úloha proto nemá řešení.

Poznámka 19. *Následující tvrzení je možné snadno dokázat:*

1. *Jestliže matice A^{-1} a B^{-1} existují, pak $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *Jestliže matice A^{-1} existuje, pak $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

V důkazu prvního tvrzení využijeme asociativitu násobení matic (nezáleží na uzávorkování, viz Poznámka 14):

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

V důkazu druhého tvrzení využijeme toho, že $B^TA^T = (AB)^T$ (viz Poznámka 14). Chceme ukázat, že matice $(A^{-1})^T$ je maticí inverzní k matici A^T. A opravdu:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$$

a také

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E.$$

1.7.1 Matice inverzní - příklady k procvičení

1. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

2. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Matice A je singulární (matice k ní inverzní neexistuje).

3. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 11 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

4. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : Matice A je singulární (matice k ní inverzní neexistuje).

5. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 11 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

6. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

7. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

8. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

9. Nalezněte matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

Kapitola 2

Soustavy lineárních rovnic

Budeme řešit soustavy lineárních rovnic na množině reálných čísel. Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má obecně tvar:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{2.1}$$

kde a_{ij} a b_i jsou daná reálná čísla (i nabývá hodnot $1, 2, \ldots, m$; j nabývá hodnot $1, 2, \ldots, n$) a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé. Vyřešit tuto soustavu znamená najít všechna reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že jsou splněny všechny rovnosti v (2.1).

Na zkladní škole jste jistě řešili jednoduché soustavy lineárních rovnic, například:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ x - y & = & -1, \end{array}$$

kde x a y jsou neznámé. Toto značení neznámých různými písmenky abecedy je však nešťastné, pokud bychom řešili soustavy rovnic s více neznámými, než je písmen v abecedě. Proto budeme neznámé značit $x_1, x_2, \ldots$. Výše uvedenou soustavu v tomto duchu přeformulujme na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccr} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \end{array} \tag{2.2}$$

Jistě se vám vybaví alespoň dvě metody řešení soustav lineárních rovnic : dosazovací a sčítací. Vyřešme soustavu (2.2) metodou sčítací. Víme, že řešení soustavy se nezmění, jestliže obě strany některé z rovnic vynásobíme týmž nenulovým číslem. Vynásobme proto první rovnici číslem 2. Obdržíme:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \end{array} \tag{2.3}$$

Řešení soustavy se také nezmění pokud jednu z rovnic přičteme k jiné rovnici soustavy. Přičtěme proto rovnici první k rovnici druhé:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 0 & = & 3 \end{array} \tag{2.4}$$

Z druhé rovnice je jasné, že $x_1 = 1$ a dosazením do první rovnice obdržíme $2 + 2x_2 = 6$. Odtud je jasné, že $x_2 = 2$.

Soustavu rovnic jsme sice vyřešili, ale zápis výpočtu je zbytečně komplikovaný. Domluvme se, že neznámé v rovnicích budeme zapisovat vždy v pořadí $x_1, x_2, \ldots$. To jest, budeme psát například $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -6$, ale ne $5x_2 + 3x_1 - 2x_3 = -6$ (i když to říká totéž). Pak můžeme při psaní ušetřit čas a energii neustálým opisováním symbolů x_1, $x_2 \ldots$ a $=$. Domluvme se, že symboly x_1, $x_2 \ldots$ nebudeme zapisovat vůbec a místo $=$ zapíšeme svislou čáru. Rovnici $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -6$ tedy zapíšeme ve tvaru $3\ 5\ -2\ \mid -6$. Vyřešme tedy výše uvedenou soustavu ještě jednou a srovnejme oba zápisy:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \\ \hline \end{array} \text{ zapsáno maticově: } \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \\ \hline \end{array} \text{ zapsáno maticově: } \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 0 & = & 3 \\ \hline \end{array} \text{ zapsáno maticově: } \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

V dalším textu budeme tento maticový zápis hojně využívat. A aby bylo jasné, jaké úpravy provádíme, budeme je značit vedle matic. Například:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\mathbf{2} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\mathbf{r_2} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Poznámka 20. *Z výše uvedeného je zřejmé, že řádky v maticích reprezentují jednotlivé rovnice zadané soustavy a při úpravách můžeme řádky vyměňovat (pořadí rovnic nemá na řešení vliv), násobit všechna čísla v řádku nějakým nenulovým číslem (odpovídá násobení obou stran rovnice), přičítat jeden řádek (tj. rovnici) ke druhému a výše uvedené kombinovat - přičítat násobek jednoho řádku k jinému řádku matice. Tyto úpravy musíme samozřejmě provádět s* **celými řádky, tj. i s čísly za čarou!** *Tyto úpravy budeme označovat jako ekvivalentní, či Gaussovské* *úpravy rovnic.*

A proč vlastně nemůžeme obě strany rovnice vynásobit nulou?! Představme si rovnici

$$x_1 - x_2 = 0. \tag{2.5}$$

Pokud bychom obě strany rovnice vynásobili nulou, obdrželi bychom $0 = 0$*. A to je přece pravda, ne?*

Pravda to jistě je, ale ztratili jsme tím informaci! Všimněme si, že rovnice (2.5) vlastně říká, že $x_1 = x_2$*. Řešením rovnice (2.5) jsou tedy libovolné dvojice stejných reálných čísel, například* $x_1 = x_2 = 3$*. Proti tomu rovnice* $0 = 0$ *neklade na hodnoty* x_1 *a* x_2 *žádné požadavky, rovnici* $0 = 0$ *„nevadí“ například hodnoty* $x_1 = 3$ *a* $x_2 = 5$*. Shrnuto, vynásobit obě strany rovnice nulou by bylo příjemně jednoduché, ale ztratili bychom požadavky (informace) na řešení kladené a výsledné řešení by nebylo řešením původně zadané soustavy (s jedinou výjimkou a to soustavou, která by obsahovala jen rovnici* $0 = 0$*).*

2.1 Gaussova eliminační metoda

Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic spočívá v tom, že pomocí ekvivalentních úprav (viz Poznámka 20). Převedeme soustavu na takzvaný schodový tvar. Znamená to, že v každé další rovnici je alespoň o jednu neznámou méně, procházíme-li rovnice od první po poslední. Graficky znázorněno, snažíme se o následující úpravy:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3, \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}\right)}_{\text{zadaná soustava}} \sim \cdots \longrightarrow \cdots \sim \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a^*_{3n} & b^*_3, \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}\right)}_{\text{soustava ve schodovém tvaru}}$$

V prvé řadě se tedy snažíme dostat nuly pod diagonálu matice soustavy, ale nestačí to! Na začátku každého dalšího řádku musí být alespoň o jednu nulu v řadě více, než kolik jich bylo na začátku řádku předcházejícího. To je výše zmiňovaný schodový tvar. Například:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)}_{\text{je ve schodovém tvaru}} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)}_{\text{není ve schodovém tvaru}} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{je ve schodovém tvaru}}$$

Ekvivalentní úpravy nemění řešení soustavy, řešení zadané soustavy je proto stejné jako řešení soustavy ve schodovém tvaru, kterou jsme těmito úpravami obdrželi. Řešit soustavu ve schodovém tvaru je jednoduché (jak uvidíme na konkrétních příkladech) řešení obdržíme takzvanou zpětnou substitucí.

1. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar (čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat“ jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ +\mathbf{r_1} \\ -3\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 8 & -5 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -8\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -111 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_2 + 4x_3 & = & 11 \\ -37x_3 & = & -111 \end{array}$$

Z rovnice $-37x_3 = -111$ plyne, že $x_3 = 3$. Dosadíme za x_3 do rovnice $x_2 + 4x_3 = 11$ a obdržíme:

$$x_2 + 12 = 11 \Rightarrow x_2 = -1.$$

Dosadíme za x_3 a x_2 do rovnice $x_1 - x_2 + x_3 = 6$ a obdržíme:

$$x_1 + 1 + 3 = 6 \Rightarrow x_1 = 2.$$

Určili jsme tak řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}}.$$

Zkouška :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 & - & (-1) & + & 3 & = & 6 \\ -2 & + & 2\cdot(-1) & + & 3\cdot 3 & = & 5 \\ 3\cdot 2 & + & 5\cdot(-1) & - & 2\cdot 3 & = & -5 \end{array}$$

2. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar (čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat“ jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ -3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\mathbf{2} \\ \cdot\mathbf{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 2 & 14 \\ -6 & -10 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5\mathbf{r_1} \\ +3\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -7\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 28 & 56 \end{array}\right) \begin{array}{lrcl} \Rightarrow & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ \Rightarrow & -x_2 - 3x_3 & = & -6 \\ \Rightarrow & 28x_3 & = & 56 \end{array}$$

Z rovnice $28x_3 = 56$ plyne, že $x_3 = 2$. Dosadíme za x_3 do rovnice $-x_2-3x_3 = -6$ a obdržíme:

$$-x_2 - 6 = -6 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Dosadíme za x_3 a x_2 do rovnice $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ a obdržíme:

$$2x_1 + 0 + 2 = 4 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Určili jsme tak řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}.$$

Zkouška :

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2 \cdot 1 & + & 0 & + & 2 & = & 4 \\ 5 \cdot 1 & + & 2 \cdot 0 & + & 2 & = & 7 \\ -3 \cdot 1 & - & 5 \cdot 0 & + & 2 \cdot 2 & = & 1 \end{array}$$

3. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar (čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat“ jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & -4 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3\mathbf{r_1} \\ +5\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & 6 & -4 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \; 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \; = \; 5 \Rightarrow 0 = 5$$

Obdrželi jsme sporné tvrzení, že $0 = 5$. Došli jsme k němu na základě předpokladu, že nějaká reálná čísla x_1, x_2, x_3 splňující zadanou soustavu existují. Znamená to, že tento předpoklad byl nepravdivý a tak můžeme říci, že:

Zadaná soustava nemá řešení.

Poznámka 21. *Jak nám tedy pan Gauss dává ze záhrobí vědět, že daná soustava nemá řešení? Po úpravě na schodový tvar se v nějakém řádku objeví před čarou samé nuly a za čarou je nenulové číslo.*

4. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & & & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar (čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat“ jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\mathbf{2} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +3\mathbf{r_1} \\ +2\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \; 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \; = \; -1 \Rightarrow 0 = -1$$

Zadaná soustava nemá řešení.

5. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & & & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar (čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat" jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -\mathbf{r_1} \\ -3\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{lrcl} \Rightarrow & x_1 + x_3 & = & 5 \\ \Rightarrow & x_2 - 2x_3 & = & -5 \\ \Rightarrow & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

Poslední rovnice $0 = 0$ je jistě vždy splněna, není s ničím ve sporu, ale o konkrétní podobě řešení nám nic neříká (zatím jen připouští všechny možnosti). Řešení dané soustavy proto musíme získat ze zbývajících dvou rovnic. Ve druhé rovnici:

$$x_2 - 2x_3 = -5 \tag{2.6}$$

se vyskytují dvě neznámé, x_2 a x_3. Představme si, že $x_3 = 0$, potom x_2 musí být rovno -5. Kdyby $x_3 = 1$, potom x_2 musí být rovno -3. Kdyby $x_3 = -1$, potom x_2 musí být rovno $-7\ldots$ Na dosazení zbývajících nekonečně mnoho možností pro hodnotu x_3 však nemáme ani čas, ani chuť. Vyřešme proto problém obecně. Řekněme, že neznámá x_3 je rovna nějakému ráelnému číslu t (budeme mu říkat parametr a říkáme, že jsme zvolili neznámou x_3 za parametr). Tj. $\underline{x_3 = t}$. Z rovnice (2.6) pak plyne:

$$x_2 - 2t = -5 \Rightarrow \underline{x_2 = -5 + 2t}.$$

Tím jsme vyčerpali informace z posledních dvou rovnic a zbývá nám rovnice první:

$$x_1 + x_3 = 5 \tag{2.7}$$

V této rovnici jsou opět dvě neznámé? Omyl! jednu z nich jsme již určili! Řekli jsme, že $x_3 = t$. Po dosazení za x_3 do (2.7) obdržíme:

$$x_1 + t = 5 \Rightarrow \underline{x_1 = 5 - t}.$$

Určili jsme tak řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5-t \\ -5+2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Zkouška :

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 = (5-t) + t &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = (5-t) + (-5+2t) - t &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3(5-t) + (-5+2t) + t &= 10 \end{aligned}$$

6. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar (výměnu prvního a druhého řádku budeme značit $\mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2}$; čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat“ jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\mathbf{r_1} \\ +3\mathbf{r_1} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathbf{r_2} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\mathbf{r_3} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 6x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice $0 = 0$ je jistě vždy splněna, ale o konkrétní podobě řešení nám nic neříká (zatím jen připouští všechny možnosti). Řešení dané soustavy proto musíme získat ze zbývajících tří rovnic. Třetí rovnice:

$$6x_4 = 0 \Rightarrow \underline{x_4 = 0}.$$

Do druhé rovnice dosadíme $x_4 = 0$:

$$2x_2 - x_3 + 7x_4 = 0 \Rightarrow 2x_2 - x_3 = 0.$$

Za parametr zvolíme $\underline{x_2 = t} \in \mathbb{R}$ (jako parametr bychom mohli klidně zvolit i x_3, ale výpočet by byl trošku komplikovanější):

$$2t - x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_3 = 2t}.$$

Tím jsme vyčerpali informace z posledních tří rovnic a zbývá nám rovnice první $-x_1 + x_2 + 3x_4 = 0$. Dosadíme do ní, co jsme již zjistili: $x_4 = 0$, $x_3 = 2t$ a $x_2 = t$. Obdržíme tak:

$$-x_1 + t + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = t}.$$

Určili jsme tak řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.}}$$

Zkouška :

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_3 + x_4 = 2t - 2t + 0 &= 0 \\
-x_1 + x_2 + 3x_4 = -t + t + 3 \cdot 0 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3t + t - 4t - 0 &= 0 \\
2x_2 - x_3 + x_4 = 2t - 2t + 0 &= 0
\end{aligned}$$

7. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\
x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_2 + x_4 &= -1 \\
-x_1 + x_3 - x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar:

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ -\mathbf{r_1} \\ \\ +\mathbf{r_1} \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ +\mathbf{r_2} \\ +\mathbf{r_2} \end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)
\ \mathbf{r_3} \circlearrowleft \mathbf{r_4}
\sim
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\
\Rightarrow \quad -x_2 - x_4 &= 1 \\
\Rightarrow \quad 2x_3 &= 3 \\
\Rightarrow \quad 0 &= 0
\end{aligned}
$$

Ze třetí rovnice plyne:

$$2x_3 = 3 \Rightarrow \underline{x_3 = \frac{3}{2}}.$$

V druhé rovnici zvolíme parametr $x_4 = t \in \mathbb{R}$:

$$-x_2 - x_4 = 1 \Rightarrow -x_2 - t = 1 \Rightarrow x_2 = \underline{-1 - t}.$$

Dosazením do první rovnice obdržíme:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 1 - t + \frac{3}{2} + 2t = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -t - \frac{1}{2}}.$$

Určili jsme tak řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -t - \frac{1}{2} \\ -1 - t \\ \frac{3}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Zkouška :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -t - \frac{1}{2} - 1 - t + \frac{3}{2} + 2t &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + t &= 1 \\ x_2 + x_4 = -1 - t + t &= -1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = t + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - t &= 2 \end{aligned}$$

8. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -2\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -3\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{rr} \Rightarrow & 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ \Rightarrow & 2x_2 + x_3 = 1 \\ \Rightarrow & 0 = 0 \end{array}$$

V druhé rovnici zvolíme parametr $x_2 = t \in \mathbb{R}$:

$$2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow 2t + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \underline{1 - 2t}.$$

Dosazením do první rovnice obdržíme:

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow 3x_1 + t - (1 - 2t) + x_4 = -1.$$

Musíme proto zvolit ještě jeden parametr, třeba $x_1 = s \in \mathbb{R}$:

$3x_1 + t - (1-2t) + x_4 = -1 \;\Rightarrow\; 3s + 3t - 1 + x_4 = -1 \Rightarrow\; x_4 = \underline{-3s-3t}$.

Určili jsme tak řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1-2t \\ -3s-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ kde } s,t \in \mathbb{R}.}}$$

Zkouška :

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3s + t - (1-2t) - 3s - 3t &= -1 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6s + 4t - (1-2t) - 6s - 6t &= -1 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 6s + 8t + (1-2t) - 6s - 6t &= 1 \end{aligned}$$

9. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ -3x_1 - 7x_2 - x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & -1 & 0 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \\ +3\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -\mathbf{r_2} \\ +2\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

V druhé rovnici zvolíme parametry $x_3 = s \in \mathbb{R}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$:

$$-x_2 + 2s - 3t = 2 \Rightarrow -x_2 = 2 - 2s + 3t \Rightarrow x_2 = \underline{-2 + 2s - 3t}.$$

Dosazením do první rovnice obdržíme:

$$x_1 + 3(-2 + 2s - 3t) - s + 2t = 1 \Rightarrow x_1 = \underline{7 - 5s + 7t}.$$

Určili jsme tak řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 7 - 5s + 7t \\ -2 + 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Zkouška :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = (7 - 5s + 7t) + 3(-2 + 2s - 3t) - s + 2t &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 2(7 - 5s + 7t) + 5(-2 + 2s - 3t) + t &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = (7 - 5s + 7t) + 2(-2 + 2s - 3t) + s - t &= 3 \\ -3x_1 - 7x_2 - x_3 = -3(7 - 5s + 7t) - 7(-2 + 2s - 3t) - s &= -7 \end{aligned}$$

10. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Navíc určete všechna řešení, kde $x_2 = 13$.

Soustavu zapíšeme maticově a upravujeme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -4\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ \Rightarrow \quad -5x_2 + 5x_3 = -15 \Rightarrow -x_2 + x_3 = -3 \\ \Rightarrow \quad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

Ve druhé rovnici zvolíme parametr $x_3 = t$ a obdržíme:

$$-x_2 + t = -3 \Rightarrow x_2 = t + 3$$

Dosazením do první rovnice obdržíme:

$$x_1 + 2(t+3) - t = 5 \Rightarrow x_1 = -1 - t$$

Určili jsme tak řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 3+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.}}$$

Nyní chce me najít všechna řešení splňující $x_2 = 13$. Z výše uvedeního řešení je zřejmé, že to nastane právě když $x_2 = 3 + t = 13$. Jde tedy o ta řešení, kde $t = 10$. Stačí proto v obecném řešení dosadit za t desítku. Dostaneme:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}.}}$$

Zkouška :

$$\begin{aligned} (-1-t) + 2(t+3) - t &= 5 \\ 2(-1-t) - (t+3) + 3t &= -5 \\ 4(-1-t) + 3(t+3) + t &= 5 \end{aligned}$$

2.1.1 Gaussova eliminační metoda - příklady k procvičení

1. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}}.$$

2. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

3. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení :

Zadaná soustava nemá řešení.

4. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1-8s+2t \\ 2-5s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

5. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

6. Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Navíc určete všechna řešení, kde $x_2 = 2$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2s-2t \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}.$$

Z $x_2 = 2 = t - s$ dostáváme $t = s + 2$. Dosazením do výše uvedeného řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4-4s \\ 2 \\ s \\ s+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } s \in \mathbb{R}.$$

2.2 Gauss – Jordanova metoda

Gauss – Jordanovu eliminační metodu je možné použít pouze pro řešení soustav n lineárních rovnic o n neznámých majících jediné řešení. Pomocí ekvivalentních úprav (viz Poznámka 20) se snažíme matici soustavy upravit na matici jednotkovou. Vektor pravých stran je potom řešením soustavy:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n, \end{array}\right)}_{\text{zadaná soustava}} \sim \cdots \longrightarrow \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n, \end{array}\right)$$

Můžeme postupovat třeba tak, že se nejprve snažíme dostat nuly pod diagonálu matice soustavy. Když je to hotovo, vynulujeme čísla nad diagonálou a nakonec upravíme diagonálu tak, ať jsou na ní jedničky. Například vyřešme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \end{array}$$

Soustavu zapíšeme maticově a nejprve upravujeme na schodový tvar (čísla, která chceme v daném kroku „vynulovat“ jsou vyznačena barvou):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ +\mathbf{r_1} \\ -3\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 8 & -5 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -8\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -111 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ \cdot\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{37}} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní vynulujeme čísla nad diagonálou. Začneme u posledního sloupce matice soustavy.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} -\mathbf{r_3} \\ -4\mathbf{r_3} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} +\mathbf{r_2} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Určili jsme tak řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zkouška :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 & - & (-1) & + & 3 & = & 6 \\ -2 & + & 2\cdot(-1) & + & 3\cdot 3 & = & 5 \\ 3\cdot 2 & + & 5\cdot(-1) & - & 2\cdot 3 & = & -6 \end{array}$$

Výše uvedený postup je možné zkrátit tak, že nulujeme současně čísla pod i nad diagonálou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +\mathbf{r_1} \\ -3\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 8 & -5 & -23 \end{array}\right) \begin{array}{c} +\mathbf{r_2} \\ \\ -8\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -111 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{-1}{37} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -5\mathbf{r_3} \\ -4\mathbf{r_3} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Opět jsme dospěli k řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Pomocí Gauss–Jordanovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array}$$

Zadanou soustavu zapíšeme maticově a pomocí ekvivalentních úprav nulujeme současně čísla pod i nad diagonálou:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3\mathbf{r_1} \\ -2\mathbf{r_1} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -11 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\mathbf{11} \\ \\ \cdot\mathbf{11} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 11 & 33 & 11 & 22 \\ 0 & -11 & -1 & 4 \\ 0 & -44 & 11 & 121 \end{array}\right) \begin{array}{c} +3\mathbf{r_2} \\ \\ -4\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & 8 & 34 \\ 0 & -11 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 105 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ : \mathbf{15} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & 8 & 34 \\ 0 & -11 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} -8\mathbf{r_3} \\ +\mathbf{r_3 3} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 11 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & -11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} : \mathbf{11} \\ : (-\mathbf{11}) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Řešením zadané soustavy rovnic je proto vektor:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}}}.$$

Zkouška :

$$\begin{array}{rcrcrcr} -6 & - & (-2) & + & 14 & = & 10 \\ -2 & + & (-3) & + & 7 & = & 2 \\ -4 & + & (-2) & + & 21 & = & 15 \end{array}$$

2.2.1 Gauss – Jordanova metoda - příklady k procvičení

1. Pomocí Gauss–Jordanovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pomocí Gauss–Jordanovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Pomocí Gauss–Jordanovy eliminační metody vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 9 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 23 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Řešení soustav lineárních rovnic pomocí matice inverzní

Níže popsaná metoda je vlastně Gauss – Jordanova eliminační metoda zapsaná maticově. Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array} \tag{2.8}$$

Koeficienty neznámých jsou prvky matice, jíž budeme značit A a nazývat *maticí soustavy*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jako *vektor neznámých* označujeme vektor:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A *vektorem pravých stran soustavy* nazýváme vektor

$$\overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li matici soustavy A s vektorem neznámých $\overline{\mathbf{x}}$, obdržíme:

$$A\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{b}}.$$

Soustavu lineárních rovnic (2.8) proto můžeme jednoduše zapsat jako maticovou rovnici:

$$A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}. \tag{2.9}$$

Cílem je z rovnice (2.9) určit vektor neznámých $\overline{\mathbf{x}}$. Provedeme to tak, že obě strany rovnice (což jsou stejné vektory) vynásobíme zleva maticí inverzní k matici soustavy (pokud existuje):

$$\begin{aligned} A\overline{\mathbf{x}} &= \overline{\mathbf{b}} \\ A^{-1}A\overline{\mathbf{x}} &= A^{-1}\overline{\mathbf{b}} \\ E\overline{\mathbf{x}} &= A^{-1}\overline{\mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{x}} &= A^{-1}\overline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Proto, pokud A^{-1} existuje, můžeme vektor neznámých určit z rovnice:

$$\overline{\mathbf{x}} = A^{-1}\overline{\mathbf{b}}.$$

Tento postup je použit v následujících řešených příkladech.

1. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 20 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 80 \end{array}$$

Nejprve určíme matici inverzní k matici soustavy.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A|E)} \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathbf{r_3} \\ +\mathbf{r_3} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\mathbf{10} \\ \\ \cdot\mathbf{10} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & -30 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & -10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} +3\mathbf{r_3} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 0 & 0 & -3 & 10 & -7 \\ 0 & 10 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & -10 & 10 \end{array}\right)$$

Proto

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 10 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vektor řešení dostaneme dosazením do vzorce $\overline{\mathbf{x}} = A^{-1}\overline{\mathbf{b}}$.

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 10 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 80 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -45 \\ 5 \\ 90 \end{pmatrix}}}$$

2. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

Nejprve určíme matici inverzní k matici soustavy.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A|E)} \begin{array}{l} \\ -\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +3\mathbf{r_3} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4\mathbf{r_2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-\mathbf{1}) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Proto

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Vektor řešení dostaneme dosazením do vzorce $\overline{\mathbf{x}} = A^{-1}\overline{\mathbf{b}}$.

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

2.3.1 Řešení soustav lineárních rovnic pomocí matice inverzní - příklady k procvičení

1. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

2. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -10 & 11 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

3. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 10 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 10 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

4. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & & & = & 6 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

5. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

6. Pomocí matice inverzní k matici soustavy vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}}$$

2.4 Metoda nejmenších čtverců

Předpokládejme, že vektor $\overline{\mathbf{x}}$ je řešením soustavy lineárních rovnic:

$$\overset{(m,n)}{A}\overset{(n,1)}{\overline{\mathbf{x}}} = \overset{(m,1)}{\overline{\mathbf{b}}} \;. \tag{2.10}$$

Obě strany rovnice (2.10) jistě můžeme vynásobit maticí $\overset{(n,m)}{A^T}$. Obdržíme tak rovnost

$$\overset{(n,m)}{A^T}\overset{(m,n)}{A}\overset{(n,1)}{\overline{\mathbf{x}}} = \overset{(n,m)}{A^T}\overset{(m,1)}{\overline{\mathbf{b}}} \;. \tag{2.11}$$

Označme $A^* = A^T A$ (dá se dokázat, že to bude čtvercová symetrická matice) a $\overline{\mathbf{b}}^* = A^T\overline{\mathbf{b}}$. Rovnici (2.11) pak můžeme přepsat ve tvaru:

$$\overset{(n,n)}{A^*}\overset{(n,1)}{\overline{\mathbf{x}}} = \overset{(n,1)}{\overline{\mathbf{b}}^*} \;. \tag{2.12}$$

Vidíme, že jde vlastně opět o soustavu lineárních rovnic s maticí soustavy A^* a vektorem pravých stran $\overline{\mathbf{b}}^*$. Z výše uvedeného je jasné, že pokud je nějaký konkrétní vektor $\overline{\mathbf{x}}$ řešením zadané soustavy (2.10), pak je jistě také řešením soustavy (2.12). Naopak to ale neplatí! Z rovnosti (2.11) nutně nevyplývá platnost rovnosti (2.10). V rovnici (2.11) obecně nemůžeme zkrátit A^T, (matice inverzní k A^T nemusí existovat)!

Může se stát, že soustava lineárních rovnic (2.12) má řešení, ale přitom soustava (2.10) žádné řešení nemá. Přesto je řešení soustavy (2.12) zajímavé, a to v následujícím smyslu. Definujme pro libovolný vektor $\overset{(n,1)}{\overline{\mathbf{x}}}$ vektor $\overset{(n,1)}{\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}})}$ rovnicí:

$$\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{b}}.$$

Vektor $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}})$ nazýváme *reziduem soustavy* (2.10) a vyjadřuje, jak moc se při dosazení čísel z vektoru $\overline{\mathbf{x}}$ za neznámé do soustavy $A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ budou lišit hodnoty na levé straně od těch na pravé straně rovností. Je zřejmé, že pokud $\overline{\mathbf{x}}$ je řešením soustavy (2.10), pak $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{o}}$.

Pokud $\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ je řešením soustavy (2.12), ale zadaná soustava (2.10) řešení nemá (to poznáme tak, že $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{0}) \neq \overline{\mathbf{o}}$), budeme vektor $\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$ nazývat *přibližným řešením* zadané soustavy. Dá se ukázat, že euklidovská norma rezidua $|\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}})|$ je minimální pro $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{0}$.

1. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Řešíme soustavu $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\,\overline{\mathbf{b}}$, to jest:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matic obdržíme:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -5 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Tuto soustavu můžeme vyřešit pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -5 & -4 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 11 & 25 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot\mathbf{6} \\ \cdot\mathbf{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -5 & -4 & 0 \\ -30 & 36 & 12 & -24 \\ -12 & 6 & 33 & 75 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +5\mathbf{r_1} \\ +2\mathbf{r_1} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & -24 \\ 0 & -4 & 25 & 75 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\mathbf{11} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & -24 \\ 0 & -44 & 275 & 825 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +4\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & 243 & 729 \end{array}\right)$$

Odtud určíme řešení $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zjistíme, zda je toto řešení také řešením zadané soustavy. Buď dosazením (obvyklá zkouška), nebo určíme vektor $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}})$. Pokud bude tento vektor nulový, znamená to, že zjištěné řešení je také řešením zadané soustavy:

$$\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{o}}$, můžeme říci, že $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ je skutečným řešením zadané soustavy lineárních rovnic.

2. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Při pohledu na první a poslední rovnici je zřejmé, že zadaná soustava nemá řešení. Metodou nejmenších čtverců však můžeme najít *přibližné řešení*.

Řešíme soustavu $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\,\overline{\mathbf{b}}$, to jest:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matic obdržíme:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -4 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tuto soustavu vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -4 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\mathbf{3} \\ +\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -4 & 4 & 5 \\ -12 & 9 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\mathbf{r_1} \\ \\ \end{array} \sim$$

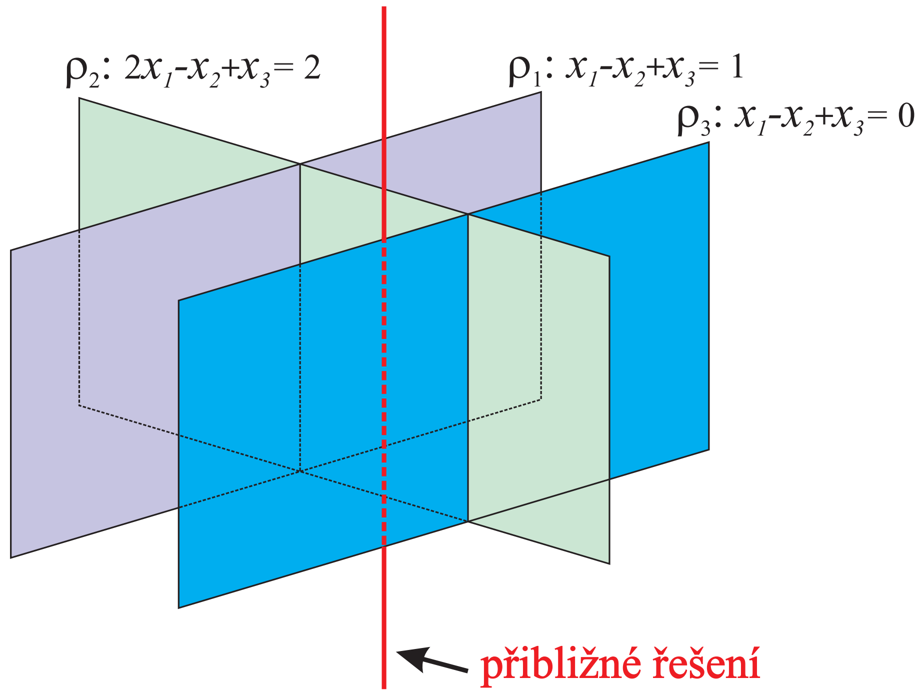
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Odtud určíme řešení

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{,kde } t \in \mathbb{R}.$$

Přibližným řešením zadané soustavy je tedy množina bodů (o souřadnicích $[x_1, x_2, x_3]$) ležících na přímce dané bodem $\left[\frac{3}{2}, 1, 0\right]$ a vektorem $(0, 1, 1)$.

Pokud bychom si nevšimli, že zadaná soustava nemá řešení, zjistili bychom to při provedení zkoušky, nebo určením vektoru $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}})$. Pokud bude tento vektor nulový, znamená to, že zjištěné řešení je také řešením zadané soustavy, pokud ne, jde o řešení přibližné:



Obrázek 2.1: Jednotlivé rovnice soustavy jsou rovnicemi rovin v E_3. Najít řešení soustavy znamená najít jejich společný průsečík. První rovnice a třetí rovnice jsou rovnicemi rovnoběžných rovin, které se neprotínají. Proto soustava nemá řešení. Přibližným řešením získaným pomocí metody nejmenších čtverců je množina bodů (tvoří přímku), které jsou „co nejblíž" všem třem rovinám.

$$\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = A\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Protože $\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) \neq \overline{\mathbf{o}}$, můžeme říci, že $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$, kde $t \in \mathbb{R}$

je pouze přibližným řešením zadané soustavy lineárních rovnic. Geometrický význam tohoto řešení je znázorněn na Obrázku 2.1.

2.4.1 Metoda nejmenších čtverců - příklady k procvičení

1. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & & & & = & 6 \end{array}$$

Řešení :

Soustava má přesné řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

2. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Řešení :

Soustava má přesné řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

3. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Řešení :

Soustava má přesné řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}}$$

4. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení :

Soustava má přibližné řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

5. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Řešení : Soustava má přibližné řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad \mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}}}$$

6. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Řešení : Soustava má přibližné řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad \mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$$

7. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

Řešení : Soustava má přesné řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

8. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Řešení : Soustava má přibližné řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}}}$$

9. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Řešení : Soustava má přesné řešení:

$$\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

10. Metodou nejmeších čtverců vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

Řešení : Soustava má přesné řešení:

$$\overline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}}, \quad \mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Kapitola 3

Vektorový prostor

3.1 Vektorové prostory

Definice 22. *(*Reálný vektorový prostor*) Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel (nebo též reálným vektorovým prostorem) nazveme uspořádanou trojici* $(V, +, \cdot)$*, kde* V *je neprázdná množina,* $+$ *je zobrazení definované na mnozině* $V \times V$*,* $\cdot$ *je zobrazení definované na mnozině* $\mathbb{R} \times V$ *a* $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\forall\, \overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{y}},\, \overline{\mathbf{z}} \in V$ *jsou splněny podmínky:*

1.) $\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \in V$

2.) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in V$

3.) $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{x}} + (\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}})$ *(sčítání je asociativní)*

4.) $\exists\, \overline{\mathbf{o}} \in V, \forall\, \overline{\mathbf{x}} \in V \,:\, \overline{\mathbf{o}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{x}}$ *(existence nulového vektoru)*

5.) $\forall\, \overline{\mathbf{x}} \in V, \exists -\overline{\mathbf{x}} \in V \,:\, \overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}}) = -\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{o}}$ *(existence opačného vektoru)*

6.) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}}$ *(komutativita sčítání)*

(Ppodmínky 2.) až 6.) je možné stručně říci tak, že uspořádaná dvojice $(V, +)$ *je komutativní grupa.)*

7.) $\alpha \cdot (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \alpha \cdot \overline{\mathbf{y}}$

8.) $(\alpha + \beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \beta \cdot \overline{\mathbf{x}}$

9.) $(\alpha\beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{\mathbf{x}})$

10.) $1 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$

Poznámka 23. *Formálně – podle definice – je vektorový prostor uspořádaná trojice $(V, +, \cdot)$ s vlastnostmi popsanými v definici.*
Intuitivně můžeme chápat vektorový prostor jako množinu V (její prvky nyzýváme vektory), na níž jsme definovali sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem a to tak, že jsou splněny vlastnosti 1.) až 10.) z definice.

Uvedeme několik příkladů vektorových prostorů.

1. Uspořádaná trojice $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $+$ je „obvyklé" sčítání reálných čísel a $\cdot$ je „obvyklé násobení reálných čísel," je vektorový prostor.

Jedná se o vektorový prostor, kde vektory jsou samotná reálná čísla. A opravdu, pokud v definici nahradíme vektory $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\mathbf{z}} \in V$ reálnými čísly x, y, z, zjistíme, že podmínky z definice jsou splněny:

1.) $\alpha \cdot x \in \mathbb{R}$ (Součinem dvou reálných čísel je reálné číslo.)

2.) $x + y \in \mathbb{R}$ (Součet dvou reálných čísel je reálné číslo.)

3.) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Sčítání reálných čísel je asociativní.)

4.) $\exists\, \overline{\mathbf{o}} = 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x + 0 = x$ (Nulovým vektorem je nula.)

5.) $x \in \mathbb{R}, \exists - x \in \mathbb{R} : x + (-x) = -x + x = 0$ (Ke každému reálnému číslu existuje číslo opačné.)

6.) $x + y = y + x$ (Sčítání reálných čísel je komutativní.)

7.) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (Sčítání reálných čísel je vzhledem k jejich násobení distributivní zleva.)

8.) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (Sčítání reálných čísel je vzhledem k jejich násobení distributivní zprava.)

9.) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (Násobení reálných čísel je asociativní.)

10.) $1 \cdot x = x$

Všimněme si, že argumenty dosvědčující pravdivost podmínek uvedené v závorkách jsme slyšeli již od paní učitelky na základní škole a máme ve zvyku o nich nepochybovat. Je však třeba si uvědomit, že jejich pravdivost je nutné nejprve dokázat na základě definic operací na množině reálných čísel. A to už se na základní škole nedělá. Dochází k tomu obvykle až ve vysokoškolském kurzu teoretické aritmetiky.

2.

Uspořádaná trojice $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^2$ je množina uspořádných dvojic reálných čísel a operace $+$ a $\cdot$ jsou definovány následujícím způsobem:

- $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:
$$\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

je vektorový prostor.

Opravdu se jedná o vektorový prostor, neboť $\forall\, \alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ a $\forall\, \overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2$ jsou splněny podmínky:

1.) $\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$

2.) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^2$

3.) $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{x}} + (\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}})$

4.) $\exists\, \overline{\mathbf{o}} = (0.0) \in \mathbb{R}^2, \forall\, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \overline{\mathbf{o}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{x}}$

5.) $\forall\, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2, \exists -\overline{\mathbf{x}} = -1 \cdot \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}}) = -\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{o}}$

6.) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}}$

7.) $\alpha \cdot (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \alpha \cdot \overline{\mathbf{y}}$

8.) $(\alpha + \beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \beta \cdot \overline{\mathbf{x}}$

9.) $(\alpha\beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{\mathbf{x}})$

10.) $1 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$

Výše uvedené vlastnosti sčítání a násobení vektorů z $\mathbb{R}^2$ plynou okamžitě z vlastností sčítání a násobení reálných čísel.

Například pravdivost podmínky šesté by se (předpokládáme–li komutativitu sčítání reálných čísel) mohla dokázat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

3. Uspořádaná trojice $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádných n–tic reálných čísel a operace $+$ a $\cdot$ jsou definovány následujícím způsobem:

- $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:
$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

je vektorový prostor.

Pravdivost podmínek z definice vektorového prostoru by se ověřila analogicky jako v případě vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

4. Uspořádaná trojice $(M_{m,n}, +, \cdot)$, kde $M_{m,n}$ je množina reálných matic typu (m, n) a operace $+$ a $\cdot$ jsou sčítání matic a násobení matice číslem (definovány stejně jako v Kapitole 1):

- Nechť $A \overset{(m,n)}{=} (a_{ij})$, $B \overset{(m,n)}{=} (b_{ij})$ jsou matice typu (m, n), potom
$$A + B \overset{(m,n)}{=} (c_{ij}), \text{ kde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
- Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \overset{(m,n)}{=} (a_{ij})$ je matice typu (m, n), potom
$$\alpha \cdot A \overset{(m,n)}{=} (c_{ij}), \text{ kde } c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

je vektorový prostor.

A opravdu, ze základních vlastností maticových operací plyne, že pro libovolná dvě reálná čísla α, β a libovolné matice A, B, $C \in M_{m,n}$ platí:

1.) $\alpha \cdot A \in M_{m,n}$ (Součinem dvou reálných matic je reálná matice.)
2.) $A + B \in M_{m,n}$ (Součet dvou reálných matic je reálné matice.)
3.) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Sčítání reálných matic je asociativní.)
4.) $\exists\, \overline{\mathbf{o}} = O \in M_{m,n}$, $\forall x \in M_{m,n} \,:\, O + x = x + O = x$ (Nulovým vektorem je nulová matice.)
5.) $\forall A \in M_{m,n}$, $\exists -A = -1 \cdot A \in M_{m,n} \,:\, A + (-A) = -A + A = O$ (Ke každé reálné matici typu (m, n) existuje reálná matice typu (m, n) k ní opačná.)

6.) $A + B = B + A$ (Sčítání reálných matic je komutativní.)

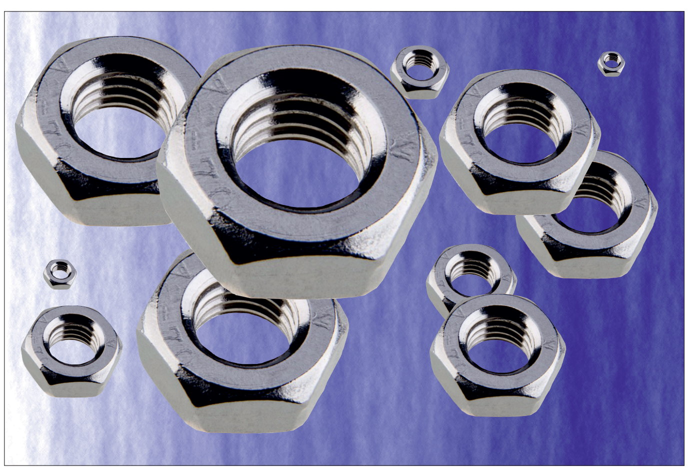
7.) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha B$ (Sčítání reálných matic je vzhledem k jejich násobení distributivní zleva.)

8.) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ (Sčítání reálných matic je vzhledem k jejich násobení distributivní zprava.)

9.) $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ (Sčítání reálných matic je asociativní.)

10.) $1 \cdot A = A$

Podívejte se na Poznámku 13!



Obrázek 3.1: Vektorový prostor matic :). Vypadá to jako legrace, ale dokonce i na této množině matic je možné zadefinovat vhodným způsobem sčítání a násobení tak, že budou tvořit vektorový prostor (ovšem ne nad tělesem reálných čísel, ale nad tělesem $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$).

5. Uspořádaná trojice $(F_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$, kde $F_{\mathbb{R}}$ je množina reálných funkcí reálné proměnné jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$ a operace $+$ a $\cdot$ jsou definovány jak je obvyklé v matematické analýze:

- Nechť f a g jsou funkce z $F_{\mathbb{R}}$, potom $f+g$ je funkce daná $\forall x \in \mathbb{R}$ předpisem:

  $$(f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

  (Všimněme si, že barevně označené $+$ není sčítání funkcí, ale sčítání reálných čísel – funkčních hodnot $f(x)$ a $g(x)$.)
- Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a f je funkce z $F_{\mathbb{R}}$, potom $\alpha \cdot f$ je funkce daná $\forall x \in \mathbb{R}$ předpisem:

  $$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

  (Všimněme si, že barevně označené $\cdot$ je násobení reálných čísel – reálného čísla α a funkční hodnoty $f(x)$.)

je vektorový prostor.

Protože se sčítání funkcí a jejich násobení číslem definuje pomocí sčítání a násobení reálných čísel, můžeme při dokazování platnosti podmínek z definice vektorového prostoru využít vlastnosti operací na $\mathbb{R}$.

Například dokažme platnost podmíky čtvrté, která by v tomto případě měla tvar:

4.) Existuje funkce $o \in F_{\mathbb{R}}$ taková, že pro libovolnou funkci $f \in F_{\mathbb{R}}$ platí, že $o + f = f + o = f$

Hledáme tedy reálnou funkci reálné proměnné s definičním oborem $\mathbb{R}$ pojmenovanou symbolem o, která by měla tu vlastnost, že přičtením k (nějaké-libovolné) funkci f tuto funkci nijak nezmění.

Můžeme využít vlastností reálného čísla 0. Tvrdím, že hledanou funkcí o je funkce daná předpisem $o(x) = 0$. (To jest, tvrdím, že v tomto vektorovém prostoru hraje úlohu nulového vektoru konstantní funkce o, jejíž funkční hodnotou v libovolném reálném bodě x je nula.)

A opravdu, $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$(o + f)(x) = o(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

a také

$$(f + o)(x) = f(x) + o(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Proto můžeme tvrdit, že funkce $o + f$ je stejná jako funkce $f + o$ a obě se rovnají funkci f (v každém bodě mají stejnou funkční hodnotu a mají stejný definiční obor $\mathbb{R}$).

3.1.1 Vektorové prostory - příklady k procvičení

1. Nalezněte matici O, jež ve vektorovém prostoru $(M_{2,2}, +, \cdot)$ hraje úlohu nulového vektoru.

Řešení : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Nalezněte matici O, jež ve vektorovém prostoru $(M_{2,3}, +, \cdot)$ hraje úlohu nulového vektoru.

Řešení : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Nalezněte uspořádanou trojici reálných čísel $\overline{\mathbf{o}}$, jež ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ hraje úlohu nulového vektoru.

Řešení : $\overline{\mathbf{o}} = (0, 0, 0)$.

4. Nalezněte uspořádanou pětici reálných čísel $\overline{\mathbf{o}}$, jež ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ hraje úlohu nulového vektoru.

Řešení : $\overline{\mathbf{o}} = (0, 0, 0, 0, 0)$.

5. Nalezněte matici, jež je ve vektorovém prostoru $(M_{2,2}, +, \cdot)$ maticí opačnou k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Nalezněte vektor, jenž je ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ vektorem opačným k vektoru $(1, -1, 3)$.

Řešení : $(-1, 1, -3)$.

7. Nalezněte funkci, jež je ve vektorovém prostoru $(F_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ funkcí opačnou k funkci f danou předpisem $f(x) = 3x^2 - 2x + 5.$.

Řešení : $-f$ je funkce daná předpisem $-f(x) = -3x^2 + 2x - 5$. (Všimněme si, že $-f = (-1) \cdot f$.)

3.2 Podprostor vektorového prostoru

Definice 24. *(*Podprostor vektorového prostoru*) Podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, nazveme uspořádanou trojici $(U, +', \cdot')$ právě když jsou splněny podmínky:*

1.) $U \subseteq V$

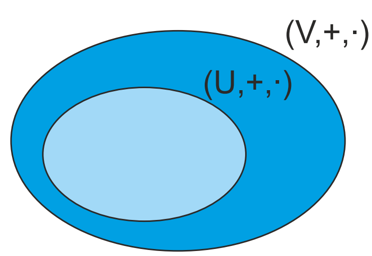
2.) $(U, +', \cdot')$ *je vektorový prostor.*

3.) *a)* $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U \ : \ \overline{\mathbf{x}} +' \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \, \forall \overline{\mathbf{y}} \in U \ : \ \alpha \cdot' \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}}$

Podprostor vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$ můžeme intuitivně chápat jako nějakou podmnožinu U množiny vektorů V (podmínka první), kde budeme sčítat a násobit vektory stejně jako na V (podmínka třetí) a množina U bude s tímto sčítáním a násobením tvořit vektorový prostor (podmínka druhá).

Poznámka 25. *Pro jednoduchost zápisu nebudeme rozlišovat operace na vektorovém prostoru a jeho podprostoru. To znamená, že místo podprostoru $(U, +', \cdot')$ vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, budeme hovořit o podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.*



Leckdo by si mohl říci, zda je podmínka druhá v definici podprostoru nutná. To jest, pokud vezmu nějakou podmnožinu U množiny vektorů V a budu její prvky sčítat a násobit úplně stejně jako každé jiné prvky z V, nebude $(U, +, \cdot)$ automaticky vektorový prostor?

Odpověď je jednoduchá. Ne. Záleží na tom, jakou podmnožinu U si vyberu. Leccos by se mohlo pokazit, třeba kdyby v U nebyl nulový vektor, potom by $(U, +, \cdot)$ jistě nebyl vektorový prostor ($\overline{\mathbf{o}}$ ve vektorovém prostoru podle jeho definice být musí). A proto by to jistě nebyl podprostor vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$ (nebyla by splněna podmínka druhá z definice podprostoru).

Poznámka 26. *Jak poznat, kdy $(U, +, \cdot)$, kde $U \subseteq V$ (tj. podmínka první z definice podprostoru splněna), je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$? Všimněme si, že jsme v otázce nerozlišili operace na U a V (píšeme stejné plus a krát). Domluvme se, že to znamená (v duchu Poznámky 25), že na U se sčítají a násobí vektory úplně stejně jako na V, a tedy, že i podmínka třetí z definice podprostoru je splněna. Potom, podle definice podprostoru, stačí (a je nutné) aby platila podmínka druhá (rozepíšeme ji podle definice vektorového prostoru):*

2.) *((U, +, ·) je vektorový prostor právě když:)* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in U$:

- *I.)* $\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \in U$
- *II.)* $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$
- *III.)* $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{x}} + (\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{z}})$ *(sčítání je asociativní)*
- *IV.)* $\exists \overline{\mathbf{o}} \in U, \forall \overline{\mathbf{x}} \in U : \overline{\mathbf{o}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{x}}$ *(existence nulového vektoru)*
- *V.)* $\forall \overline{\mathbf{x}} \in U, \exists -\overline{\mathbf{x}} \in U : \overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}}) = -\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{o}}$ *(existence opačného vektoru)*
- *VI.)* $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{x}}$ *(komutativita sčítání)*
- *VII.)* $\alpha \cdot (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \alpha \cdot \overline{\mathbf{y}}$
- *VIII.)* $(\alpha + \beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} + \beta \cdot \overline{\mathbf{x}}$
- *IX.)* $(\alpha\beta) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{\mathbf{x}})$
- *X.)* $1 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$

Ale protože $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, platí podmínky $III.$, $VI.$, $VII.$, $VIII.$, $IX.$ a $X.$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a pro každé vektory $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}$ z V, a tím pádem podmínky $III.$, $VI.$, $VII.$, $VIII.$, $IX.$ a $X.$ jistě platí i pro každé vektory $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}$ z U (protože $U \subseteq V$).

V tuto chvíli tedy můžeme říci, že $(U, +, \cdot)$, kde $U \subseteq V$, je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$ právě když $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ a $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U$:

- *I.)* $\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \in U$
- *II.)* $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$
- *IV.)* $\exists \overline{\mathbf{o}} \in U, \forall \overline{\mathbf{x}} \in U : \overline{\mathbf{o}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{o}} = \overline{\mathbf{x}}$ *(existence nulového vektoru)*
- *V.)* $\forall \overline{\mathbf{x}} \in U, \exists -\overline{\mathbf{x}} \in U : \overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}}) = -\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{o}}$ *(existence opačného vektoru)*

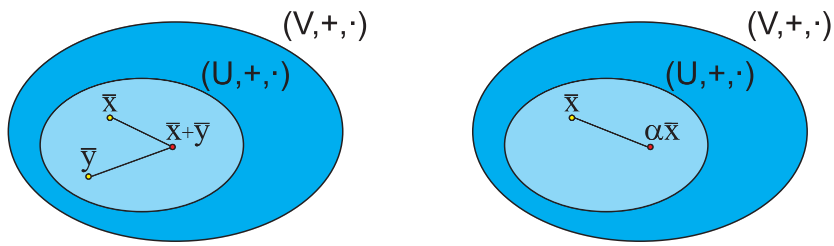
Tyto požadavky je ale možné ještě zjednodušit. Ve skutečnosti stačí, aby byly splněny podmínky I. a II. Dá se ukázat, že $0 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{o}}$ a z podmínky I. potom plyne $0 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{o}} \in U$ (takže, pokud je splněno I., jistě bude splněno i IV.). Obdobně, dá se ukázat, že $-\overline{\mathbf{x}} = -1 \cdot \overline{\mathbf{x}}$. Z podmínky I. potom plyne, že $-\overline{\mathbf{x}} = -1 \cdot \overline{\mathbf{x}} \in U$.

Výsledek těchto úvah můžeme formulovat jako následující tvrzení.

Věta 27. *Uspořádaná trojice* $(U, +, \cdot)$, *kde* $U \subseteq V$, *je podprostorem vektorového prostoru* $(V, +, \cdot)$ *právě když* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *a* $\forall\, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U$ *:*

I.) $\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}} \in U$

II.) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$



Obrázek 3.2: Součet dvou vektorů z podprostoru $(U, +, \cdot)$ leží v U a také libovolný násobek vektoru z podprostoru je prvkem U.

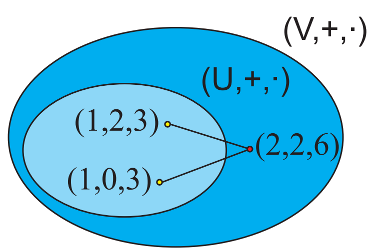
1. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{(1, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Nejprve zkontrolujeme, zda $U \subseteq \mathbb{R}^3$. To je ale jistě splněno, neboť každý prvek z U je podle zadání také prvkem množiny $\mathbb{R}^3$. V tom případě je $(U, +, \cdot)$ podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ právě když jsou splněny podmínky:

1.) $\forall\, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U \;:\; \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$

2.) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, \overline{\mathbf{x}} \in U \;:\; \alpha\overline{\mathbf{x}} \in U$

První podmínka ale není splněna. Například vektory $\overline{\mathbf{x}} = (1, 2, 3) \in U$, $\overline{\mathbf{y}} = (1, 0, 3) \in U$, ale $(1, 2, 3) + (1, 0, 3) = (2, 2, 6) \notin U$.



Výsledkem tedy je, že $(U, +, \cdot)$ **není podprostorem** vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

2. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{(0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Nejprve zkontrolujeme, zda $U \subseteq \mathbb{R}^3$. To je ale jistě splněno, neboť každý prvek z U je podle zadání také prvkem množiny $\mathbb{R}^3$. V tom případě je $(U, +, \cdot)$ podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ právě když jsou splněny podmínky:

1.) $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U \,:\, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall \overline{\mathbf{x}} \in U \,:\, \alpha\overline{\mathbf{x}} \in U$

- Ověření podmínky $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U \,:\, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$.
  Pro libovolné dva vektory $\overline{\mathbf{x}} = (0, x_2, x_3) \in U$ a $\overline{\mathbf{y}} = (0, y_2, y_3) \in U$ platí:

$$\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in U$$

- Ověření podmínky $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall \overline{\mathbf{x}} \in U \,:\, \alpha\overline{\mathbf{x}} \in U$.
  Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a pro libovolný vektor $\overline{\mathbf{x}} = (0, x_2, x_3) \in U$ platí:

$$\alpha\overline{\mathbf{x}} = (0, \alpha x_2, \alpha x_3) \in U$$

Výsledkem tedy je, že $(U, +, \cdot)$ **je podprostorem** vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

3. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{(a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Nejprve zkontrolujeme, zda $U \subseteq \mathbb{R}^3$. To je ale jistě splněno, neboť každý prvek z U je podle zadání také prvkem množiny $\mathbb{R}^3$. V tom případě bychom mohli dokázat, že $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ověřením platnosti podmínek:

1.) $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U \,:\, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$

2.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall \overline{\mathbf{x}} \in U \,:\, \alpha\overline{\mathbf{x}} \in U$

Je ale možné postupovat i jinak. Vzhledem k tomu, že libovolný lineární obal vektorů z daného vektorového prostoru je podprostorem tohoto vektorového prostoru, stačí ukázat, že U je lineárním obalem nějakých vektorů z $\mathbb{R}^3$.V tomto případě je:

$U = \{(a,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,1,0)+b(0,0,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \langle(1,1,0);(0,0,1)\rangle$

Výsledkem tedy je, že $(U,+,\cdot)$ **je podprostorem** vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

4. Určete, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$, kde $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) polynomů a $U = \{2ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Nejprve zkontrolujeme, zda $U \subseteq V$. To je ale jistě splněno, neboť každý prvek z U je podle zadání také prvkem množiny V. V tom případě bychom mohli dokázat, že $(U,+,\cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$ ověřením platnosti podmínek:

1.) $\forall\, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U \;:\; \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in U$

2.) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, \overline{\mathbf{x}} \in U \;:\; \alpha\overline{\mathbf{x}} \in U$

Je ale možné postupovat i jinak. Vzhledem k tomu, že libovolný lineární obal vektorů z daného vektorového prostoru je podprostorem tohoto vektorového prostoru, stačí ukázat, že U je lineárním obalem nějakých vektorů z V. V tomto případě je:

$$U = \{2ax + a \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a(2x+1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle 2x+1 \rangle$$

Výsledkem tedy je, že $(U,+,\cdot)$ **je podprostorem** vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$.

3.2.1 Podprostor vektorového prostoru - příklady k procvičení

1. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ano

2. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{(a + 1, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ne

3. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ne, $U \not\subseteq V$.

4. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) aritmetických vektorů a $U = \{ax^2 + ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ne, $U \not\subseteq V$.

5. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení polynomů (skalárem) a $U = \{(0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ne, $U \not\subseteq V$.

6. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) polynomů a $U = \{2ax + 1 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ne.

7. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) polynomů a $U = \{2bx^2 + ax + a \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ano.

8. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) matic a $U = \{ax^2 + bx + a \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Ne, $U \not\subseteq V$

9. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) matic a $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Řešení : Ne.

10. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) matic a $U = \left\{ \begin{pmatrix} b & b \\ c & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Řešení : Ano.

11. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) matic a $U = \left\{ \begin{pmatrix} b & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Řešení : Ano.

12. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) matic a $U = \left\{ \begin{pmatrix} b & b \\ c & 3 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Řešení : Ne.

13. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde V je množina všech reálných funkcí reálné proměnné, jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) reálných funkcí a $U = \{f(x) \in V \mid f(3) = 0\}$.

Řešení : Ano.

14. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde V je množina všech reálných funkcí reálné proměnné, jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) reálných funkcí a $U = \{f(x) \in V \mid f(0) = 1\}$.

Řešení : Ne.

15. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde V je množina všech reálných funkcí reálné proměnné, jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) reálných funkcí a $U = \{f(x) \in V \mid f$ je sudá funkce $\}$.

Řešení : Ano.

16. Určete, zda $(U, +, \cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, kde V je množina všech reálných funkcí reálné proměnné, jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$, $+$ a $\cdot$ je obvyklé sčítání a násobení (skalárem) reálných funkcí a $U = \{f(x) \in V \mid f$ je lichá funkce $\}$.

Řešení : Ano.

3.3 Lineární kombinace vektorů

Definice 28. (Lineární kombinace vektorů) *Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Říkáme, že vektor $\overline{\mathbf{v}}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}} \in V$ právě když existují čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$k_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + k_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} + \cdots + k_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{v}}$$

Například snadno ověříme, že

$$2(1, -1) + 3(1, 2) = (5, 4).$$

Proto můžeme říci, že vektor $(5, 4)$ je lineární kombinací vektorů $(1, -1)$ a $(1, 2)$.

1. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} = (1, 0, 1)$, $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} = (1, 1, 0)$ a $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}} = (0, 0, 1)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Zjišťujeme, zda existují reálná čísla k_1, k_2 a k_3 taková, aby bylo splněno:

$$k_1(1, 0, 1) + k_2(1, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (1, 1, 3).$$

Roznásobením a sečtením vektorů na levé straně rovnosti obdržíme:

$$(k_1 + k_2, k_2, k_1 + k_3) = (1, 1, 3).$$

Zjišťujeme tedy, zda existuje řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} k_1 & + & k_2 & & & = & 1 \\ & & k_2 & & & = & 1 \\ k_1 & + & & & k_3 & = & 3 \end{array}$$

Jejím vyřešením (například Gaussovou eliminační metodou), zjistíme, že řešení existuje, a to:

$$k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 3$$

Výsledkem tedy je, že vektor $\overline{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)$ je lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} = (1, 0, 1)$, $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} = (1, 1, 0)$ a $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}} = (0, 0, 1)$. Konkrétně jde o lineární kombinaci:

$$\underline{\underline{(1, 1, 3) = 0(1, 0, 1) + 1(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1).}}$$

2. Rozhodněte, zda je polynom $\mathbf{p} = x^2 + x + 1$ lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = x^2 + 2x + 1$, $\mathbf{e_2} = x^2 + 6x + 5$ a $\mathbf{e_3} = x + 1$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Zjišťujeme, zda existují reálná čísla k_1, k_2 a k_3 taková, aby bylo splněno:

$$k_1(x^2 + 2x + 1) + k_2(x^2 + 6x + 5) + k_3(x + 1) = x^2 + x + 1.$$

Roznásobením a sečtením vektorů na levé straně rovnosti obdržíme:

$$(k_1 + k_2)x^2 + (2k_1 + 6k_2 + k_3)x + (k_1 + 5k_2 + k_3) = x^2 + x + 1.$$

Zjišťujeme tedy, zda existuje řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} k_1 & + & k_2 & & & = & 1 \\ 2k_1 & + & 6k_2 & + & k_3 & = & 1 \\ k_1 & + & 5k_2 & + & k_3 & = & 1 \end{array}$$

Jejím řešením (například Gaussovou eliminační metodou), zjistíme, že tato soustava žádné řešení nemá!

Výsledkem tedy je, že polynom $\mathbf{p} = x^2 + x + 1$ není lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = x^2 + 2x + 1$, $\mathbf{e_2} = x^2 + 6x + 5$ a $\mathbf{e_3} = x + 1$.

3.3.1 Lineární kombinace vektorů - příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (1, -1, 6)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 0, 1)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (1, 0, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (0, 0, 3)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}}$ není lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

2. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (13, 2, 4)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, -1, 2)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (2, 1, 0)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}} = 1\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + 2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + 3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

3. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (2, 1, 2)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, -1, 2)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (2, 1, 0)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}} = 2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} - 2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + 3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

4. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (17, -2, 15)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, -1, 3)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (-2, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (4, 1, 0)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}} = 17\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} - 2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + 15\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

5. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (9, 9, 19)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (2, 4, 3)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 5)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 1, 0)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}} = 3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + 2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} - 3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

6. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (3, -3, 11)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (6, -3, 15)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 5)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 1, 0)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}}$ není lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$.

7. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (2, 2, 0)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 1, 0)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (-1, 0, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (3, 4, -1)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}} = (2 - 2t)\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} - t\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + t\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

8. Rozhodněte, zda je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (3, 4, -1)$ lineární kombinací vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 1, 0)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (1, 2, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 3, -2)$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{x}} = (2 + t)\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + (1 - 2t)\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + t\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

9. Rozhodněte, zda je polynom $\mathbf{p} = x^2 + 17x + 10$ lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = x^2 + 2x + 4$, $\mathbf{e_2} = x^2 + 6x + 5$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + x + 3$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Polynom $\mathbf{p} = 1\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} - 3\mathbf{e_3}$.

10. Rozhodněte, zda je polynom $\mathbf{p} = 2x^2 + 9x + 10$ lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = x^2 + 2x + 4$, $\mathbf{e_2} = x^2 + 6x + 5$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + x + 3$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Polynom $\mathbf{p} = 2\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} - 1\mathbf{e_3}$.

11. Rozhodněte, zda je polynom $\mathbf{p} = 2x^2 - 3x$ lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = 2x^2 + 4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + 3x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 3$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Polynom $\mathbf{p} = 1\mathbf{e_1} - 1\mathbf{e_2} - 1\mathbf{e_3}$.

12. Rozhodněte, zda je polynom $\mathbf{p} = 3x+2$ lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = 2x^2+4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + 3x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 3$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Polynom $\mathbf{p} = 1\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} - 1\mathbf{e_3}$.

13. Rozhodněte, zda je polynom $\mathbf{p} = 2x - 2$ lineární kombinací polynomů $\mathbf{e_1} = -x^2 - x - 1$, $\mathbf{e_2} = x^2 + 4x - 2$ a $\mathbf{e_3} = 3x^2 + 4x + 2$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Polynom $\mathbf{p} = (6 - 8t)\mathbf{e_1} + t\mathbf{e_2} + (2 - 3t)\mathbf{e_3}$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$.

14. Rozhodně, zda je matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ lineární kombinací matic $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pokud ano, uveďte o jakou lineární kombinaci se jedná.

Řešení : Matice $A = 1E_1 - 1E_2 - 1E_3 + 2E_4$.

3.4 Lineární obal vektorů

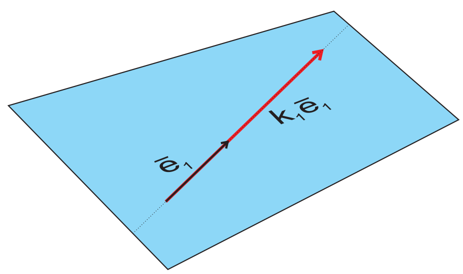
Definice 29. (Lineární obal vektorů) *Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a vektory $\mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \in V$. Množinu všech jejich lineárních kombinací nazýváme jejich lineárním obalem a značíme ji $\langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle$. To jest,*

$$\langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle = \{k_1\mathbf{\overline{e}_1} + k_2\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + k_n\mathbf{\overline{e}_n} \mid k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}\}$$

Příklad 30. *Uvažujme vektorový prostor $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Lineárním obalem jednoho vektoru, je množina všech jeho násobků. Například lineárním obalem vektoru $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, -1, 3)$ je množina:*

$$\langle (1, -1, 3) \rangle = \{k_1(1, -1, 3) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$$

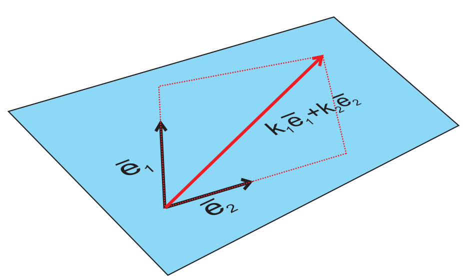
Geometricky si tuto množinu můžeme představit jako množinu všech vektorů, které můžeme umístit na přímku se směrovým vektorem $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, -1, 3)$:



Příklad 31. *Uvažujme vektorový prostor $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Lineárním obalem vektorů $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, -1, 3)$ a $\mathbf{\overline{e}_2} = (1, 0, 1)$ je množina:*

$$\langle (1, -1, 3), (1, 0, 1) \rangle = \{k_1(1, -1, 3) + k_2(1, 0, 1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

Geometricky si tuto množinu můžeme představit jako množinu všech vektorů, které můžeme umístit na rovinu danou njakým bodem a vektory $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, -1, 3)$ a $\mathbf{\overline{e}_2} = (1, 0, 1)$:



1. Zapište množinu $U = \{(a, 2a+b, 3a+b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$(a, 2a+b, 3a+b) = (a, 2a, 3a) + (0, b, b) = a(1,2,3) + b(0,1,1)$$

Proto:

$$\begin{aligned} U &= \{(a, 2a+b, 3a+b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a(1,2,3) + b(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle (1,2,3), (0,1,1) \rangle}} \end{aligned}$$

2. Zapište množinu $U = \{ax^2 + (a+b+c)x + 3b \in \mathbb{P}_2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{P}_2$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$ax^2 + (a+b+c)x + 3b = a(x^2+x) + b(x+3) + c(x)$$

Proto:

$$\begin{aligned} U &= \{ax^2 + (a+b+c)x + 3b \in \mathbb{P}_2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a(x^2+x) + b(x+3) + c(x) \in \mathbb{P}_2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle x^2+x,\ x+3,\ x \rangle}} \end{aligned}$$

3. Zapište množinu $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2,2}$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \underline{\underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

Poznámka 32. *Lineární obal vektorů* $\mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \in V$ *je vždy podprostorem vektorového prostoru* $(V, +, \cdot)$. *Snadno se o tom přesvědčíme:*

- *Součet dvou prvků z* $\langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle$ *je zase prvkem* $\langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle$*:*

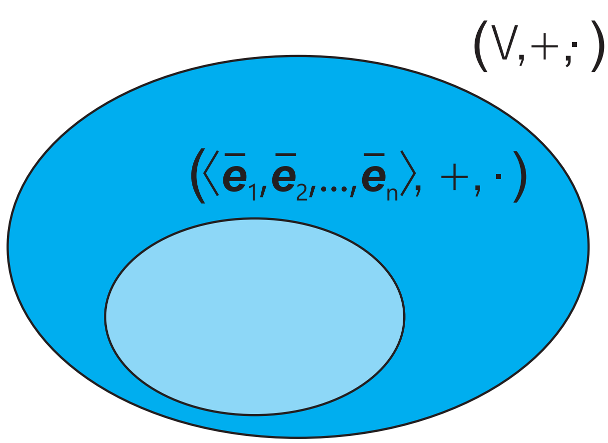
$$\underbrace{k_1\mathbf{\overline{e}_1} + k_2\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + k_n\mathbf{\overline{e}_n}}_{\in \langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle} + \underbrace{s_1\mathbf{\overline{e}_1} + s_2\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + s_n\mathbf{\overline{e}_n}}_{\in \langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle} =$$

$$\underbrace{(k_1 + s_1)\mathbf{\overline{e}_1} + (k_2 + s_2)\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + (k_n + s_n)\mathbf{\overline{e}_n}}_{\in \langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle}$$

- *Násobek prvku z z* $\langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle$ *je zase prvkem* $\langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle$*:*

$$\alpha(\underbrace{k_1\mathbf{\overline{e}_1} + k_2\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + k_n\mathbf{\overline{e}_n}}_{\in \langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle}) =$$

$$\underbrace{(\alpha k_1)\mathbf{\overline{e}_1} + (\alpha k_2)\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + (\alpha k_n)\mathbf{\overline{e}_n}}_{\in \langle \mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \rangle}$$



1. Ověřte, že $(U, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

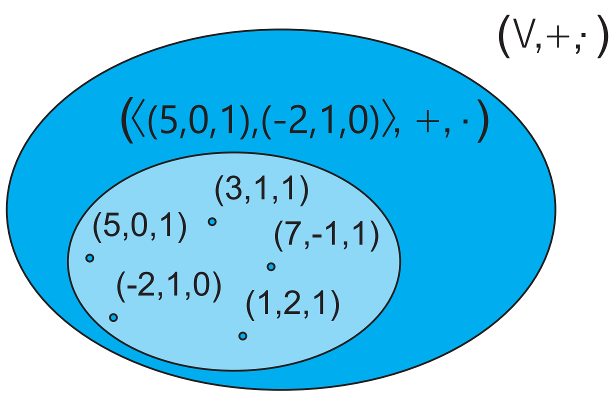
Řešení : Stačí ukázat, že U je lineárním obalem nějakých vektorů z $\mathbb{R}^3$.

Zjistíme, jaké vektory patří do U. To jest, z rovnice $x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$ určíme x_1, x_2 a x_3.

Vzhledem k tomu, že máme pouze jednu rovnici, ale tři neznámé, volíme dva parametry. Můžeme zvolit například $x_3 = t \in \mathbb{R}$ a $x_2 = s \in \mathbb{R}$. Potom $x_1 + 2s - 5t = 0$ a to znamená, že $x_1 = 5t - 2s$. Proto

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\} = \\ &= \{(5t - 2s, s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(5t, 0, t) + (-2s, s, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{t(5, 0, 1) + s(-2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (5, 0, 1), (-2, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

Množina U obsahuje všechny možné lineární kombinace vektorů $(5, 0, 1)$ a $(-2, 1, 0)$. Jedná se tedy o lineární obal vektorů z $\mathbb{R}^3$ a můžeme proto říci, že $(U, +, \cdot)$ $\underline{\underline{\text{je podprostorem vektorového prostoru } (\mathbb{R}^3, +, \cdot)}}$.



Obrázek 3.3: Do lineárního obalu vektorů $(5, 0, 1)$ a $(-2, 1, 0)$ jistě patří jejich součet $(3, 1, 1)$, jejich rozdíl $(7, -1, 1)$, vektory $(5, 0, 1)$ a $(-2, 1, 0)$ samotné, ale třeba také jejich lineární kombinace $1(5, 0, 1) + 2(-2, 1, 0) = (1, 2, 1)$.

3.4.1 Lineární obal vektorů - příklady k procvičení

1. Zapište množinu $U = \{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle (1,1,1) \rangle}} \end{aligned}$$

2. Zapište množinu $U = \{(a+b, a-b, a+2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a(1,1,1) + b(1,-1,2) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle (1,1,1),(1,-1,2) \rangle}} \end{aligned}$$

3. Zapište množinu $U = \{(a+b+c, a-b+2c, a+2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a(1,1,1) + b(1,-1,2) + c(1,2,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle (1,1,1),(1,-1,2),(1,2,1) \rangle}} \end{aligned}$$

4. Zapište množinu $U = \{(a+b)x^2 + (b-c)x + 2a + 3c \in \mathbb{P}_2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{P}_2$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a(x^2+2) + b(x^2+x) + c(-x+3) \in \mathbb{P}_2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle x^2+2, x^2+x, -x+3 \rangle}} \end{aligned}$$

5. Zapište množinu $U = \{(a+b)x^2 + bx + 2a \in \mathbb{P}_2 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{P}_2$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a(x^2+2)+b(x^2+x) \in \mathbb{P}_2 \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle x^2+2, x^2+x\rangle}} \end{aligned}$$

6. Zapište množinu $U = \{ax^2 + 2a \in \mathbb{P}_2 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{P}_2$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a(x^2+2) \in \mathbb{P}_2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \\ &= \underline{\underline{\langle x^2+2\rangle}} \end{aligned}$$

7. Zapište množinu $U = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ 2a & 3a \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \subseteq M_{2,2}$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \underline{\underline{\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\rangle}} \end{aligned}$$

8. Zapište množinu $U = \left\{\begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ 2a+ & 3a \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq M_{2,2}$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \underline{\underline{\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle}} \end{aligned}$$

9. Zapište množinu $U = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ 2a+c & 3a-c \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2,2}$ jako lineární obal vektorů.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \underline{\underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle}} \end{aligned}$$

10. Ověřte, že $(U,+,\cdot)$, kde $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(s+t,s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{s(1,1,0) + t(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (1,1,0),(1,0,1) \rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

11. Ověřte, že $(U,+,\cdot)$, kde $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(\tfrac{1}{5}(2s-3t),s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{s(\tfrac{2}{5},1,0) + t(-\tfrac{3}{5},0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (\tfrac{2}{5},1,0),(-\tfrac{3}{5},0,1) \rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

12. Ověřte, že $(U,+,\cdot)$, kde $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(2t,t,t)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \{t(2,1,1)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \langle(2,1,1)\rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

13. Ověřte, že $(U,+,\cdot)$, kde $U=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_2+2x_3=0, x_1-x_2-x_3=0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(t,t,0)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \{t(1,1,1)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \langle(1,1,1)\rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

14. Ověřte, že $(U,+,\cdot)$, kde $U=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_2+2x_3=0, -x_1+2x_2-x_3=0, 2x_1-3x_2+3x_3=0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(-3t,-t,t)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \{t(-3,-1,1)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \langle(-3,-1,1)\rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

15. Ověřte, že $(U,+,\cdot)$, kde $U=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_2+2x_3=0, -x_1+2x_2-x_3=0, 2x_1-3x_2+x_3=0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(0,0,0)\in\mathbb{R}^3\} = \\ &= \{t(0,0,0)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\} = \\ &= \langle(0,0,0)\rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

16. Ověřte, že $(U, +, \cdot)$, kde $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2 \mid a + b - 2c = 0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{P}_2, +, \cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{(2c - b)x^2 + bx + c \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{c(2x^2 + 1) + b(-x^2 + x) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle 2x^2 + 1, -x^2 + x \rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

17. Ověřte, že $(U, +, \cdot)$, kde $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2 \mid a - b - c = 0, a + c = 0\}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{P}_2, +, \cdot)$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{-tx^2 - 2tx + t \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{t(-x^2 - 2x + 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle -x^2 - 2x + 1 \rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

18. Ověřte, že $(U, +, \cdot)$, kde $U = \{2a \sin x \cos x + b \sin(3x) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ je podprostorem vektorového prostoru reálných funkcí reálné proměnné definovaných na $\mathbb{R}$.

Řešení :

$$\begin{aligned} U &= \{a \sin(2x) + b \sin(3x) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle \sin(2x), \sin(3x) \rangle \Rightarrow \underline{\underline{\text{Je to podprostor.}}} \end{aligned}$$

3.5 Lineární nezávislost vektorů

Definice 33. (Lineární závislost a nezávislost) *Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Vektory $\mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, z nichž je alespoň jeden nenulový, takové, že*

$$\alpha_1\mathbf{\overline{e}_1} + \alpha_2\mathbf{\overline{e}_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{\overline{e}_n} = \mathbf{\overline{o}}. \tag{3.1}$$

Vektory $\mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n} \in V$ jsou lineárně nezávislé, jestliže je rovnice (3.1) splněna pouze v případě, kdy $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Uvažujme například vektory $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{\overline{e}_2} = (2, 4, 0)$ a $\mathbf{\overline{e}_3} = (0, 0, 1)$. Hledáme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, aby platilo

$$\alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(2, 4, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0). \tag{3.2}$$

Všimněme si, že rovnice (3.2) bude JISTĚ splněna v případě, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Otázka zní, zda je možné ze zadaných vektorů vykombinovat nulový vektor i jiným způsobem, to jest tak, aby alespoň jedno z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bylo nenulové. Pokud ne, jsou nezávislé. Pokud ano, jsou zadané vektory lineárně závislé.

Po chvilce zírání na rovnici (3.2) nás může napadnout, že nulový vektor obdržíme například také jako lineární kombinaci

$$\underbrace{2}_{\alpha_1}(1, 2, 0) + \underbrace{(-1)}_{\alpha_2}(2, 4, 0) + \underbrace{0}_{\alpha_3}(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Znamená to, že vektory $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{\overline{e}_2} = (2, 4, 0)$ a $\mathbf{\overline{e}_3} = (0, 0, 1)$ jsou lineárně závislé.

Může nás ale trápit to, že zírání na rovnici není dostatečně spolehlivá metoda, jak ji vyřešit. Jak tedy spolehlivě dokážeme rozhodnout, zda jsou vektory lineármě nezávislé, či nikoli? Stačí si uvědomit, že vlastně rozhodujeme o tom, kolika způsoby lze ze zadaných vektorů vykombinovat vektor nulový. Z kapitoly o lineárních kombinacích víme, že čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ z rovnice (3.1) najdeme jako řešení soustavy lineárních rovnic, kde sloupce matice soustavy jsou tvořeny souřadicemi zadaných vektorů a za vektor pravých stran je třeba zvolit souřadnice vektoru, který se snažíme vykombinovat. V tomto případě jde o nulový vektor, budou to tedy smé nuly. Je jasné, že tato soustava jistě bude mít alespoň jedno řešení a to $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Pokud jde o jediné řešení soustavy, jsou vektory podle definice lineárně nezávislé. Pokud má však soustava i jiné řešení (a tedy jich musí mít nekonečně mnoho), jsou vektory lineárně závislé. Předvedeme na příkladech.

1. Rozhodněte, zda jsou vektory $\bar{\mathbf{e}}_1 = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = (1,3,-1) \in \mathbb{R}^3$ a $\bar{\mathbf{e}}_3 = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé.

Řešení : Hledáme všechna čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ pro která je splněna rovnice

$$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(1,3,-1) + \alpha_3(1,0,1) = (0,0,0). \tag{3.3}$$

To vede na soustavu lineárních rovnic (jak víme z textu o lineárních kombinacích). Zapíšeme ji maticově a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -1\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Z poslední rovnice je jasné, že $\alpha_2 = 0$. Dosazením do druhé rovnice zjistíme, že $\alpha_3 = 0$ a dosazením do rovnice první zjistíme, že $\alpha_1 = 0$. Tato soustava má tedy jediné řešení - jediným způsobem, jak můžeme vyřešit rovnici (3.3) je zvolit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Jiná možnost není. Můžeme proto říci, že zadané vektory jsou lineárně nezávislé.

2. Rozhodněte, zda jsou vektory $\bar{\mathbf{e}}_1 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ a $\bar{\mathbf{e}}_3 = (3,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé.

Řešení : Hledáme všechna čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ pro která je splněna rovnice

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,-1) + \alpha_3(3,1,-1) = (0,0,0). \tag{3.4}$$

To vede na soustavu lineárních rovnic (jak víme z textu o lineárních kombinacích). Zapíšeme ji maticově a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1\mathbf{r_1} \\ -1\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Je jasné, že soustava má nekonečně mnoho řešení (a tedy i nějaké jiné než $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Můžeme proto rovnou říci (aniž bychom tato řešení určili), že zadané vektory jsou lineárně závislé.

3. Rozhodněte, zda jsou polynomy $\mathbf{e_1} = 2x^2 + x + 4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 3$ lineárně nezávislé.

Řešení : Hledáme všechna čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ pro která je splněna rovnice

$$\alpha_1(2x^2 + x + 4) + \alpha_2(-x^2 + x + 1) + \alpha_3(x^2 + 3) = 0x^2 + 0x + 0 \tag{3.5}$$

Rovnice (3.5) je splněna právě když je splněna rovnice:

$$\alpha_1(2, 1, 4) + \alpha_2(-1, 1, 1) + \alpha_3(1, 0, 3) = (0, 0, 0) \tag{3.6}$$

(Polynomy stupně menšího než tři můžeme reprezentovat aritmetickými vektory z $\mathbb{R}^3$. Zadané polynomy jsou lineárně nezávislé právě když jsou lineárně nezávislé aritmetické vektory, které je reprezentují. Plyne to z toho, že reálné vektorové prostory téže dimenze jsou izomorfní.)

Rovnice (3.6) vede na soustavu lineárních rovnic (jak víme z textu o lineárních kombinacích). Zapíšeme ji maticově a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -4\mathbf{r_1} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -1\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Z poslední rovnice je jasné, že $\alpha_3 = 0$. Dosazením do druhé rovnice zjistíme, že $\alpha_2 = 0$ a dosazením do rovnice první zjistíme, že $\alpha_1 = 0$. Tato soustava má tedy jediné řešení - jediným způsobem, jak můžeme vyřešit rovnici (3.5) je zvolit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Jiná možnost není. Můžeme proto říci, že zadané polynomy $\mathbf{e_1} = 2x^2 + x + 4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 3$ jsou lineárně nezávislé.

4. Rozhodněte, zda jsou polynomy $\mathbf{e_1} = 2x^2 + x + 4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 1$ lineárně nezávislé.

Řešení : Hledáme všechna čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ pro která je splněna rovnice

$$\alpha_1(2x^2 + x + 4) + \alpha_2(-x^2 + x + 1) + \alpha_3(x^2 + 1) = 0x^2 + 0x + 0 \tag{3.7}$$

Rovnice (3.7) je splněna právě když je splněna rovnice:

$$\alpha_1(2, 1, 4) + \alpha_2(-1, 1, 1) + \alpha_3(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \tag{3.8}$$

(Polynomy stupně menšího než tři můžeme reprezentovat aritmetickými vektory z $\mathbb{R}^3$. Zadané polynomy jsou lineárně nezávislé právě když jsou lineárně nezávislé aritmetické vektory, které je reprezentují. Plyne to z toho, že reálné vektorové prostory téže dimenze jsou izomorfní.)

Rovnice (3.8) vede na soustavu lineárních rovnic (jak víme z textu o lineárních kombinacích). Zapíšeme ji maticově a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \; \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \; \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1}\\ -4\mathbf{r_1}\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -1\mathbf{r_2}\end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Je jasné, že soustava má nekonečně mnoho řešení (a tedy i nějaké jiné než $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Můžeme proto rovnou říci (aniž bychom tato řešení určili), že zadané polynomy $\mathbf{e_1} = 2x^2 + x + 4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 1$ jsou lineárně závislé.

3.5.1 Lineární nezávislost vektorů - příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 0, 1)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (1, 0, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (3, 0, 0)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

2. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, -1, 2)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (2, 1, 0)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně nezávislé.

3. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 0, 1)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (1, 1, -1)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 2, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4} = (4, 1, -1)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

4. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (-1, 0, -1)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

5. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, -1, 2)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (2, 1, -1)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

6. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, -1, 3)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (-2, 0, 1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (4, 1, 0)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně nezávislé.

7. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (2, 4, 3)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 5)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 1, 0)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně nezávislé.

8. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (6, -3, 15)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (3, 0, 5)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 1, 0)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

9. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 1, 0)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (-1, 0, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (3, 4, -1)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

10. Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1, 1, 0)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (1, 2, -1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (1, 3, -2)$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

11. Rozhodněte, zda jsou polynomy $\mathbf{e_1} = x^2+2x+4$, $\mathbf{e_2} = x^2+6x+5$ a $\mathbf{e_3} = x^2+x+3$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně nezávislé.

12. Rozhodněte, zda jsou polynomy $\mathbf{e_1} = 2x^2+4$, $\mathbf{e_2} = -x^2+3x+1$ a $\mathbf{e_3} = x^2+3$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně nezávislé.

13. Rozhodněte, zda jsou polynomy $\mathbf{e_1} = -x^2-x-1$, $\mathbf{e_2} = x^2+4x-2$ a $\mathbf{e_3} = 3x^2+4x+2$ lineárně nezávislé.

Řešení : Jsou lineárně závislé.

14. Rozhodně, zda jsou matice
$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislé.

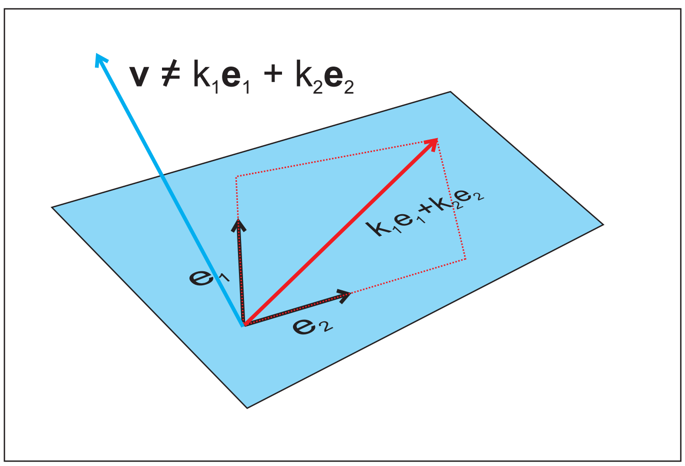
Řešení : Jsou lineárně nezávislé.

3.6 Báze a dimenze vektorového prostoru

Je zřejmé, že z vektorů $(1,0,2)$ a $(3,0,5)$ nejsme schopni vytvořit například vektor $(1,1,1)$ jako jejich lineární kombinaci. Jejich lineární kombinací vznikne vždy vektor, který má druhou složku nulovou :

$$k_1(1,0,2) + k_2(3,0,5) = (k_1 + 3k_2, 0, 2k_1 + 5k_2) \neq (1,1,1).$$

Obdobně bychom narazili u každého vektoru s nenulovou druhou složkou. Je tedy jasné, že pomocí lineárních kombinací vektorů $(1,0,2)$ a $(3,0,5)$ nejsme schopni vytvořit všechny vektory z vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Naším cílem je ale najít nějakou množinu vektorů s nimiž by to bylo možné (budeme jim říkat bázové vektory). Zkusme nyní třeba vektory $(1,1,2)$ a $(3,1,5)$ (odstranili jsme ten problém, že obě druhé složky byly nulové). Z obrázku 3.4 je ale zřejmé, že ani to nepomůže! Každá lineární kombinace vektorů $(1,1,2)$ a $(3,1,5)$ bude ležet ve stejné rovině, v níž jsou tyto vektory umístěny. Jistě ale budou existovat vektory, které do této roviny umístit nelze (například vektor $(3,1,-2)$)



Obrázek 3.4: Dva vektory na bázi v $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ nestačí.

Snadno si ale rozmyslíme, že libovolný vektor z $\mathbb{R}^3$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$. Například $(4,5,-2) = 4(1,0,0) + 5(0,1,0) - 2(0,0,1)$. Obecně, libovolný vektor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ mžeme napsat jako lineární kombinaci:

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

Zvládli bychom to i s jinou trojicí vektorů? Ale jistě, například s trojicí $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$. Libovolný vektor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ mžeme napsat jako lineární kombinaci:

$$(a,b,c) = \frac{a}{2}(2,0,0) + \frac{b}{2}(0,2,0) + \frac{c}{2}(0,0,2).$$

Je jasné, že podobně bychom mohli vytvořit nekonečně mnoho dalších trojic bázových vektorů ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Naše úvahy zobecníme pro libovolný vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.

Definice 34. (Báze) *Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Množinu vektorů $B = \{\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\} \subseteq V$ nazveme bází vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, právě když platí podmínky:*

1.) $\forall \overline{\mathbf{x}} \in V \; \exists k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R} : \overline{\mathbf{x}} = k_1\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + k_2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \cdots + k_n\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{n}$
Tato podmínka říká, že libovolný vektor z vektorového prostoru je možno vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů.

2.) Vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{n}$ jsou lineárně nezávislé.
Tato podmínka zajišťuje, že v bázi nemáme zbytečně mnoho bázových vektorů, ale jen nezbytné minimum.

Pokud jsou výše uvedené podmínky splněny, říkáme, že vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{n}$ tvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.

Druhá podmínka v definici báze požaduje lineární nezávislost bázových vektorů. V tuto chvíli jsme překvapeni, proč si definici komlikujeme nějakým takovým požadavkem. Jeho užitečnost si předvedeme na konkrétním příkladě. Řekněme, že by báze B byla tvořena čtyřmi bázovými vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4}$, které jsou ovšem lineárně závislé. To znamená, že jeden z nich můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to vektor $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4}$. To jest,

$$\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4} = r_1\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + r_2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + r_3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}, \tag{3.9}$$

kde r_1, r_2, r_3 jsou nějaká reálná čísla. Řekněme, že chceme vyjádřit vektor $\overline{\mathbf{x}}$ pomocí bázových vektorů. Najdeme tedy čísla k_1, k_2, k_3, k_4 tak, aby platilo:

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + k_2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + k_3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} + k_4\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4} \tag{3.10}$$

Dosadíme–li za $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4}$ do rovnice (3.10) pravou stranu rovnosti (3.9), obdržíme

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + k_2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + k_3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} + k_4(r_1\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + r_2\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + r_3\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3})$$

Po roznásobení a sečtení:

$$\overline{\mathbf{x}} = (k_1 + k_4r_1)\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + (k_2 + k_4r_2)\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + (k_3 + k_4r_3)\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}. \tag{3.11}$$

Vidíme, že k vyjádření daného vektoru $\overline{\mathbf{x}}$ pomocí bázových vektorů vlastně nikdy nepotřebujeme vektor $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{4}$. Vždy je to možné udělat jen pomocí vektorů

$\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$. Takového přebytečného darmožrouta v bázi nepotřebujeme, jen komplikuje výpočty. Je nejvýhodnější mít v bázi co nejméně vektorů.

Jak jsme viděli, v případě, že by bázové vektory byly lineárně závislé, bylo by jich zbytečně mnoho. Je proto přirozené v definici báze požadovat lineární nezávislost jejích vektorů.
Jak jsme viděli v úvodu kapitoly, různých bází v daném vektorovém prostoru může být nekonečně mnoho. Všechny však mají něco společného – počet bázových vektorů. Není možné, aby jedna báze daného vektorového prostoru měla třeba čtyři bázové vektory a jiná báze téhož prostoru třeba jen dva bázové vektory.

Věta 35. *Nechť* $(V, +, \cdot)$ *je vektorový prostor a* $E = \{\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \dots, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\}$ *i* $F = \{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}, \dots, \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{m}\}$ *jsou jeho báze. Potom* $m = n$.

Výše uvedené tvrzení zajišťuje smysluplnost následující definice (nechceme, aby vektorový prostor měl nejednoznačně určenou dimenzi).

Definice 36. (Dimenze) *Nechť* $(V, +, \cdot)$ *je vektorový prostor. Počet prvků jeho báze* $B = \{\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}, \dots, \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{n}\}$ *nazveme dimenzí vektorového prostoru* $(V, +, \cdot)$. *Značíme*

$$\dim V = n.$$

1. Určete dimenzi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Řešení : Podle Definice 36 a Věty 35 stačí najít jakoukoli bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a určit počet jejích prvků.

Podle definice báze ověříme, že vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ tvoří bázi $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

1.) $\forall \overline{\mathbf{x}} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \, \exists \, a, b, c \in \mathbb{R} \, : \, \overline{\mathbf{x}} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$

2.) Vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ jsou lineárně nezávislé, neboť soustava lineárních rovnic (3.12) má jediné řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{3.12}$$

Můžeme proto tvrdit, že $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. (Ne proto, že zadané vektory mají tři složky, ale proto, že v bázi jsou celkem tři vektory.)

2. Určete dimenzi vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Podle Definice 36 a Věty 35 stačí najít jakoukoli bázi vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$ a určit počet jejích prvků.

Podle definice báze ověříme, že polynomy $x^2, x, 1 \in P_2$ tvoří bázi $(P_2, +, \cdot)$.

1.) $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3\ \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \,:\, \overline{\mathbf{x}} = ax^2 + bx + c = a(x^2) + b(x) + c(1)$

2.) Ověříme, že polynomy $x^2, x, 1 \in P_2$ jsou lineárně nezávislé. Podle definice lineární nezávislosti, je třeba ukázat, že rovnice (3.13) má jediné řešení, a to $a = b = c = 0$.

$$a(x^2) + b(x) + c(1) = o(x) \tag{3.13}$$

Připomeňme, že $o(x)$ je nulovým vektorem v $(P_2, +, \cdot)$ a jde o polynom daný předpisem $\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, o(x) = 0$.

Zamená to, že hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{3.14}$$

Pro $a \neq 0$ je (3.14) kvadratickou rovnicí. V tom případě by ale existovaly nejvýše dvě reálná čísla x pro něž by byla rovnice (3.14) splněna. Proto musí být $a = 0$.

Zamená to, že hledáme $b, c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí:

$$bx + c = 0. \tag{3.15}$$

Pro $b \neq 0$ je (3.15) lineární rovnicí. V tom případě by ale existovalo nejvýše jedno reálné číslo x pro něž by byla rovnice (3.15) splněna. Proto musí být $b = 0$.

Zamená to, že hledáme $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí:

$$c = 0.$$

Je jasné, že $c = 0$. Došli jsme k tomu, že rovnice (3.13) má jediné řešení, a to $a = b = c = 0$. To znamená, že polynomy $x^2, x, 1 \in P_2$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$.

Můžeme proto tvrdit, že $\dim P_2 = 3$.

Dále bude užitečná i následující věta.

Věta 37. *Nechť* $(V, +, \cdot)$ *je vektorový prostor a* $\dim V = n \in \mathbb{N}$. *Potom každá* n–*tice lineárně nezávislých vektorů patřících do množiny* V *tvoří bázi vektorového prostoru* $(V, +, \cdot)$.

Věta 37 umožňuje snadno ověřit (pokud známe $\dim V$), zda zadaná n– tice vektorů tvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$:

1. Ověříme, zda všechny vektory $\mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n}$ patří do množiny V.
   Pokud ne, jistě netvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Pokud ano, pokračujeme dál.

2. Ověříme, zda je vektorů správný počet, to jest, zda $\dim V = n$.
   Pokud ne, jistě netvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Pokud ano, pokračujeme dál.

3. Ověříme, zda jsou vektory $\mathbf{\overline{e}_1}, \mathbf{\overline{e}_2}, \ldots, \mathbf{\overline{e}_n}$ lineárně nezávislé. Pokud ne, jistě netvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Pokud ano, můžeme prohlásit, že tvoří bázi vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.

1. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{\overline{e}_1} = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{\overline{e}_2} = (1, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{\overline{e}_3} = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Řešení : Víme, že dimenze vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je rovna třem (jednou z jeho bází je například $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$). Zadané vektory patří do $\mathbb{R}^3$ a jejich počet je roven dimenzi $\mathbb{R}^3$. Mohly by tedy tvořit bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Musely by ale být lineárně nezávislé. Ověříme, zda tomu tak skutečně je. Hledáme proto počet řešení následující soustavy lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -1\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Je jasné, že tato soustava má nekonečně mnoho řešení. Zadané vektory jsou proto lineárně závislé, a tak nemohou tvořit bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

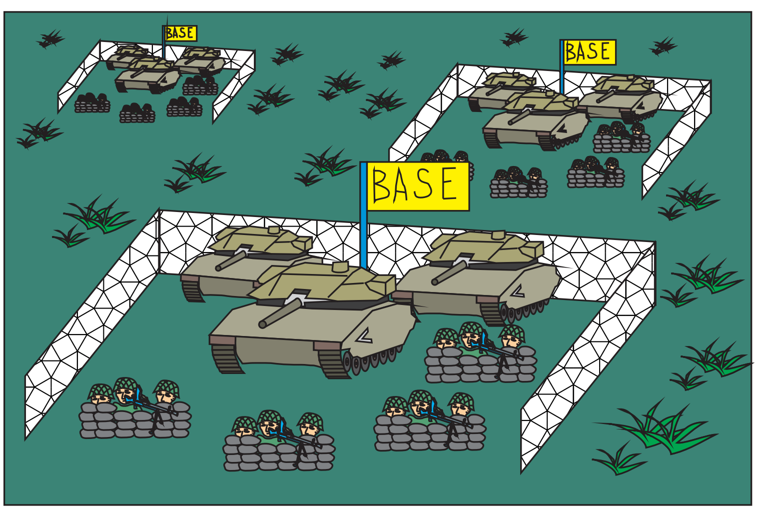
2. Rozhodněte, zda polynomy $\mathbf{e_1} = 2x^2 + x + 4$, $\mathbf{e_2} = -x^2 + x + 1$ a $\mathbf{e_3} = x^2 + 3$ tvoří bázi vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Víme, že dimenze vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$ je rovna třem (jednou z jeho bází je například $\{x^2, x, 1\}$). Zadané vektory patří do P_2 a jejich počet je roven dimenzi P_2. Mohly by tedy tvořit bázi vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$. Stačí, aby byly lineárně nezávislé. Ověříme, zda tomu tak skutečně je. Hledáme proto počet řešení následující soustavy lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \; \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1} \\ -4\mathbf{r_1} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -1\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Z poslední rovnice je jasné, že $\alpha_3 = 0$. Dosazením do druhé rovnice zjistíme, že $\alpha_2 = 0$ a dosazením do rovnice první zjistíme, že $\alpha_1 = 0$. Tato soustava má tedy jediné řešení - znamená to, že zadané polynomy jsou lineárně nezávislé a můžeme proto tvrdit, že tvoří bázi vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$.



Obrázek 3.5: Vektorový prostor může mít nekonečně mnoho různých bází.

Podprostor vektorového prostoru je sám vektorovým prostorem. Má proto smysl ptát se na jeho bázi a dimenzi.

1. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Řešení : Určíme, jak vypadají vektory patřící do U. Stačí vyřešit rovnici

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0.$$

V rovnici jsou tři neznámé, volíme proto dva parametry, třeba $x_3 = t \in \mathbb{R}$ a $x_2 = s \in \mathbb{R}$. Po dosazení parametrů do rovnice obdržíme

$$x_1 - 3s + 2t = 0.$$

Odtud mžeme určit $x_1 = 3s - 2t$. A tak

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\} = \\ &= \{(3s - 2t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(3s, s, 0) + (-2t, 0, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{s(3, 1, 0) + t(-2, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny prvky z U jsou lineární kombinací vektorů $(3, 1, 0)$ a $(-2, 0, 1)$. Splňují tedy první požadavek z definice báze. Navíc jsou vektory $(3, 1, 0)$ a $(-2, 0, 1)$ lineárně nezávislé (u dvou vektorů to poznáme jednoduše – jeden není násobkem druhého). Splňují tak i druhou podmínku z definice báze a můžeme proto říci, že

$$\underline{\underline{B = \{(3, 1, 0), (-2, 0, 1)\} \text{ je bází vektorového prostoru } (U, +, \cdot)}}$$

Protože se v bázi nacházejí dva vektory, je

$$\underline{\underline{\dim U = 2.}}$$

Přestože vektory nacházející se v U jsou uspořádané trojice reálných čísel!!! Nejedná se však o všechny možné uspořádané trojice reálných čísel. Geometrická interpretace je ta, že vektory z U je možné umístit do jedné roviny. Například do roviny, jejíž obecná rovnice má tvar $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$.

2. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Řešení : Určíme, jak vypadají vektory patřící do U. Stačí vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Zapíšeme maticově a upravíme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Zvolíme–li $x_3 = t \in \mathbb{R}$, pak z poslední rovnice plyne, že $x_2 = t \in \mathbb{R}$. Dosazením do první rovnice zjistíme, že $x_1 = 0$.

A tak

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\} = \\ &= \{(0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{t(0, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny prvky z U jsou násobkem (lineární kombinací) vektoru $(0, 1, 1)$. Ten je jen jeden, a tak nemusíme ověřovat nezávislost (jistě je nezávislý). Vektor $(0, 1, 1)$ tak splňuje první i druhou podmínku z definice báze a můžeme proto říci, že

$$\underline{\underline{B = \{(0, 1, 1)\} \text{ je bází vektorového prostoru } (U, +, \cdot)}}$$

Protože se v bázi nachází pouze jeden vektor, je

$$\underline{\underline{\dim U = 1.}}$$

Přestože vektory nacházející se v U jsou uspořádané trojice reálných čísel!!! Nejedná se však o všechny možné uspořádané trojice reálných čísel. Geometrická interpretace je ta, že vektory z U je možné umístit na jednu přímku. Například na přímku, jež je průsečnicí rovin $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ a $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a $U = \{ax^2 + bx + c \in P_2 \mid a + 2b - c = 0, 2a - b + c = 0\}$.

Řešení : Určíme, jak vypadají polynomy patřící do U. Stačí vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= 0 \\ 2a - b + c &= 0 \end{aligned}$$

Zapíšeme maticově a upravíme na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Zvolíme–li $x_3 = 5t \in \mathbb{R}$, pak z poslední rovnice plyne, že $x_2 = 3t$. Dosazením do první rovnice zjistíme, že $x_1 = -t$.

A tak

$$\begin{aligned} U &= \{ax^2 + bx + c \in P_2 \mid a + 2b - c = 0, 2a - b + c = 0\} = \\ &= \{-tx^2 + 3tx + 5t \mid t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{t(-x^2 + 3x + 5) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny prvky z U jsou násobkem (lineární kombinací) polynomu $-x^2 + 3x + 5$. Ten je jen jeden, a tak nemusíme ověřovat nezávislost (jistě je nezávislý). Vektor $-x^2 + 3x + 5$ tak splňuje první i druhou podmínku z definice báze a můžeme proto říci, že

$$\underline{\underline{B = \{-x^2 + 3x + 5\} \text{ je bází vektorového prostoru } (U, +, \cdot)}}$$

Protože se v bázi nachází pouze jeden vektor, je

$$\underline{\underline{\dim U = 1.}}$$

4. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a $U = \{ax^2 + bx + a \in P_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Tento typ říkladů je jednoduchý, není třeba řešit žádnou soustavu, stačí si uvědomit, že

$$ax^2 + bx + a = a(x^2 + 1) + b(x)$$

A tak

$$\begin{aligned} U &= \{ax^2 + bx + a \in P_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a(x^2+1) + b(x) \in P_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny prvky z U jsou lineární kombinací polynomů x^2+1 a x. Upadají tak do podezření, že tvoří bázi prostoru $(U, +, \cdot)$. Je ale třeba ověřit jejich nezávislost. To je možné udělat podle definice, nebo i následujícím způsobem. Koeficienty napíšeme do řádků matice a tuto pak upravíme na schodový tvar. Pokud se při tom žádný řádek nevynuloval, jsou vektory nezávislé (pokud ano, jsou závislé). V tomto případě:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že matice již je ve schodovém tvaru je a není třeba ji dále upravovat. Protože se v ní nevyskytuje žádný nulový řádek, můžeme tvrdit, že polynomy x^2+1 a x jsou lineárně nezávislé.

Polynomy x^2+1 a x tak splňují první i druhou podmínku z definice báze a můžeme proto říci, že

$$\underline{\underline{B = \{x^2+1, x\} \text{ je bází vektorového prostoru } (U, +, \cdot)}}$$

Protože se v bázi nachází celkem dva polynomy, je

$$\underline{\underline{\dim U = 2.}}$$

5. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde $U = \{(a+b, 0, b-c, a+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Tento typ říkladů je jednoduchý, není třeba řešit žádnou soustavu, stačí si uvědomit, že

$$(a+b, 0, b-c, a+c) = a(1,0,0,1) + b(1,0,1,0) + c(0,0,-1,1)$$

A tak

$$\begin{aligned} U &= \{(a+b, 0, b-c, a+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a(1,0,0,1) + b(1,0,1,0) + c(0,0,-1,1) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny prvky z U jsou lineární kombinací vektorů $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$ a $(0,0,-1,1)$. Splňují tedy první požadavek z definice báze. Vzniká proto podezření, že vektory $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$ a $(0,0,-1,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(U, +, \cdot)$. Aby tomu tak skutečně bylo, musely by být lineárně nezávislé. To je možné ověřit podle definice, nebo i následujícím způsobem. Vektory napíšeme do řádků matice a tuto pak upravíme na schodový tvar. Pokud se při tom žádný řádek nevynuloval, jsou vektory nezávislé (pokud ano, jsou závislé). V tomto případě:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathbf{r_1} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že vektory $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$ a $(0, 0, -1, 1)$ bázi netvoří, protože jsou lineárně závislé. To ale neznamená, že báze prostoru $(U, +, \cdot)$ neexistuje! Stále je naším úkolem ji určit! Je to však jednoduché. Bázi prostoru $(U, +, \cdot)$ tvoří všechny nenulové řádky, které v matici zbyly po úpravě na schodový tvar. V tomto případě docházíme k výsledku:

$$\underline{\underline{B = \{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\} \text{ je bází vektorového prostoru } (U, +, \cdot)}}$$

Protože se v bázi nacházejí dva vektory, je

$$\underline{\underline{\dim U = 2.}}$$

Výsledek nám říká, že množinu $U = \{(a+b, 0, b-c, a+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ můžeme zapsat jednoduše jako množinu všech lineárních kombinací vektorů $(1, 0, 0, 1)$ a $(0, 0, 1, -1)$. To jest, $U = \{s(1, 0, 0, 1) + t(0, 0, 1, -1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

3.6.1 Báze a dimenze vektorového prostoru - příklady k procvičení

1. Zjistěte, zda vektory $(1,1,0),(0,1,1),(0,1,-1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ a vektory $(1,1,0),(0,1,1),(0,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

2. Zjistěte, zda vektory $(1,1,0),(0,1,1),(0,-1,-1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ale vektory $(1,1,0),(0,1,1),(0,-1,-1)$ jsou lineárně závislé, netvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

3. Zjistěte, zda vektory $(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ a vektory $(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

4. Zjistěte, zda vektory $(2,1,0),(0,1,1),(2,0,-1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ale vektory $(2,1,0),(0,1,1),(2,0,-1)$ jsou lineárně závislé, netvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

5. Zjistěte, zda vektory $(2,1,0),(0,1,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ a vektory $(2,1,0),(0,1,1)$ jsou lineárně nezávislé. Nepatří ale do množiny $\mathbb{R}^2$! Netvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

6. Zjistěte, zda vektory $(2,1,0),(0,1,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ale vektory $(2,1,0),(0,1,1)$ jsou jen dva, netvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

7. Zjistěte, zda vektory $(2,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,0,-1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Řešení : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ale vektory $(2,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,0,-1)$ jsou čtyři, netvoří tedy bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, .)$. (Je jich příliš mnoho – více než je dimenze, jsitě budou lineárně závislé.)

8. Zjistěte, zda polynomy $x^2 - 3x + 1, 2x^2 - 7x + 2, x + 1$ tvoří bázi vektorového prostoru $(P_2, +, .)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : $\dim P_2 = 3$ a polynomy $x^2 - 3x + 1, 2x^2 - 7x + 2, x + 1 \in P_2$ jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi vektorového prostoru $(P_2, +, .)$.

9. Zjistěte, zda polynomy $x^2 + x + 1, x^3 - 2, x + 1$ tvoří bázi vektorového prostoru $(P_2, +, .)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : Polynom $x^3 - 2 \notin P_2$. Polynomy $x^2 + x + 1, x^3 - 2, x + 1$ proto netvoří bázi vektorového prostoru $(P_2, +, .)$.

10. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(a + b, b + c, a + c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : $U = \{a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $\dim U = 3$. (Můžeme proto říci, že $U = \mathbb{R}^3$)

11. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(a + b, b + c, -a + c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : $U = \{a(1, 0, -1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, -1) + c(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$, $\dim U = 2$.

12. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Řešení : $U = \{(s, -t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$, $\dim U = 2$.

13. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Řešení : $U = \{(s - 2t, s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$, $\dim U = 2$.

14. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, -x_2 + x_3 = 0\}$.

Řešení : $U = \{(-t, t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{(-1, 1, 1)\}$, $\dim U = 1$.

15. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Řešení : $U = \{(-t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{(-1, 0, 1)\}$, $\dim U = 1$.

16. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a $U = \{ax^2+bx+c \in P_2 \mid a-2b = 0, b+c = 0\}$.

Řešení : $U = \{-2tx^2 + -tx + t \in P_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{-2x^2 - x + 1\}$, $\dim U = 1$.

17. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a $U = \{ax^2 + bx + c \in P_2 \mid a - 2b + 5c = 0\}$.

Řešení : $U = \{(2s - 5t)x^2 + sx + t \in P_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{2x^2 + x, -5x^2 + 1\}$, $\dim U = 2$.

18. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $(U, +, \cdot)$ vektorového prostoru $(P_2, +, \cdot)$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ a $U = \{ax^2 + (a + 3c)x + c \in P_2 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$.

Řešení : $U = \{a(x^2 + x) + c(3x + 1) \in P_2 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$ báze $B = \{x^2 + x, 3x + 1\}$, $\dim U = 2$.

3.7 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Podle definice báze dokážeme pomocí bázových vektorů vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$ vytvořit jejich násobením (skalárem) a sčítáním vytvořit libovolný vektor z V. Například vektory $(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ (kdo nevěří, nechť si ověří sám). Na základě této informace můžeme tvrdit, že libovolný vektor z $\mathbb{R}^3$ dokážeme vytvořit jako lineární kombinaci vektorů $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$ a $(1,1,-1)$. Zkusme to například s vektorem $(-2,4,0)$. Cílem je najít koeficienty k_1, k_2 a k_3 takové, aby platilo:

$$(-2,4,0)=k_1(1,-1,1)+k_2(-1,1,1)+k_3(1,1,-1)$$

Tyto koeficienty nazveme *souřadnicemi vektoru* $(-2,4,0)$ *vzhledem k bázi* $B=\{(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1)\}$. Jak víme z kapitoly o lineárních kombinacích vektorů, čísla (souřadnice) k_1, k_2 a k_3 jsou neznámými v soustavě lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \ \mathbf{r_2} \circlearrowleft \mathbf{r_3} \ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Z poslední rovnice je jasné, že $k_3=1$, z druhé rovnice plyne $k_2=2$ a dosazením do první rovnice zjistíme, že $k_1=-1$. Určili jsme tak souřadnice vektoru $(-2,4,0)$ vzhledem k bázi $B=\{(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1)\}$. Výsledek zapisujeme ve tvaru:

$$(-2,4,0)_{\langle B\rangle}=(-1,2,1).$$

Neznamená to nic více a nic méně než to, že

$$(-2,4,0)=-1\cdot(1,-1,1)+2\cdot(-1,1,1)+1\cdot(1,1,-1).$$

Roznásobením a sečtením pravé strany rovnosti a srovnáním s levou stranou ověříme správnost výpočtu.

1. Určete souřadnice polynomu $6x^2+x-3$ vzhledem k bázi $B=\{x^2-2x+1,\ 3x^2-1,\ x-1\}$.

Řešení : Cílem je najít koeficienty k_1, k_2 a k_3 takové, aby platilo:

$$6x^2+x-3=k_1(x^2-2x+1)+k_2(3x^2-1)+k_3(x-1)$$

Tyto koeficienty nazveme *souřadnicemi polynomu (vektoru)* $6x^2 + x - 3$ *vzhledem k bázi* $B = \{x^2 - 2x + 1,\, 3x^2 - 1,\, x - 1\}$. Jak víme z kapitoly o lineárních kombinacích vektorů, čísla (souřadnice) k_1, k_2 a k_3 jsou neznámými v soustavě lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +2\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 13 \\ 0 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 13 \\ 0 & -12 & -3 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +2\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Z poslední rovnice je jasné, že $k_3 = 1$, z druhé rovnice plyne $k_2 = 2$ a dosazením do první rovnice zjistíme, že $k_1 = 0$. Určili jsme tak souřadnice polynomu $6x^2 + x - 3$ vzhledem k bázi $B = \{x^2 - 2x + 1,\, 3x^2 - 1,\, x - 1\}$. Výsledek zapisujeme ve tvaru:

$$(6x^2 + x - 3)_{\langle B\rangle} = (0, 2, 1).$$

Neznamená to nic více a nic méně než to, že

$$6x^2 + x - 3 = 0(x^2 - 2x + 1) + 2(3x^2 - 1) + 1(x - 1).$$

Roznásobením a sečtením pravé strany rovnosti a srovnáním s levou stranou ověříme správnost výpočtu.

3.7.1 Souřadnice vektoru vzhledem k bázi - příklady k procvičení

1. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = (3,-9,3) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi $B = \{(1,-3,1), (2,-7,2), (0,1,1)\}$.

Řešení : $(3,-9,3)_{\langle B\rangle} = (3,0,0)$

2. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = (3,4,1) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi $B = \{(1,5,-1), (1,1,1), (1,0,1)\}$.

Řešení : $(3,4,1)_{\langle B\rangle} = (1,-1,3)$

3. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = (1,5,2) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi $B = \{(1,5,-1), (1,1,1), (0,0,1)\}$.

Řešení : $(1,5,2)_{\langle B\rangle} = (1,0,3)$

4. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = (8,7,10) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi $B = \{(1,2,-1), (1,1,1), (0,3,1)\}$.

Řešení : $(8,7,10)_{\langle B\rangle} = (-1,9,0)$

5. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = (1,9,0) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi $B = \{(1,2,-1), (0,1,1), (0,3,1)\}$.

Řešení : $(1,9,0)_{\langle B\rangle} = (1,-2,3)$

6. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = -x^2+2x+5 \in P_2$, kde $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, vzhledem k bázi $E = \{x^2-1, x+2, 2x^2+1\}$.

Řešení : $-x^2+2x+5_{\langle E\rangle} = (-1,2,0)$

7. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = -2x^2-x+12 \in P_2$, kde $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, vzhledem k bázi $G = \{x^2-1, x+2, -x^2-x+3\}$.

Řešení : $(-2x^2-x+12)_{\langle G\rangle} = (1,2,3)$

8. Určete souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}} = 2x^2-5x+3 \in P_2$, kde $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, vzhledem k bázi $G = \{x^2+1, x+1, -x+1\}$.

Řešení : $(2x^2-5x+3)_{\langle G\rangle} = (2,-2,3)$

9. Určete souřadnice polynomu $2x^2 - x - 1$ vzhledem k bázi
$B = \{x^2 - 2x + 1,\ -x^2 + 3x - 1,\ x - 1\}$.

Řešení : $(2x^2 - x - 1)_{\langle B\rangle} = (2, 0, 3)$

10. Určete souřadnice polynomu $5x^2 + 3x - 4$ vzhledem k bázi
$B = \{x^2 - 2x + 1,\ 3x^2 - 1,\ x - 1\}$.

Řešení : $(5x^2 + 3x - 4)_{\langle B\rangle} = (-1, 2, 1)$

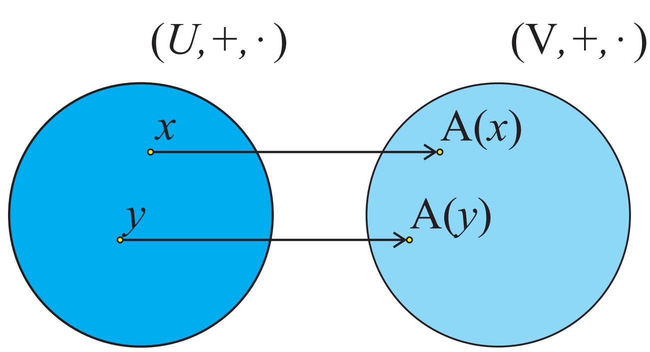
Kapitola 4

Lineární zobrazení

4.1 Lineární zobrazení

Z předcházející kapitoly bychom si měli pamatovat alespoň to, že pod pojmem vektorový prostor chápeme množinu, jejíž prvky (nazýváme je vektory) umíme sčítat a také násobit vektor skalárem (my se zabýváme případy, kdy množinou skalárů je množina reálných čísel). Toto sčítání a násobení musí mít podle definice vektorového prostoru mnoho „hezkých“ vlastností. Například výsledkem součtu dvou vektorů musí být vektor a výsledkem součinu skaláru a vektoru musí být zase vektor.

Nyní uvažujme dva vektorové prostory $(U, +, \cdot)$ a $(V, +, \cdot)$ a zobrazení, které vektorům z množiny U přiřazuje vektory z množiny V. Zobrazení se často značí symbolem f, my jej však, ze zatím záhadných důvodů, nazvěme A. To jest, uvažujeme zobrazení $A : U \mapsto V$. Toto zobrazení vektoru $\overline{\mathbf{x}} \in U$ přiřazuje vektor $A(\overline{\mathbf{x}}) \in V$, jak je znázorněno na Obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Zobrazení $A : U \mapsto V$.

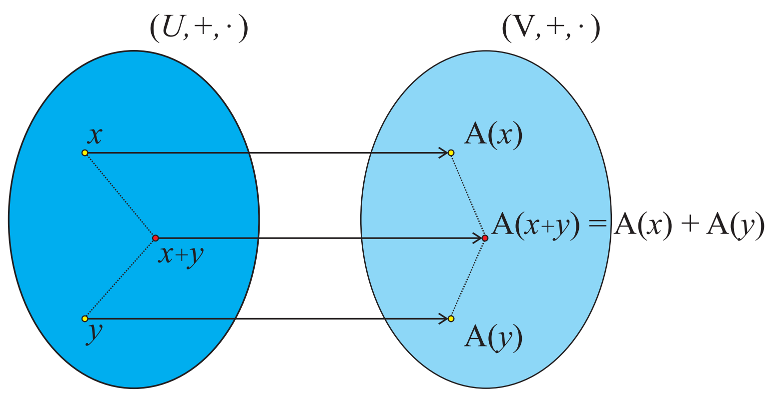
Abychom toto zobrazení mohli nazývat lineárním zobrazením, musí mít dvě „hezké“ vlastnosti, jak je uvedeno v následující definici.

Definice 38. *(*Lineární zobrazení*) Zobrazení $A : U \mapsto V$, kde $(U, +, \cdot)$ a $(V, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, nazýváme lineárním zobrazením právě thedy, když platí:*

1.) $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in U : A(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = A(\overline{\mathbf{x}}) + A(\overline{\mathbf{y}})$

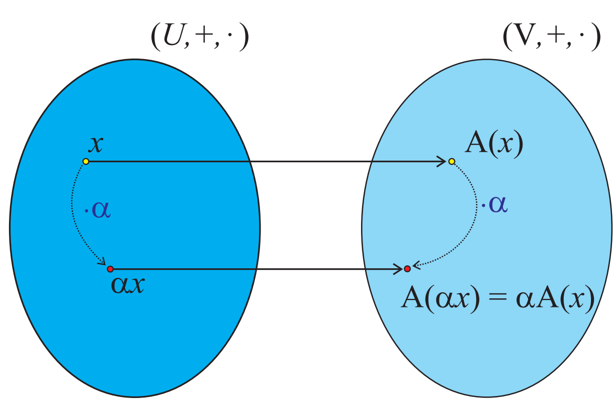
2.) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \overline{\mathbf{x}} \in U : A(\alpha\overline{\mathbf{x}}) = \alpha A(\overline{\mathbf{x}})$.

První podmínka z definice lineárního zobrazení říká, že u lineárního zobrazení je jedno, zda dva vektory $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ z U nejprve sečteme a pak tento součet zobrazíme, nebo zda nejprve zobrazíme vektory a pak sečteme výsledné vektory $A(\overline{\mathbf{x}})$ a $A(\overline{\mathbf{y}})$. Viz Obrázek 4.2



Obrázek 4.2: Lineární zobrazení $A : U \mapsto V$. První podmínka z definice.

Druhá podmínka z definice lineárního zobrazení říká, že u lineárního zobrazení je jedno, zda nejprve vektor $\overline{\mathbf{x}}$ z U vynásobíme skalárem α a poté výsledek $\alpha\overline{\mathbf{x}}$ zobrazíme, nebo zda nejprve zobrazíme vektor $\overline{\mathbf{x}}$ a až potom vynásobíme výsledek $A(\overline{\mathbf{x}})$ skalárem α. Viz Obrázek 4.3.



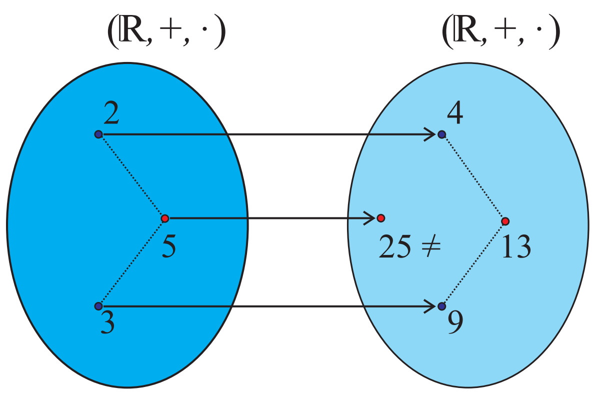
Obrázek 4.3: Lineární zobrazení $A : U \mapsto V$. Druhá podmínka z definice.

Abychom pochopili, co je lineární zobrazení, prostudujme následující dva příklady.

Příklad 39. *Uvažujme zobrazení* $A : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *dané předpisem* $A(x) = x^2$*. Otázka zní, zda je toto zobrazení lineární.*

Možina reálných čísel s jejich obvyklým sčítáním a násobením tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel (reálné číslo můžeme intuitivně chápat jako uspořádanou „jednatici“, tj. aritmetický vektor o jedné složce). Zobrazujeme tedy z jednoho vektorového prostoru do druhého. To by bylo v pořádku.

Ani jedna z podmínek v Definici 38 však není splněna. První podmínka není splněna například proto, že $A(2) = 4$, $A(3) = 9$, *ale* $A(2+3) = A(5) = 25 \neq 4 + 9 = A(2) + A(3)$.



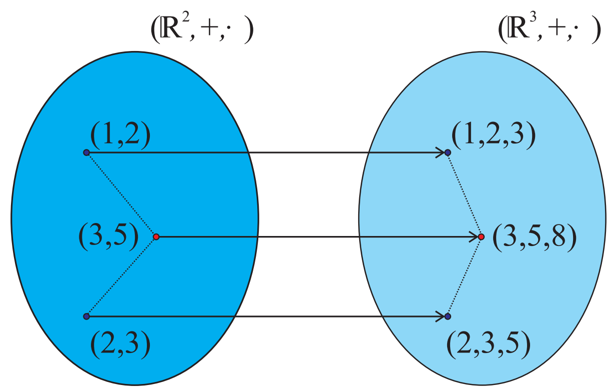
Obrázek 4.4: Zobrazení není lineární.

Platnost či neplatnost podmínky druhé už vlastně ověřovat nemusíme. Už teď můžeme prohlásit, že **toto zobrazení lineární není**. *Ale kdybychom náhodou chtěli, pak můžeme říci, že podmínka druhá opravdu není splněna, neboť například* $A(3 \cdot 2) = A(6) = 36$, *což se nerovná* $3A(2) = 3 \cdot 4 = 12$.

Předchozí příklad nám dává informaci, že ne všechna zobrazení jsou lineární. Existuje však nějaké zobrazení, které by bylo lineární? Odpověď dá následující příklad.

Příklad 40. *Uvažujme zobrazení* $A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ *dané předpisem* $A((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$*. Abychom pochopili jak toto zobrazení funguje, vyzkoušejme pár příkladů:* $A((1, 2)) = (1, 2, 1 + 2) = (1, 2, 3)$, $A((2, -1)) = (2, -1, 1)$, $A((2, 3)) = (2, 3, 5)$*. Je jasno. Dle předpisu tedy výsledný vektor vytvoříme tak, že první dvě složky vektoru opíšeme a třetí složkou je součet první a druhé složky. Z Obrázku 4.5 plyne, že by* **mohlo** *jít o lineární zobrazení.*

Co kdybychom ale zvolili jiné vektory? Byly by podmínky z definice také splněny? Jejich platnost tedy musíme ověřit obecně pro libovolné dva vektory $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *a libovolný skalár* $\alpha \in \mathbb{R}$.



Obrázek 4.5: Zobrazení by mohlo být lineární.

Podle předpisu je $A((x_1,x_2)) = (x_1,x_2,x_1+x_2)$ *a* $A((y_1,y_2)) = (y_1,y_2,y_1+y_2)$. *To znamená, že*

$$A(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}) = A\left((x_1+y_1, x_2+y_2)\right) \underbrace{=}_{\text{podle předpisu}} (x_1+y_1, x_2+y_2, x_1+y_1+x_2+y_2). \quad (4.1)$$

A také

$$A(\overline{\mathbf{x}})+A(\overline{\mathbf{y}}) = (x_1,x_2,x_1+x_2)+(y_1,y_2,y_1+y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_1+y_1+x_2+y_2). \quad (4.2)$$

Srovnáním (4.1) a (4.2) zjistíme, že $A(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}) = A(\overline{\mathbf{x}})+A(\overline{\mathbf{y}})$. *Zadané zobrazení tedy splňuje první podmínku z definice lineárního zobrazení. Ověříme, zda je splněna i ta druhá:*

$$A(\alpha\overline{\mathbf{x}}) = A\left((\alpha x_1, \alpha x_2)\right) \underbrace{=}_{\text{podle předpisu}} (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2). \quad (4.3)$$

A také platí

$$\alpha A(\overline{\mathbf{x}}) = \alpha A\left((x_1,x_2)\right) \underbrace{=}_{\text{podle předpisu}} \alpha(x_1,x_2,x_1+x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_1+\alpha x_2). \quad (4.4)$$

Srovnáním (4.3) a (4.4) zjistíme, že $A(\alpha\overline{\mathbf{x}}) = \alpha A(\overline{\mathbf{x}})$. *Zadané zobrazení tedy splňuje i druhou podmínku z definice lineárního zobrazení. Můžeme proto říci, že* **zadané zobrazení je lineární**.

Poznámka 41. *Pokud je zobrazeni A lineární, platí podle definice, že $A(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}) = A(\overline{\mathbf{x}})+A(\overline{\mathbf{y}})$. Co když však budeme zobrazovat součet tří vektorů? To jest, snažíme se určit $A(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}})$. Podle definice můžeme psát:*

$$A(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}}) = A\left((\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}})+\overline{\mathbf{z}}\right) = A\left(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}\right) + A\left(\overline{\mathbf{z}}\right) = A\left(\overline{\mathbf{x}}\right) + A\left(\overline{\mathbf{y}}\right) + A\left(\overline{\mathbf{z}}\right).$$

Je zřejmé (a indukcí bychom mohli dokázat), že u součtu více vektorů tedy také můžeme nejdříve zobrazit a až pak sečíst výsledky zobrazení. To jest, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$A(\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}+\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}+\cdots+\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}) = A(\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}})+A(\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}})+\cdots+A(\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}). \tag{4.5}$$

Představme si, že vektory $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}$ jsou násobky nějakých vektorů $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}$, tj. platilo by $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} = \alpha_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} = \alpha_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}$, ..., $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}} = \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}$. Po dosazení do rovnice (4.5) obdržíme:

$$A(\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}+\alpha_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}+\cdots+\alpha_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}) = A(\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})+A(\alpha_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}})+\cdots+A(\alpha_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}). \tag{4.6}$$

Zobrazení A je lineární, proto platí, že $A(\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}) = \alpha_1 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})$, $A(\alpha_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}) = \alpha_2 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}})$, ..., $A(\alpha_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}) = \alpha_n A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}})$. Dosazením do (4.6) zjistíme, že

$$A(\underbrace{\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}+\alpha_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}+\cdots+\alpha_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}}_{\textit{označme } \overline{\mathbf{x}}}) = \alpha_1 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})+\alpha_2 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}})+\cdots+\alpha_n A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}). \tag{4.7}$$

Z rovnice (4.7) plyne pro lineární zobrazení velice důležité pozorování:

$$\begin{array}{lcccccccc} \textit{Jestliže} & \overline{\mathbf{x}} & = & \alpha_1\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} & + & \alpha_2\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} & +\cdots+ & \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}, \\ \textit{pak} & A(\overline{\mathbf{x}}) & = & \alpha_1 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}) & + & \alpha_2 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}) & +\cdots+ & \alpha_n A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}). \end{array} \tag{4.8}$$

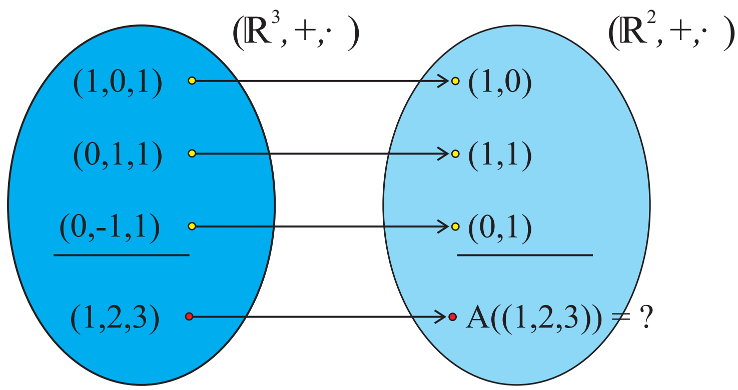
Všimněme si, jestliže jsme schopni vyjádřit vektor $\overline{\mathbf{x}}$ jako lineární kombinaci vektorů $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}$, pak $A(\overline{\mathbf{x}})$ můžeme určit jako stejnou (stejné čísla α_i) lineární kombinaci vektorů $A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}})$.
Pokud vektory $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}$, ... $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}$ tvoří bázi vektorového prostoru U, pak jsme jistě schopni libovolný vektor $\overline{\mathbf{x}}$ z vektorového prostoru U vyjádřit jako jejich lineární kombinaci a jsme schopni určit $A(\overline{\mathbf{x}})$ pokud známe $A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})$, $A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}})$, ..., $A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}})$.

Pokud tedy vektory $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}$, ... $\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}}$ tvoří bázi vektorového prostoru U, říkáme, že lineární zobrazení je dáno hodnotami *$A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})$, $A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}})$, ..., $A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}})$, neboť jsme schopni pomocí nich určit i libovolnou jinou hodnotu $A(\overline{\mathbf{x}})$.*

Rovnice (4.8) můžeme využít pro řešení následujících příkladů.

1. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,-1,1)) = (0,1)$. Určete funkční hodnotu $A((1,2,3))$ (tj. na jaký vektor se zobrazí vektor $(1,2,3)$?).

Řešení : Informace ze zadání můžeme znázornit na obrázku:



Využijeme rovnic (4.8). Nejprve musíme určit, jak vyjádřit vektor $\overline{\mathbf{x}} = (1,2,3)$ jako lineární kombinaci vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1,0,1)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (0,1,1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (0,-1,1)$. Hledáme tedy čísla α_1, α_2 a α_3 taková, aby platilo:

$$\overline{\mathbf{x}} = (1,2,3) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,-1,1).$$

Čísla α_1, α_2 a α_3 jsou řešením soustavy lineárních rovnic, kde sloupce matice soustavy jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$, vektorem pravých stran je vektor $\overline{\mathbf{x}}$. To jest, řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku je zřejmé, že $\alpha_3 = 0$, z druhého řádku pak dostáváme $\alpha_2 = 2$ a z prvního řádku plyne, že $\alpha_1 = 1$. Zjistili jsme, že

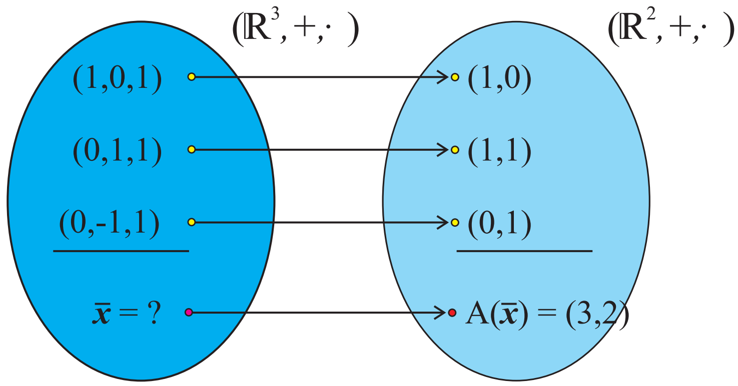
$$\overline{\mathbf{x}} = (1,2,3) = 1 \cdot (1,0,1) + 2 \cdot (0,1,1) + 0 \cdot (0,-1,1).$$

Že to tak opravdu je, snadno ověříme roznásobením a sečtením vektorů na pravé straně rovnosti. Naším úkolem je určit $A((1,2,3))$, to jest $A(\overline{\mathbf{x}})$. Z rovnic (4.8) plyne, že

$$A(\overline{\mathbf{x}}) = A((1,2,3)) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (1,1) + 0 \cdot (0,1) = \underline{\underline{(3,2)}}.$$

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,-1,1)) = (0,1)$. Nalezněte všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ takové, že $A(\overline{\mathbf{x}}) = (3,2)$.

Řešení : Informace ze zadání můžeme znázornit na obrázku:



V předcházejícím příkladě bylo zadáno stejné lineární zobrazení a zjistili jsme, že $A((1,2,3)) = (3,2)$. Čekali bychom tedy, že výsledkem bude $\overline{\mathbf{x}} = (1,2,3)$. Uvidíme ale, že vektor $(1,2,3)$ je jen jeden z nekonečně mnoha vektorů, které se zobrazují na vektor $(3,2)$.

Vektory $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ a $(0,-1,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, jistě tedy existují reálná čísla k_1, k_2, k_3 taková, že libovolné $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ je možné vyjádřit ve tvaru

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1(1,0,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,-1,1).$$

A my hledáme všechna $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, to jest všechna $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, taková, že

$$\begin{aligned} A(\overline{\mathbf{x}}) &= A(k_1(1,0,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,-1,1)) = \\ &= k_1 A((1,0,1)) + k_2 A((0,1,1)) + k_3 A((0,-1,1)) = \\ &= k_1(1,0) + k_2(1,1) + k_3(0,1) = \\ &= (3,2) \end{aligned}$$

Nejprve zjistíme jakým způsobem je možné vyjádřit vektor $(3,2)$ jako lineární kombinaci vektorů $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$ a $A((0,-1,1)) = (0,1)$. Řešíme proto soustavu lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava je ve schodovém tvaru, můžeme proto volit parametr $x_3 = t \in \mathbb{R}$ a z poslední rovnice zjistíme, že $x_2 = 2 - t$. Dosazením do rovnice první zjistíme, že $x_1 = 1 + t$. Zjistili jsme tedy, že

$$\begin{aligned}
(3,2) &= (1+t)(1,0) + (2-t)(1,1) + t(0,1) \\
& \quad \text{ze zadání pak plyne:} \\
(3,2) &= (1+t)A\left((1,0,1)\right) + (2-t)A\left((0,1,1)\right) + tA\left((0,-1,1)\right) \\
& \quad \text{podle definice lineárního zobrazení můžeme upravit:} \\
(3,2) &= A\left((1+t)(1,0,1)\right) + A\left((2-t)(0,1,1)\right) + A\left(t(0,-1,1)\right) \\
& \quad \text{a} \\
(3,2) &= A\left(\underbrace{(1+t)(1,0,1) + (2-t)(0,1,1) + t(0,-1,1)}_{=\overline{\mathbf{x}}}\right)
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne, že vektory ve tvaru $\overline{\mathbf{x}} = (1+t)(1,0,1) + (2-t)(0,1,1) + t(0,-1,1)$ se jistě zobrazují na vektor $(3,2)$ (a jiné se na něj nezobrazují). Výsledek ještě upravíme do přijatelnějšího tvaru (roznásobíme a sečteme)

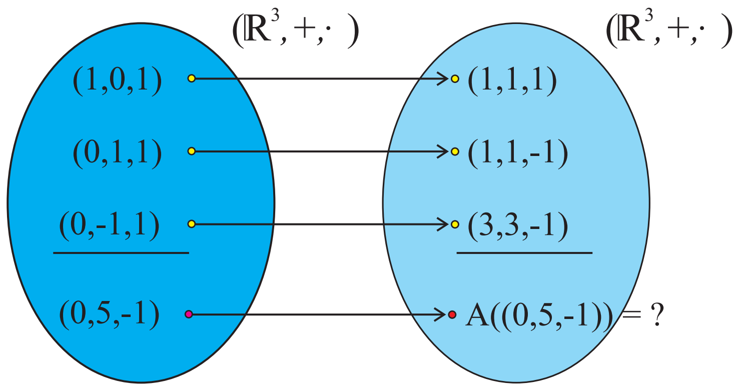
$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{x}} &= (1+t)(1,0,1) + (2-t)(0,1,1) + t(0,-1,1) \\
\overline{\mathbf{x}} &= (1+t, 0, 1+t) + (0, 2-t, 2-t) + (0, -t, t) \\
\overline{\mathbf{x}} &= (1+t, 2-2t, 3+t)
\end{aligned}$$

Dospěli jsme tak k výsledku $\underline{\underline{\overline{\mathbf{x}} = (1+t, 2-2t, 3+t), \text{ kde } t \in \mathbb{R}.}}$

Všimněme si, že při $t = 0$ dostáváme $\overline{\mathbf{x}} = (1,2,3)$.

3. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,1,1)$, $A((0,1,1)) = (1,1,-1)$, $A((0,-1,1)) = (3,3,-1)$. Určete $A((0,5,-1))$.

Řešení : Informace ze zadání můžeme znázornit na obrázku:



Využijeme rovnic (4.8). Nejprve musíme určit, jak vyjádřit vektor $\overline{\mathbf{x}} = (0,5,-1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = (1,0,1)$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = (0,1,1)$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = (0,-1,1)$. Hledáme tedy čísla α_1, α_2 a α_3 taková, aby platilo:

$$\overline{\mathbf{x}} = (0,5,-1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,-1,1).$$

Čísla α_1, α_2 a α_3 jsou řešením soustavy lineárních rovnic, kde sloupce matice soustavy jsou vektory $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$, vektorem pravých stran je vektor $\overline{\mathbf{x}}$. To jest, řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku je zřejmé, že $\alpha_3 = -3$, z druhého řádku pak dostáváme $\alpha_2 = 2$ a z prvního řádku plyne, že $\alpha_1 = 0$. Zjistili jsme, že

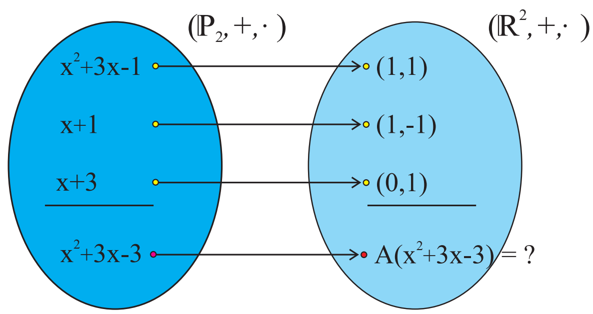
$$\overline{\mathbf{x}} = (0,5,-1) = 0 \cdot (1,0,1) + 2 \cdot (0,1,1) - 3 \cdot (0,-1,1).$$

Že to tak opravdu je, snadno ověříme roznásobením a sečtením vektorů na pravé straně rovnosti. Naším úkolem je určit $A((0,5,-1))$, to jest $A(\overline{\mathbf{x}})$. Z rovnic (4.8) plyne, že

$$A(\overline{\mathbf{x}}) = A((0,5,-1)) = 0 \cdot (1,1,1) + 2 \cdot (1,1,-1) - 3 \cdot (3,3,-1) = \underline{\underline{(-7,-7,1)}}.$$

4. Lineární zobrazení $A : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A\left(x^2 + 3x - 1\right) = (1,1)$, $A\left(x + 1\right) = (1,-1)$, $A\left(x+3\right) = (3,-1)$. Určete $A\left(x^2 + 3x - 3\right)$.

Řešení : Informace ze zadání můžeme znázornit na obrázku:



Využijeme rovnic (4.8). Nejprve musíme určit, jak vyjádřit vektor $\overline{\mathbf{x}} = x^2 + 3x - 3$ jako lineární kombinaci vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = x^2 + 3x - 1$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = x + 1$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = x + 3$. Hledáme tedy čísla α_1, α_2 a α_3 taková, aby platilo:

$$\overline{\mathbf{x}} = x^2 + 3x - 3 = \alpha_1(x^2 + 3x - 1) + \alpha_2(x+1) + \alpha_3(x+3).$$

Čísla α_1, α_2 a α_3 jsou řešením soustavy lineárních rovnic, kde sloupce matice soustavy jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ a $\overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$ vzhledem ke standardní bázi (jednoduše, jsou to koeficienty u mocnin x), vektorem pravých stran jsou souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{x}}$ vzhledem ke standardní bázi (tj. koeficienty u mocnin x). To jest, řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Z posledního řádku je zřejmé, že $\alpha_3 = -1$, z druhého řádku pak dostáváme $\alpha_2 = 1$ a z prvního řádku plyne, že $\alpha_1 = 1$. Zjistili jsme, že

$$\overline{\mathbf{x}} = x^2 + 3x - 3 = 1 \cdot (x^2 + 3x - 1) + 1 \cdot (x + 1) - 1 \cdot (x + 3).$$

Že to tak opravdu je, snadno ověříme roznásobením a sečtením vektorů na pravé straně rovnosti. Naším úkolem je určit $A\left(x^2 + 3x - 3\right)$, to jest $A\left(\overline{\mathbf{x}}\right)$. Z rovnic (4.8) plyne, že

$$A\left(\overline{\mathbf{x}}\right) = A\left(x^2 + 3x - 3\right) = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,-1) - 1 \cdot (3,-1) = \underline{\underline{(-1,1)}}.$$

4.1.1 Lineární zobrazení - příklady k procvičení

1. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (1,-1)$, $A((1,2,1)) = (0,1)$, $A((0,-1,5)) = (3,2)$. Určete $A((-1,-4,3))$.

Řešení : $A((-1,-4,3)) = (4,-1)$.

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x + 1$. Určete $A((1,-1,6))$.

Řešení : $A((1,-1,6)) = 6x + 3$.

3. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,-1,1)) = (0,1)$. Určete funkční hodnotu $A((2,-5,3))$ (tj. na jaký vektor se zobrazí vektor $(2,-5,3)$?).

Řešení : $A((2,-5,3)) = (0,1)$.

4. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (2,0)$, $A((0,1,1)) = (2,2)$, $A((0,-1,1)) = (0,2)$. Určete $A((2,-5,3))$.

Řešení : $A((2,-5,3)) = (0,2)$.

5. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,-1,2)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,2,1)) = (2,1)$. Určete funkční hodnotu $A((0,-2,-2))$ (tj. na jaký vektor se zobrazí vektor $(0,-2,-2)$?).

Řešení : $A((0,-2,-2)) = (-2,-2)$.

6. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,1)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,-1,1)) = (3,3)$. Určete $A((1,0,3))$.

Řešení : $A((1,0,3)) = (5,5)$.

7. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (0,2)$, $A((1,0,1)) = (1,1)$, $A((0,0,1)) = (-1,2)$. Určete $A((1,0,3))$.

Řešení : $A((1,0,3)) = (-1,5)$.

8. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (0,2)$, $A((1,0,1)) = (1,1)$, $A((0,0,1)) = (-1,2)$. Nalezněte všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ splňující $A(\overline{\mathbf{x}}) = (0,3)$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = (\frac{6}{4} - \frac{1}{4}t; \frac{6}{4} - \frac{3}{4}t; t)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

9. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je dáno hodnotami $A((1,1,1)) = (1,2,1)$, $A((1,-1,0)) = (0,0,1)$, $A((0,0,3)) = (1,2,-2)$. Nalezněte všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ splňující $A(\overline{\mathbf{x}}) = (-1,-2,4)$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = (2t+4, -4t-6, 2t-1)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

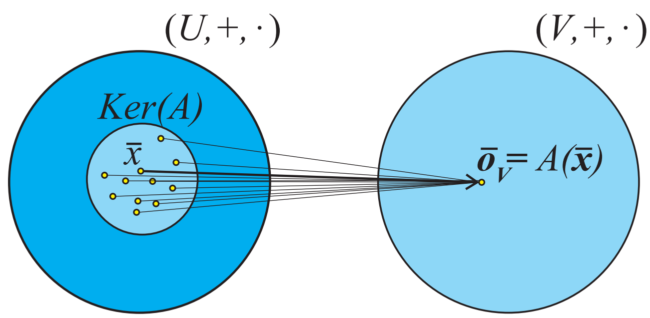
10. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A\left((1,0,3)\right) = x^2 + 2x$, $A\left((0,1,-1)\right) = x^2 - 1$, $A\left((0,0,1)\right) = 2x + 1$. Nalezněte všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ splňující $A(\overline{\mathbf{x}}) = 6x + 3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = (3-t, t-3, 12-3t)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

4.2 Jádro lineárního zobrazení

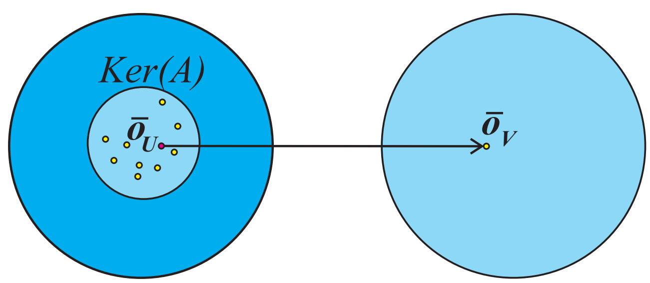
Definice 42. *(*Jádro lineárního zobrazení*) Nechť $A : U \mapsto V$ je lineární zobrazení a $\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}$ je nulovým vektorem ve vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$. Jádrem lineárního zobrazení A nazveme množinu $Ker(A)$ (používá se také označení $N(A)$), kde*

$$Ker(A) = N(A) = \{\overline{\mathbf{x}} \in U \mid A(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}\}.$$



Jádrem lineárního zobrazení $A : U \mapsto V$ je množina všech vektorů z U, zobrazujících se na nulový vektor. Takových vektorů může (ale nemusí) být nekonečně mnoho. Jádro lineárního zobrazení vždy obsahuje nulový vektor z vektorového prostoru $(U, +, \cdot)$ – označme jej $\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{U}$. Důkaz tohoto tvrzení je snadný:

$$A(\underbrace{\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}}_\mathbf{U}}_{\overline{\mathbf{x}}}) = A(\overline{\mathbf{x}}) \;\Rightarrow A(\overline{\mathbf{x}}) + A(\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{U}) = A(\overline{\mathbf{x}}) \;\Rightarrow A(\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{U}) = A(\overline{\mathbf{x}}) - A(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}.$$



Pro zajímavost ještě dodejme, že jádro lineárního zobrazení $A : U \mapsto V$ je podprostorem vektorového prostoru $(U, +, \cdot)$. Opět se snadno dokáže (viz podkapitola 3.2):

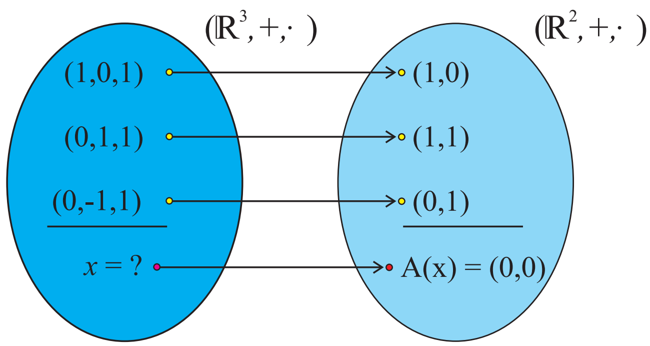
- $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in Ker(A) : \; A(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \underbrace{A(\overline{\mathbf{x}})}_{\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}} + \underbrace{A(\overline{\mathbf{y}})}_{\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}$. Proto $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in Ker(A)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overline{\mathbf{x}} \in Ker(A) : \; A(\alpha\overline{\mathbf{x}}) = \alpha \underbrace{A(\overline{\mathbf{x}})}_{\overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{0}}_\mathbf{V}$. Proto $\alpha\overline{\mathbf{x}} \in Ker(A)$

1. Lineární zobrazení $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A\left((1,0,1)\right)=(1,0)$, $A\left((0,1,1)\right)=(1,1)$, $A\left((0,-1,1)\right)=(0,1)$. Určete jádro $Ker(A)$ tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : Jádro je množina všech vektorů $\overline{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^3$ takových, že $A\left(\overline{\mathbf{x}}\right)=(0,0)$.

Vektory $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ a $(0,-1,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, jistě tedy existují reálná čísla k_1,k_2,k_3 taková, že libovolné $\overline{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^3$ je možné vyjádřit ve tvaru

$$\overline{\mathbf{x}}=k_1(1,0,1)+k_2(0,1,1)+k_3(0,-1,1).$$



A my hledáme všechna $\overline{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^3$, to jest všechna $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$, taková, že

$$\begin{aligned}
A\left(\overline{\mathbf{x}}\right) &= A\left(k_1(1,0,1)+k_2(0,1,1)+k_3(0,-1,1)\right)= \\
&= k_1A\left((1,0,1)\right)+k_2A\left((0,1,1)\right)+k_3A\left((0,-1,1)\right)= \\
&= k_1(1,0)+k_2(1,1)+k_3(0,1)= \\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

Hledáme proto všechna $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$, taková, že

$$k_1(1,0)+k_2(1,1)+k_3(0,1)=(0,0).$$

Zjišťujeme tedy, jakým způsobem je možné vyjádřit vektor $(0,0)$ jako lineární kombinaci vektorů $(1,0)$, $(1,1)$ a $(0,1)$. Řešíme proto soustavu lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava je ve schodovém tvaru, můžeme proto volit parametr $x_3 = t \in \mathbb{R}$ a z poslední rovnice zjistíme, že $x_2 = -t$. Dosazením do rovnice první zjistíme, že $x_1 = t$. Zjistili jsme tedy, že

$$\begin{aligned}
(0,0) &= t(1,0) - t(1,1) + t(0,1) \\
& \quad \text{ze zadání pak plyne:} \\
(0,0) &= tA\left((1,0,1)\right) - tA\left((0,1,1)\right) + tA\left((0,-1,1)\right) \\
& \quad \text{podle definice lineárního zobrazení můžeme upravit:} \\
(0,0) &= A\left(t(1,0,1)\right) + A\left(-t(0,1,1)\right) + A\left(t(0,-1,1)\right) \\
& \quad \text{a} \\
(0,0) &= A\left(\underbrace{t(1,0,1) - t(0,1,1) + t(0,-1,1)}_{=\overline{\mathbf{x}}}\right)
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne, že vektory ve tvaru $\overline{\mathbf{x}} = t(1,0,1) - t(0,1,1) + t(0,-1,1)$ se jistě zobrazují na vektor $(0,0)$ (a jiné se na něj nezobrazují). Výsledek ještě upravíme do přijatelnějšího tvaru (roznásobíme a sečteme)

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{x}} &= t(1,0,1) - t(0,1,1) + t(0,-1,1) \\
\overline{\mathbf{x}} &= (t,0,t) + (0,-t,-t) + (0,-t,t) \\
\overline{\mathbf{x}} &= (t,-2t,t) \\
\overline{\mathbf{x}} &= t(1,-2,1)
\end{aligned}$$

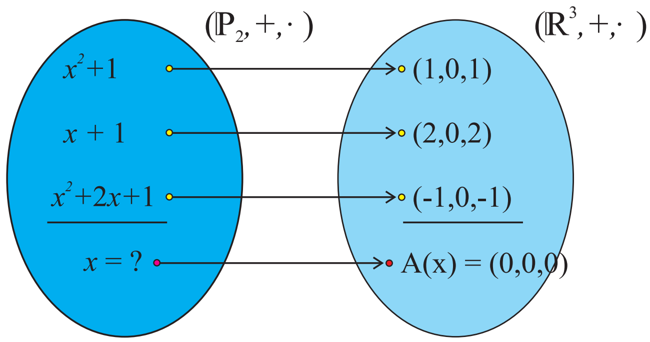
Proto $Ker(A) = \{t(1,-2,1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-2,1)\rangle$.

Odtud je jasné, že bází jádra je například jednoprvková množina $\{(1,-2,1)\}$ a dimenze je rovna jedné. Dospěli jsme tak k výsledku:

$\underline{\underline{Ker(A) = \{t(1,-2,1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},\ \text{báze } Ker(A) = \{(1,-2,1)\},\ dim\, Ker(A) = 1.}}$

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami $A((x^2+1)) = (1,0,1)$, $A((x+1)) = (2,0,2)$, $A((x^2+2x+1)) = (-1,0,-1)$. Určete jádro $Ker(A)$ tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : Hledáme množinu všech vektorů z $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_2$ zobrazujících se na nulový vektor z $\mathbb{R}^3$, to jest, na $(0,0,0)$.



Nejprve určíme, jakým způsobem je možné vyjádřit vektor $(0,0,0)$ jako lineární kombinaci vektorů $(1,0,1)$, $(2,0,2)$ a $(-1,0,-1)$. Hledáme všechna $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, taková, že

$$k_1(1,0,1) + k_2(2,0,2) + k_3(-1,0,-1) = (0,0,0).$$

Řešíme proto soustavu lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Po úpravě na schodový tvar zbyla jen jedna rovnice a tři neznámé :

$$k_1 + 2k_2 - k_3 = 0. \tag{4.9}$$

Volíme proto dva parametry, například $k_3 = s \in \mathbb{R}$ a $k_2 = t \in \mathbb{R}$. Dosazením do rovnice (4.9) obdržíme:

$$k_1 + 2t - s = 0.$$

Odtud dostáváme $k_1 = s - 2t$.

Hledané vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_2$ pak obdržíme jako lineární kombinaci:

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1(x^2+1) + k_2(x+1) + k_3(x^2+2x+1) \tag{4.10}$$

Dosazením $k_3 = s$, $k_2 = t$ a $k_1 = s - 2t$ zjistíme, že

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}} &= (s-2t)(x^2+1) + t(x+1) + s(x^2+2x+1) = \\ &= s(2x^2+2x+2) + t(-2x^2+x-1)\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\underline{\underline{Ker(A) = \{s(2x^2+2x+2) + t(-2x^2+x-1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle 2x^2+2x+2,\ -2x^2+x-1\rangle.}}$$

A protože jsou polynomy $2x^2+2x+2$ a $-2x^2+x-1$ lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého), jistě tvoří bázi jádra a jeho dimenze je proto rovna dvěma. To jest:

$$\underline{\underline{\text{báze } Ker(A) = \{2x^2+2x+2,\ -2x^2+x-1\},\ dim\, Ker(A) = 2.}}$$

4.2.1 Jádro lineárního zobrazení - příklady k procvičení

1. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (1,-1)$, $A((1,2,1)) = (0,1)$, $A((0,-1,5)) = (3,2)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(-8,-14,0) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(-8,-14,0)\rangle$, jeho báze: $\{(-8,-14,0)\}$, $dim N(A) = 1$.

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2+2x$, $A((0,1,-1)) = x^2-1$, $A((0,0,1)) = 2x+1$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(-1,1,-3) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,-3)\rangle$, jeho báze: $\{(-1,1,-3)\}$, $dim N(A) = 1$.

3. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,-1,1)) = (0,1)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(1,-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-2,1)\rangle$, jeho báze: $\{(1,-2,1)\}$, $dim N(A) = 1$.

4. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,0,1)$, $A((0,1,1)) = (0,1,1)$, $A((0,-1,1)) = (0,1,2)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení a jeho dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{(0,0,0)\} = \langle(1,-2,1)\rangle$, $dim N(A) = 0$.

5. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami $A((1,-1,2)) = (0,1)$, $A((0,1,1)) = (2,0)$, $A((0,2,1)) = (2,1)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(-1,2,-2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,2,-2)\rangle$, jeho báze: $\{(-1,2,-2)\}$, $dim N(A) = 1$.

6. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (2,0)$, $A((0,1,1)) = (2,2)$, $A((0,-1,1)) = (0,2)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(1,-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-2,1)\rangle$, jeho báze: $\{(1,-2,1)\}$, $dim N(A) = 1$.

7. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A\left((1,0,2)\right) = (1,1)$, $A\left((0,1,1)\right) = (1,2)$, $A\left((0,-1,3)\right) = (0,2)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(2,-3,5) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (2,-3,5) \rangle$, jeho báze: $\{(2,-3,5)\}$, $dim N(A) = 1$.

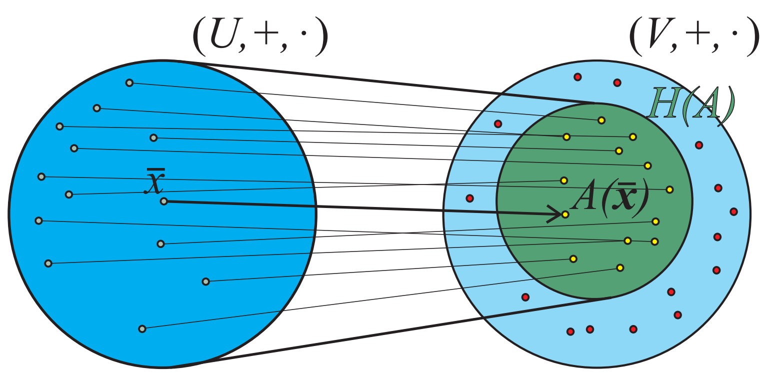
8. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A\left((1,1,0)\right) = (0,2)$, $A\left((1,0,1)\right) = (1,1)$, $A\left((0,0,1)\right) = (-1,2)$. Určete nulový prostor (jádro) tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $Ker(A) = N(A) = \{t(-1,-3,4) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,-3,4) \rangle$, jeho báze: $\{(-1,-3,4)\}$, $dim N(A) = 1$.

4.3 Obor hodnot lineárního zobrazení

Definice 43. *(*Obor hodnot lineárního zobrazení*) Nechť $A : U \mapsto V$ je lineární zobrazení vektorového prostoru $(U, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Oborem hodnot lineárního zobrazení A nazveme množinu $H(A)$, kde*

$$H(A) = \{A(\overline{\mathbf{x}}) \mid \overline{\mathbf{x}} \in U\}.$$



Obrázek 4.6: Červeně jsou vyznačeny prvky z V na které se nezobrazuje žádný prvek z U. Do oboru hodnot naopak patří všechny prvky z V na které se zobrazuje nějaký prvek z U - jsou vyznačeny žlutě.

1. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,1)$, $A((0,1,1)) = (-1,1)$, $A((0,-1,1)) = (1,0)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : Obor hodnot lineárního zobrazení je množina všech možných hodnot tohoto zobrazení. Naším úkolem je proto nalézt všechna $A(\overline{\mathbf{x}})$. To uděláme tak, že dosadíme všechna $\overline{\mathbf{x}}$ z $\mathbb{R}^3$. Kde ale vzít všechna $\overline{\mathbf{x}}$ z $\mathbb{R}^3$? Vektory $(1,0,1); (0,1,1); (0,-1,1)$, které se vyskytly v zadání, tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Libovolné $\overline{\mathbf{x}}$ z $\mathbb{R}^3$ tedy můžeme napsat jako jejich lineární kombinaci:

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1(1,0,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,-1,1)$$

a všechna $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ obdržíme tak, že za k_1, k_2, k_3 dosadíme všechna možná reálná čísla. Proto

$$
\begin{aligned}
H(A) &= \{A(\overline{\mathbf{x}}) \mid \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3\} = \\
&= \{A(\underbrace{k_1(1,0,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,-1,1)}_{\overline{\mathbf{x}}}) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} = \\
&\ \text{Zobrazení } A \text{ je lineární. Proto:} \\
&= \{k_1 \underbrace{A((1,0,1))}_{(1,1)} + k_2 \underbrace{A((0,1,1))}_{(-1,1)} + k_3 \underbrace{A((0,-1,1))}_{(1,0)} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{k_1(1,1) + k_2(-1,1) + k_3(1,0) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že každý vektor z $H(A)$ je lineární kombinací vektorů $(1,1)$, $(-1,1)$ a $(1,0)$. To ale znamená, že vektory $(1,1)$, $(-1,1)$ a $(1,0)$ mohou tvořit bázi oboru hodnot $H(A)$ - ovšem, jen pokud jsou lineárně nezávislé (viz definoce báze). Ověříme, zda jsou nezávislé. (Dáme je do řádků matice a tu upravíme na schodový tvar. Pokud se žádný řádek nevynuluje, jsou nezávislé.):

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Vidíme, že se vynuloval jeden z řádků. Znamená to, že vektory $(1,1)$, $(-1,1)$ a $(1,0)$ jsou lineárně závislé a nemohou proto tvořit bázi oboru hodnot. Kde ji tedy vezmeme? Bázi budou tvořit nenulové vektory, které v matici zůstaly po úpravě na schodový tvar (neboť z nich dokážeme vykombinovat totéž jako z vektorů $(1,1)$, $(-1,1)$ a $(1,0)$, ale jsou lineárně nezávislé). To jest:

$$\underline{\underline{\text{Bází } H(A) \text{ je } \{(1,1);(0,1)\} \text{ a } dim H(A) = 2,}}$$

$$\underline{\underline{H(A) = \{k_1(1,1) + k_2(0,1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}.}}$$

Poznámka 44. *Postup použitý výše můžeme zobecnit. Hledáme-li obor hodnot $H(A)$ lineárního zobrazení $A : U \to V$, které je dáno hodnotami $A(\overline{\mathbf{e}}_1) = \overline{\mathbf{y}}_1$, $A(\overline{\mathbf{e}}_2) = \overline{\mathbf{y}}_2$, ...,$A(\overline{\mathbf{e}}_n) = \overline{\mathbf{y}}_n$, potom:*

- *Ze ze souřadnic vektorů $\overline{\mathbf{y}}_1$, $\overline{\mathbf{y}}_2$, ..., $\overline{\mathbf{y}}_n$ vytvoříme řádky matice.*
- *Tuto matici upravíme na schodový tvar.*
- *Nenulové řádky upravené matice jsou souřadnicemi vektorů, které tvoří bázi oboru hodnot $H(A)$.*

(Vektory $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, ...,$\overline{\mathbf{e}}_n$ musí tvořit bázi U, jinak by tento postup nebyl korektní!!! To ale dáváme najevo tím, že říkáme, že „lineární zobrazení $A : U \to V$, ***je dáno hodnotami****...” Pokud by tato formulace v zadání chyběla, museli bychom ověřit, že vektory $\overline{\mathbf{e}}_1$, $\overline{\mathbf{e}}_2$, ..., $\overline{\mathbf{e}}_n$ opravdu tvoří bázi U.)*

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,2)) = (1,1,1)$, $A((0,1,1)) = (-1,1,1)$, $A((0,2,3)) = (1,0,1)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : Obor hodnot lineárního zobrazení je množina všech možných hodnot tohoto zobrazení. Proto

$$
\begin{aligned}
H(A) &= \{A(\overline{\mathbf{x}}) \mid \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3\} = \\
&= \{A(\underbrace{k_1(1,0,2) + k_2(0,1,1) + k_3(0,2,3)}_{\overline{\mathbf{x}}}) \mid k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}\} = \\
& \quad \text{Zobrazení } A \text{ je lineární. Proto:} \\
&= \{k_1 \underbrace{A((1,0,2))}_{(1,1,1)} + k_2 \underbrace{A((0,1,1))}_{(-1,1,1)} + k_3 \underbrace{A((0,2,3))}_{(1,0,1)} \mid k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{k_1(1,1,1) + k_2(-1,1,1) + k_3(1,0,1) \mid k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že každý vektor z $H(A)$ je lineární kombinací vektorů $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$ a $(1,0,1)$. To ale znamená, že vektory $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$ a $(1,0,1)$ mohou tvořit bázi oboru hodnot $H(A)$ - ovšem, jen pokud jsou lineárně nezávislé (viz definice báze). Ověříme, zda jsou nezávislé. (Dáme je do řádků matice a tu upravíme na schodový tvar. Pokud se žádný řádek nevynuluje, jsou nezávislé.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\mathbf{\frac{1}{2}} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že se nevynuloval ani jeden z řádků. Znamená to, že vektory $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$ a $(1,0,1)$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi oboru hodnot. To jest:

$$\underline{\underline{\text{Bází } H(A) \text{ je } \{(1,1,1); (-1,1,1); (1,0,1)\} \text{ a } dim H(A) = 3.}}$$

$$\underline{\underline{H(A) = \{k_1(1,1,1) + k_2(-1,1,1) + k_3(1,0,1) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}}}$$

Jako bázové vektory jsme ale klidně mohli vzít i vektory $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ a $(0,0,1)$. Odpověď by v takovém případě měla tvar:

$$\underline{\underline{\text{Bází } H(A) \text{ je } \{(1,1,1); (0,1,1); (0,0,1)\} \text{ a } dim H(A) = 3.}}$$

$$\underline{\underline{H(A) = \{k_1(1,1,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,0,1) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}}}$$

3. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$, $A((0,-1,1)) = (0,1)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

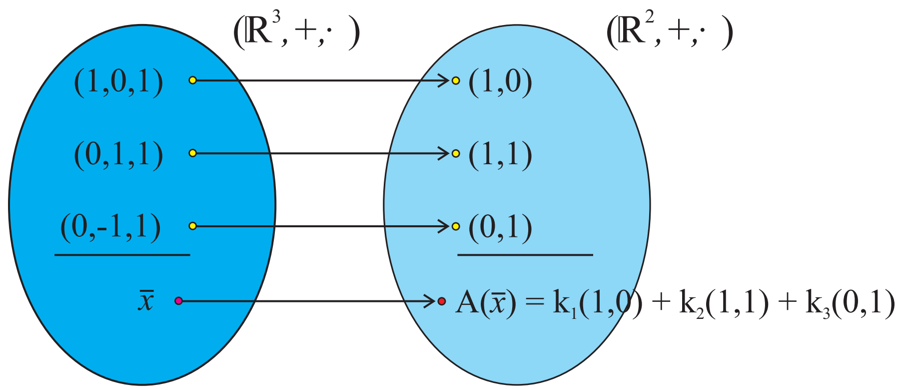
Řešení : Vektory $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ a $(0,-1,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, jistě tedy existují reálná čísla k_1, k_2, k_3 taková, že libovolné $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ je možné vyjádřit ve tvaru

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1(1,0,1) + k_2(0,1,1) + k_3(0,-1,1).$$

Hodnota $A(\overline{\mathbf{x}})$ je potom stejnou lineární kombinací funkčních hodnot (viz Poznámka 41) $A((1,0,1)) = (1,0)$, $A((0,1,1)) = (1,1)$ a $A((0,-1,1)) = (0,1)$. To jest :

$$A(\overline{\mathbf{x}}) = k_1(1,0) + k_2(1,1) + k_3(0,1). \tag{4.11}$$

Obor hodnot lineárního zobrazení je množina všech možných hodnot tohoto zobrazení. Všechny možné hodnoty obdržíme dosazením všech možných $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ do rovnice (4.11). Proto



$$\begin{aligned} H(A) &= \{A(\overline{\mathbf{x}}) \mid \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3\} = \\ &= \{k_1(1,0) + k_2(1,1) + k_3(0,1) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že každý vektor z $H(A)$ je lineární kombinací vektorů $(1,0)$, $(1,1)$ a $(0,1)$. To ale znamená, že vektory $(1,0)$, $(1,1)$ a $(0,1)$ mohou tvořit bázi oboru hodnot $H(A)$ - ovšem, jen pokud jsou lineárně nezávislé (viz definice báze). Ověříme, zda jsou nezávislé. (Dáme je do řádků matice a tu upravíme na schodový tvar. Pokud se žádný řádek nevynuluje, jsou nezávislé.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathbf{r_1} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathbf{r_2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bázi oboru hodnot tvoří zbývající nenulové řádky. To jest:

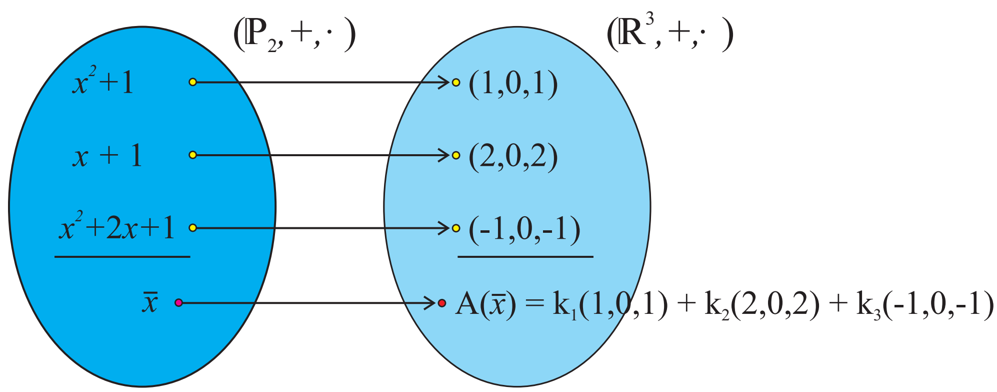
$$\underline{\underline{\text{Bází } H(A) \text{ je } \{(1,0);(0,1)\} \text{ a } dim H(A) = 2.}}$$

$$\underline{\underline{H(A) = \{k_1(1,0) + k_2(0,1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}}}$$

Povšimněme si, že vektory $(1,0)$ a $(0,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. To znamená, že $H(A) = \mathbb{R}^2$. Jinými slovy, toto lineární zobrazení zobrazuje na libovolný vektor z $\mathbb{R}^2$ nějaký vektor z $\mathbb{R}^3$. Ještě jinak, u tohoto zobrazení neexistuje vektor v $\mathbb{R}^2$ na který by se nezobrazoval žádný vektor z $\mathbb{R}^3$.

4. Lineární zobrazení $A : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami $A\left((x^2+1)\right) = (1,0,1)$, $A\left((x+1)\right) = (2,0,2)$, $A\left((x^2+2x+1)\right) = (-1,0,-1)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení :



Každé $A(\overline{\mathbf{x}})$ je lineární kombinací funkčních hodnot (viz Poznámka 41) $A\left((x^2+1)\right) = (1,0,1)$, $A\left((x+1)\right) = (2,0,2)$, $A\left((x^2+2x+1)\right) = (-1,0,-1)$. To jest :

$$A(\overline{\mathbf{x}}) = k_1(1,0,1) + k_2(2,0,2) + k_3(-1,0,-1). \tag{4.12}$$

Obor hodnot lineárního zobrazení je množina všech možných hodnot tohoto zobrazení. Všechny možné hodnoty obdržíme dosazením všech možných $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ do rovnice (4.12). Proto

$$\begin{aligned} H(A) &= \{A(\overline{\mathbf{x}}) \mid \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_2\} = \\ &= \{k_1(1,0,1) + k_2(2,0,2) + k_3(-1,0,-1) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že každý vektor z $H(A)$ je lineární kombinací vektorů $(1,0,1)$, $(2,0,2)$ a $(-1,0,-1)$. To ale znamená, že vektory $(1,0,1)$, $(2,0,2)$ a $(-1,0,-1)$ mohou tvořit bázi oboru hodnot $H(A)$ - ovšem, jen pokud jsou lineárně nezávislé (viz definice báze). Ověříme, zda jsou nezávislé. (Dáme je do řádků matice a tu upravíme na schodový tvar. Pokud se žádný řádek nevynuluje, jsou nezávislé.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Souřadnice bázových vektorů oboru hodnot tvoří zbývající nenulové řádky. To jest:

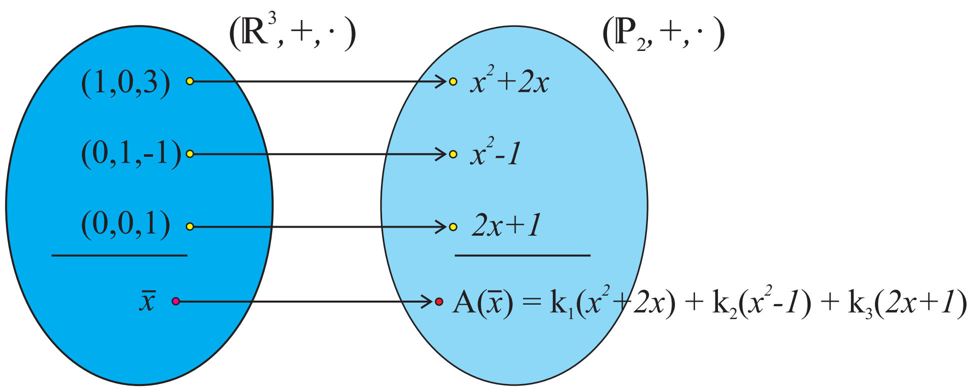
$$\underline{\underline{\text{Bází } H(A) \text{ je } \{(1,0,1)\} \text{ a } dim H(A) = 1.}}$$

$$\underline{\underline{H(A) = \{k_1(1,0,1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}}}$$

Povšimněme si, že vektor $(1,0,1)$ netvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. To znamená, že $H(A) \neq \mathbb{R}^3$. Jinými slovy, u tohoto zobrazení existuje vektor v $\mathbb{R}^3$ na který se nezobrazuje žádný vektor z $\mathbb{R}^3$.

5. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x+1$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení :



Každé $A(\overline{\mathbf{x}})$ je lineární kombinací funkčních hodnot (viz Poznámka 41) $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x+1$. To jest:

$$A(\overline{\mathbf{x}}) = k_1(x^2 + 2x) + k_2(x^2 - 1) + k_3(2x + 1). \tag{4.13}$$

Obor hodnot lineárního zobrazení je množina všech možných hodnot tohoto zobrazení. Všechny možné hodnoty obdržíme dosazením všech možných $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ do rovnice (4.13). Proto

$$\begin{aligned} H(A) &= \{A(\overline{\mathbf{x}}) \mid \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3\} = \\ &= \{k_1(x^2 + 2x) + k_2(x^2 - 1) + k_3(2x + 1) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Vidíme, že každý vektor z $H(A)$ je lineární kombinací vektorů (polynomů) x^2+2x, x^2-1 a $2x+1$. To ale znamená, že vektory x^2+2x, x^2-1 a $2x+1$ mohou tvořit bázi oboru hodnot $H(A)$ - ovšem, jen pokud jsou lineárně nezávislé (viz definice báze). Ověříme, zda jsou nezávislé. (Dáme jejich souřadnice (třeba vzhledem ke standardní bázi) do řádků matice a tu upravíme na schodový tvar. Pokud se žádný řádek nevynuluje, jsou nezávislé.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathbf{r_1} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Souřadnice bázových vektorů oboru hodnot tvoří zbývající nenulové řádky. To jest, bázovými vektory jsou polynomy x^2+2x a $-2x-1$. Proto:

$$\underline{\underline{\text{Bází } H(A) \text{ je } \{x^2+2x; -2x-1\} \text{ a } dim H(A) = 2.}}$$

$$\underline{\underline{H(A) = \{k_1(x^2+2x) + k_2(-2x-1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}}}$$

4.3.1 Obor hodnot lineárního zobrazení - příklady k procvičení

1. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,1)) = (1,1,1)$, $A((0,1,1)) = (1,1,-1)$, $A((0,-1,1)) = (3,3,-1)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{s(1,1,1) + t(0,0,-2) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1); (0,0,-2) \rangle$, jeho báze: $\{(1,1,1); (0,0,-2)\}$, $dim H(A) = 2$.

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x + 1$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{s(x^2+2x) + t(-2x-1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle x^2+2x; -2x-1 \rangle$, jeho báze: $\{x^2+2x; -2x-1\}$, $dim H(A) = 2$.

3. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je dáno hodnotami $f((1,1,1)) = (1,2,1)$, $f((1,-1,0)) = (0,0,1)$, $f((0,0,3)) = (1,2,-2)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{s(1,2,1) + t(0,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,1); (0,0,1) \rangle$, jeho báze: $\{(1,2,1); (0,0,1)\}$, $dim H(A) = 2$.

4. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je dáno hodnotami $f((1,2,1)) = (1,1,1)$, $f((1,-1,0)) = (0,1,2)$, $f((0,1,3)) = (0,1,3)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{s(1,1,1) + t(0,1,2) + k(0,0,1) \mid s,t,k \in \mathbb{R}\} =$
$= \langle (1,1,1); (0,1,2); (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$, jeho báze: $\{(1,1,1); (0,1,2); (0,0,1)\}$, $dim H(A) = 3$.

5. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (1,-1)$, $A((1,2,1)) = (0,1)$, $A((0,-1,5)) = (3,2)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{s(1,-1) + t(0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1); (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$, jeho báze: $\{(1,-1); (0,1)\}$, $dim H(A) = 2$.

6. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (-1,-2)$, $A((1,2,1)) = (1,2)$, $A((0,-1,5)) = (2,4)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{t(-1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,-2) \rangle$, jeho báze: $\{(-1,-2)\}$, $dim H(A) = 1$.

7. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A\left((1,1,0)\right) = (0,2)$, $A\left((1,0,1)\right) = (1,1)$, $A\left((0,0,1)\right) = (-1,2)$. Určete obor hodnot tohoto lineárního zobrazení, jeho bázi a dimenzi.

Řešení : $H(A) = \{s(1,1) + t(0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1);(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$, jeho báze: $\{(1,1);(0,1)\}$, $dim H(A) = 2$.

4.4 Matice lineárního zobrazení

Definice 45. *(*Matice lineárního zobrazení*) Nechť $A : U \mapsto V$ je lineární zobrazení, $E = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_m\}$ je báze vektorového prostoru $(U, +, \cdot)$ a $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{f}}_n\}$ je báze vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Maticí lineárního zobrazení A vzhledem k bázím E a F nazveme matici, jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $A(\overline{\mathbf{e}}_1)$, ..., $A(\overline{\mathbf{e}}_m)$ vzhledem k bázi F. Tuto matici značíme A_{EF} Symbolicky zapsáno:*

$$A_{EF} = \begin{pmatrix} \rotatebox{-90}{$A(\overline{\mathbf{e}}_1)_F$} & \ldots & \rotatebox{-90}{$A(\overline{\mathbf{e}}_m)_F$} \end{pmatrix}$$

Příklad 46. *Uvažujme například lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (-1,-2)$, $A((1,2,1)) = (1,2)$, $A((0,-1,5)) = (2,4)$, jako bázi na $\mathbb{R}^3$ můžeme zvolit $E = \{\overline{\mathbf{e}}_1 = (1,1,0); \overline{\mathbf{e}}_2 = (1,2,1); \overline{\mathbf{e}}_3 = (0,-1,5)\}$ a jako bázi F na $\mathbb{R}^2$ můžeme pro jednoduchost uvažovat standardní bázi. To jest, $F = S_2 = \{(1,0);(0,1)\}$. Určíme matici A_{EF}.*

Ze zadání je jasné, že

$$\begin{aligned} A(\overline{\mathbf{e}}_1) &= A((1,1,0)) = (-1,-2) \\ A(\overline{\mathbf{e}}_2) &= A((1,2,1)) = (1,2) \\ A(\overline{\mathbf{e}}_3) &= A((0,-1,5)) = (2,4) \end{aligned}$$

Souřadnice těchto vektorů vzhledem ke standardní bázi S_2 určíme snadno:

$$\begin{aligned} A(\overline{\mathbf{e}}_1)_{S_2} &= A((1,1,0))_{S_2} = (-1,-2)_{S_2} = (-1,-2) \\ A(\overline{\mathbf{e}}_2)_{S_2} &= A((1,2,1))_{S_2} = (1,2)_{S_2} = (1,2) \\ A(\overline{\mathbf{e}}_3)_{S_2} &= A((0,-1,5))_{S_2} = (2,4)_{S_2} = (2,4) \end{aligned}$$

Tyto souřadnice stačí uspořádat do sloupců a obdržíme matici A_{ES_2}:

$$A_{ES_2} = \begin{pmatrix} \rotatebox{-90}{$A(\overline{\mathbf{e}}_1)_{S_2}$} & \rotatebox{-90}{$A(\overline{\mathbf{e}}_2)_{S_2}$} & \rotatebox{-90}{$A(\overline{\mathbf{e}}_3)_{S_2}$} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A k čemu je matice lineárního zobrazení dobrá? Můžeme s její pomocí určovat hodnoty lineárního zobrazení (přesněji jejich souřadnice vzhledem k zadané bázi F).

Poznámka 47. *Jestliže $A : U \mapsto V$ je lineární zobrazení, $E = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \dots, \overline{\mathbf{e}}_m\}$ je báze vektorového prostoru $(U, +, \cdot)$ a $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \dots, \overline{\mathbf{f}}_n\}$ je báze vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, potom*

$$\overset{(n,1)}{A(\overline{\mathbf{x}})_F} = \overset{(n,m)}{A_{EF}} \overset{(m,1)}{\overline{\mathbf{x}}_E}$$

Symbolem $\overset{(n,1)}{A(\overline{\mathbf{x}})_F}$ míníme vektor $A(\overline{\mathbf{x}})_F$ zapsaný do sloupce a obdobně vektor souřadnic $\overline{\mathbf{x}}_E$ zapsaný do sloupce značíme $\overset{(m,1)}{\overline{\mathbf{x}}_E}$.

Výše uvedená rovnost plyne z toho, že zobrazení A je lineární. Jestliže

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1 \overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + k_2 \overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} + \dots + k_m \overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{m}},$$

(tuto skutečnost můžeme také zapsat tak, že $\overline{\mathbf{x}}_E = (k_1, k_2, \dots, k_m)$) potom (viz Poznámka 41)

$$A(\overline{\mathbf{x}}) = k_1 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}) + k_2 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}) + \dots + k_m A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{m}}).$$

Pro souřadnice $A(\overline{\mathbf{x}})$ vzhledem k bázi F potom musí platit

$$A(\overline{\mathbf{x}})_F = k_1 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})_F + k_2 A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}})_F + \dots + k_m A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{m}})_F.$$

Pokud tyto souřadnice budeme psát do sloupce místo do řádku, obdržíme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{x}})_F \end{pmatrix}}_{=\overset{(n,1)}{A(\overline{\mathbf{x}})_F}} = k_1 \begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})_F \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{e}}_{+})_F \end{pmatrix} + \dots + k_m \begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{m}})_F \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}})_F \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{e}}_{+})_F \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} A(\overline{\mathbf{e}}_{\mathbf{m}})_F \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{A_{EF}} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}}_{\overset{(m,1)}{\overline{\mathbf{x}}_E}}$$

1. Lineární zobrazení $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A\left((1,0,3)\right) = x^2 + 2x$, $A\left((0,1,-1)\right) = x^2 - 1$, $A\left((0,0,1)\right) = 2x + 1$. Určete jeho matici vzhledem ke standardním bázím $S_1 = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ a $S_2 = \{x^2;x;1\}$ a využijte ji k určení hodnoty $A\left((1,0,4)\right)$.

Řešení : Do matice zapíšeme zadané souřadnice vektorů z $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{R}^3$ a za čáru souřadnice vektorů (vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{P}_2$) na které se zobrazují:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tuto matici upravujeme pomocí řádkových úprav tak, aby vlevo od čáry vznikla matice jednotková:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3\mathbf{r_3} \\ +\mathbf{r_3} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Zjistili jsme tak, že vektor $(1,0,0)$ se zobrazuje na polynom $x^2 - 4x - 3$; vektor $(0,1,0)$ se zobrazuje na polynom x^2+2x a vektor $(0,0,1)$ se zobrazuje na polynom $2x + 1$.

Jinak řečeno, $A((1,0,0))_{S_2} = (1,-4,-3)$; $A((0,1,0))_{S_2} = (1,2,0)$ a $A((0,0,1))_{S_2} = (0,2,1)$.

Hledanou matici $A_{S_1S_2}$ proto obdržíme transponováním matice vpravo od čáry:

$$A_{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme souřadnice $A\left((1,0,4)\right)$ vzhledem ke standardní bázi S_2:

$$A\left((1,0,4)\right)_{S_2} = A_{S_1S_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že

$$\underline{\underline{A\left((1,0,4)\right) = x^2 + 4x + 1}}.$$

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x + 1$. Určete jeho matici A_{GH} vzhledem k bázím $G = \{(1,0,1); (0,1,1); (1,1,0)\}$ a $H = \{x^2 - 1; x + 2; x - 1\}$.

Řešení : Nejprve určíme matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím. Do matice zapíšeme zadané souřadnice vektorů z $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{R}^3$ a za čáru souřadnice vektorů (vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{P}_2$) na které se zobrazují:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tuto matici upravujeme pomocí řádkových úprav tak, aby vlevo od čáry vznikla matice jednotková:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3\mathbf{r_3} \\ +\mathbf{r_3} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Matici $A_{S_1S_2}$ pak obdržíme transponováním matice vpravo od čáry:

$$A_{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní vytvoříme matici A_G tak, že souřadnice vektorů z G vzhledem ke standardní bázi uspořádáme do sloupců a obdobně vytvoříme matici A_H tak, že souřadnice vektorů z H vzhledem ke standardní bázi uspořádáme do sloupců:

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Hledanou matici A_{GH} určíme pomocí vztahu:

$$A_{GH} = A_H^{-1} A_{S_1S_2} A_G$$

Určíme proto nejprve matici A_H^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -2\mathbf{r_2} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\mathbf{3} \\ \cdot\mathbf{3} \\ \cdot(-\mathbf{1}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) -\mathbf{r_3} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A_H^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dosazením do vzorce určíme:

$$A_{GH} = A_H^{-1} A_{S_1S_2} A_G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

4.4.1 Matice lineárního zobrazení - příklady k procvičení

1. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x + 1$. Určete jeho matici vzhledem ke standardním bázím $S_1 = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ a $S_2 = \{x^2; x; 1\}$.

Řešení :

$$A_{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ je dáno svými hodnotami $A((1,0,3)) = x^2 + 2x$, $A((0,1,-1)) = x^2 - 1$, $A((0,0,1)) = 2x + 1$. Určete jeho matici vzhledem k bázím $E = \{(2,0,1);(0,1,1);(0,1,3)\}$ a $H = \{x^2; x-1; x\}$.

Řešení :

$$A_{EH} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ -11 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dáno svými hodnotami $A((1,1,0)) = (0,2)$, $A((1,0,1)) = (1,1)$, $A((0,0,1)) = (-1,2)$. Určete jeho matici vzhledem ke standardním bázím $S_1 = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ a $S_2 = \{(1,0);(0,1)\}$.

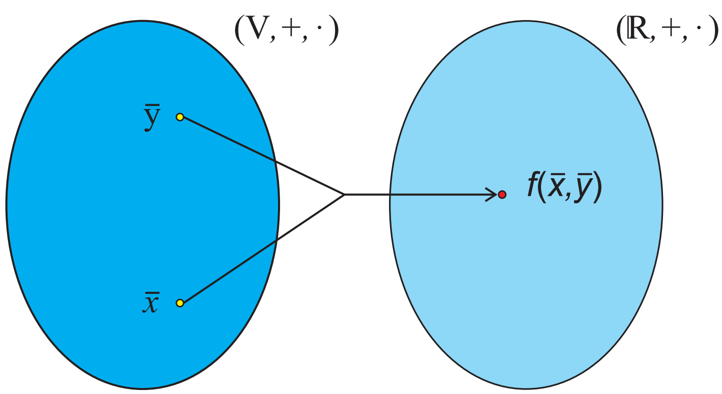
Řešení :

$$A_{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Kapitola 5

Bilineární formy

Bilineární forma je zobrazení, které dvojici vektorů přiřazuje číslo a navíc požadujeme, aby toto zobrazení mělo „hezké vlastnosti.“



Definice 48. *(*Bilineární forma*) Nechť* $(V, +, \cdot)$ *je vektorový prostor nad* $\mathbb{R}$*. Zobrazení* $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *nazveme bilineární formou na* $(V, +, \cdot)$ *právě thedy, když* $\forall\, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in V$ *a* $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\begin{array}{lrcl} 1.) & f(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) & = & f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}})+f(\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) \\ 2.) & f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}}) & = & f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})+f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}}) \\ 3.) & f(\alpha\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) & = & \alpha f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) \\ 4.) & f(\overline{\mathbf{x}},\alpha\overline{\mathbf{y}}) & = & \alpha f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) \end{array}$$

5.1 Matice bilineární formy

Poznámka 49. *Nechť* $E = \{\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_2}}, \ldots, \overline{\mathbf{e_n}}\}$ *je báze vektorového prostoru* $(V, +, \cdot)$, $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *jsou souřadnice vektoru* $\overline{\mathbf{x}}$ *vzhledem k bázi* E *a* $\overline{\mathbf{y}}_{\langle E\rangle} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *jsou souřadnice vektoru* $\overline{\mathbf{y}}$ *vzhledem k bázi* E*. Dá se dokázat, že* $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *je bilineární formou na* $(V, +, \cdot)$ *právě thedy, když* $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ *platí:*

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} f(\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_2}}) & \cdots & f(\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_n}}) \\ f(\overline{\mathbf{e_2}}, \overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_2}}, \overline{\mathbf{e_2}}) & \cdots & f(\overline{\mathbf{e_2}}, \overline{\mathbf{e_n}}) \\ \vdots & & & \\ f(\overline{\mathbf{e_n}}, \overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_n}}, \overline{\mathbf{e_2}}) & \cdots & f(\overline{\mathbf{e_n}}, \overline{\mathbf{e_n}}) \end{pmatrix}}_{\textit{označme } B_{f\langle E\rangle}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Rovnici (5.1) bychom mohli symbolicky zapsat následujícím způsobem:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} B_{f\langle E\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle E\rangle}.$$

Matici $B_{f\langle E\rangle}$ *nazýváme* **maticí bilineární formy** f *vzhledem k bázi* E*. Roznásobením matic na pravé straně rovnosti (5.1) obdržíme:*

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= f(\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_1}})x_1y_1 + f(\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_2}})x_1y_2 + \cdots + f(\overline{\mathbf{e_1}}, \overline{\mathbf{e_n}})x_1y_n + \\ &+ f(\overline{\mathbf{e_2}}, \overline{\mathbf{e_1}})x_2y_1 + f(\overline{\mathbf{e_2}}, \overline{\mathbf{e_2}})x_2y_2 + \cdots + f(\overline{\mathbf{e_2}}, \overline{\mathbf{e_n}})x_2y_n + \\ &\vdots \\ &+ f(\overline{\mathbf{e_n}}, \overline{\mathbf{e_1}})x_ny_1 + f(\overline{\mathbf{e_n}}, \overline{\mathbf{e_2}})x_ny_2 + \cdots + f(\overline{\mathbf{e_n}}, \overline{\mathbf{e_n}})x_ny_n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

1. Bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_3y_2 - 5x_3y_3,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$.

a) Určete podle předpisu $f((2, -1, 1); (1, 0, 3))$.

V tomto případě je $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$ a $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) =$

$(1,0,3)$. Dosazením do předpisu obdržíme:

$$\begin{aligned} f\left((2,-1,1);(1,0,3)\right) &= 3\cdot 2\cdot 1+2\cdot 2\cdot 0-(-1)\cdot 0+1\cdot 0-5\cdot 1\cdot 3= \\ &= 6+0-0+0-15=-9 \end{aligned}$$

b) Určete matici bilineární formy f vzhledem ke standardní bázi $S=\{\overline{\mathbf{e_1}}=(1,0,0);\overline{\mathbf{e_2}}=(0,1,0);\overline{\mathbf{e_3}}=(0,0,1)\}$.

Ze zadaného předpisu a z (5.2) plyne, že $f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_1}})=3$, $f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_2}})=2$, $f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_2}})=-1$, $f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_2}})=1$ a $f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_3}})=-5$. Proto

$$\underline{\underline{B_{f\langle S\rangle}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}}}$$

c) Určete $f\left((1,1,3);(0,-1,1)\right)$ pomocí matice $B_{f\langle S\rangle}$.

Nejprve určíme souřadnice vektorů $(1,1,3)$ a $(0,-1,1)$ vzhledem k bázi S:

$$\begin{aligned} (1,1,3)_{\langle S\rangle} &= (1,1,3),\ \text{neboť} \\ (1,1,3) &= 1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)+3\cdot(0,0,1) \\ (0,-1,1)_{\langle S\rangle} &= (0,-1,1),\ \text{neboť} \\ (0,-1,1) &= 0\cdot(1,0,0)-1\cdot(0,1,0)+1\cdot(0,0,1) \end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned} f\left((1,1,3);(0,-1,1)\right) &= (1,1,3)_{\langle S\rangle}B_{f\langle S\rangle}(0,-1,1)^T_{\langle S\rangle}= \\ &= (1,1,3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}= \\ &= (3,4,-15)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{-19}} \end{aligned}$$

d) Určete matici bilineární formy f vzhledem k bázi $E = \{\overline{\mathbf{e_1}} = (1,0,1); \overline{\mathbf{e_2}} = (0,1,2); \overline{\mathbf{e_3}} = (0,-1,1)\}$.

$$B_{f\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_2}}) & f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_3}}) \\ f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_2}}) & f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_3}}) \\ f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_2}}) & f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_3}}) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{bazové vektory v řádcích}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{B_{f\langle S\rangle}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{bazové vektory ve sloupcích}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -7 & -8 \\ -10 & -19 & -11 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}}}$$

e) Určete $f\left((1,1,3);(0,-1,1)\right)$ pomocí matice $B_{f\langle E\rangle}$.

Nejprve určíme souřadnice vektorů $(1,1,3)$ a $(0,-1,1)$ vzhledem k bázi $E = \{\overline{\mathbf{e_1}} = (1,0,1); \overline{\mathbf{e_2}} = (0,1,2); \overline{\mathbf{e_3}} = (0,-1,1)\}$:

$$\begin{aligned} (1,1,3)_{\langle E\rangle} &= (1,1,0), \text{ neboť} \\ (1,1,3) &= 1\cdot(1,0,1) + 1\cdot(0,1,2) + 0\cdot(0,-1,1) \\ (0,-1,1)_{\langle E\rangle} &= (0,0,1), \text{ neboť} \\ (0,-1,1) &= 0\cdot(1,0,1) + 0\cdot(0,1,2) + 1\cdot(0,-1,1) \end{aligned}$$

Proto

$$
\begin{aligned}
f\left((1,1,3);(0,-1,1)\right) &= (1,1,3)_{\langle E\rangle} B_{f\langle E\rangle} (0,-1,1)^T_{\langle E\rangle} = \\
&= (1,1,0) \begin{pmatrix} -2 & -7 & -8 \\ -10 & -19 & -11 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= (-12,-26,-19) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-19}}
\end{aligned}
$$

Srovnejte s c)! Muselo vyjít totéž!

2. Bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 5x_1y_1 + 3x_1y_3 - 2x_2y_2 + x_3y_1 - x_3y_3,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$. Nalezněte matici bilineární formy f vzhledem ke standardní bázi $S = \{\overline{\mathbf{e_1}} = (1,0,0); \overline{\mathbf{e_2}} = (0,1,0); \overline{\mathbf{e_3}} = (0,0,1)\}$. Určete $f\left((1,1,0);(0,1,1)\right)$ pomocí matice $B_{f\langle S\rangle}$.

Řešení : Matici vzhledem ke standardní bázi sestavíme z koeficientů před x_iy_j v předpisu bilineární formy. Protože $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 5x_1y_1 + 3x_1y_3 - 2x_2y_2 + x_3y_1 - x_3y_3$, bude v prvním řádku v prvním sloupci číslo 5, v prvním řádku třetím sloupci číslo 3, atd. Zbývající pozice doplníme nulami:

$$\underline{\underline{B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Hodnotu $f\left((1,1,0);(0,1,1)\right)$ určíme ze vztahu

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}_{\langle S\rangle} B_{f\langle S\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle S\rangle}.$$

V našem případě proto

$$f((1,1,0);(0,1,1)) = (1,1,0) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (5,-2,3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}.$$

3. Bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = -x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_3y_1 - x_3y_2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$. Nalezněte matici bilineární formy f vzhledem ke standardní bázi $S = \{\overline{\mathbf{e_1}} = (1,0,0); \overline{\mathbf{e_2}} = (0,1,0); \overline{\mathbf{e_3}} = (0,0,1)\}$. Určete $f\left((1,1,1);(2,0,-1)\right)$ pomocí matice $B_{f\langle S\rangle}$.

Řešení : Matici vzhledem ke standardní bázi sestavíme z koeficientů před x_iy_j v předpisu bilineární formy. Protože $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = -x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_3y_1 - x_3y_2$, bude v prvním řádku v prvním sloupci číslo -1, v prvním řádku druhém sloupci číslo 1, atd. Zbývající pozice doplníme nulami:

$$\underline{\underline{B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Hodnotu $f\left((1,1,1);(2,0,-1)\right)$ určíme ze vztahu

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}_{\langle S\rangle} B_{f\langle S\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle S\rangle}.$$

V našem případě proto

$$f((1,1,1);(2,0,-1)) = (1,1,1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,0,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}.$$

4. Bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$. Nalezněte matici bilineární formy f vzhledem k bázi $E = \{\overline{\mathbf{e_1}} = (1,1,3); \overline{\mathbf{e_2}} = (2,1,0); \overline{\mathbf{e_3}} = (3,0,0)\}$.

Řešení : Nejprve určíme matici vzhledem ke standardní bázi. Sestavíme ji z koeficientů před x_iy_j v předpisu bilineární formy. Protože $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$, bude v prvním řádku v druhém sloupci číslo 1, v prvním řádku třetím sloupci číslo 1, atd. Zbývající pozice doplníme nulami:

$$\underline{\underline{B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Potom:

$$B_{f\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_2}}) & f(\overline{\mathbf{e_1}},\overline{\mathbf{e_3}}) \\ f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_2}}) & f(\overline{\mathbf{e_2}},\overline{\mathbf{e_3}}) \\ f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_1}}) & f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_2}}) & f(\overline{\mathbf{e_3}},\overline{\mathbf{e_3}}) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{bazové vektory v řádcích}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B_{f\langle S\rangle}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{bazové vektory ve sloupcích}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 24 \\ 6 & -1 & -3 \\ 12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Bilineární forma $f : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem:

$$f(p(x), r(x)) = 2p(1)r(0) - 3p(2)r(-1)$$

Nalezněte matici bilineární formy f vzhledem ke standardní bázi $S = \{\overline{\mathbf{e_1}} = x^2; \overline{\mathbf{e_2}} = x; \overline{\mathbf{e_3}} = 1\}$. Určete $f\,(x^2 - x + 3; x + 1)$ pomocí matice $B_{f\langle S\rangle}$.

Řešení : Označme $p(x) = x_1x^2 + x_2x + x_3$ a $r(x) = y_1x^2 + y_2x + y_3$. Toto označení jsme zvolili proto, aby $p_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$ a $r_{\langle E\rangle} = (y_1, y_2, y_3)$. Nyní můžeme určit předpis pomocí souřadnic x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned} f(p(x), r(x)) &= 2p(1)r(0) - 3p(2)r(-1) \\ &= 2(x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 1 + x_3)(y_1 \cdot 0^2 + y_2 \cdot 0 + y_3) \\ &\quad -3(x_1 \cdot 2^2 + x_2 \cdot 2 + x_3)(y_1 \cdot (-1)^2 + y_2 \cdot (-1) + y_3) = \\ &= (2x_1 + 2x_2 + 2x_3)(y_3) + \\ &\quad (-12x_1 - 6x_2 - 3x_3)(y_1 - y_2 + y_3) = \\ &= 2x_1y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_3 + \\ &\quad (-12x_1y_1 + 12x_1y_2 - 12x_1y_3) + \\ &\quad (-6x_2y_1 + 6x_2y_2 - 6x_2y_3) + \\ &\quad (-3x_3y_1 + 3x_3y_2 - 3x_3y_3) = \\ &= (-12x_1y_1 + 12x_1y_2 - 10x_1y_3) + \\ &\quad (-6x_2y_1 + 6x_2y_2 - 4x_2y_3) + \\ &\quad (-3x_3y_1 + 3x_3y_2 - x_3y_3) = \end{aligned}$$

Matici vzhledem ke standardní bázi sestavíme z koeficientů před x_iy_j v předpisu bilineární formy. Zbývající pozice doplníme nulami:

$$\underline{\underline{B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} -12 & 12 & -10 \\ -6 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Hodnotu $f\left(x^2 - x + 3; x + 1\right)$ určíme ze vztahu

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}_{\langle S\rangle} B_{f\langle S\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle S\rangle}.$$

V našem případě proto

$$f\left(x^2 - x + 3; x + 1\right) = (1, -1, 3) \begin{pmatrix} -12 & 12 & -10 \\ -6 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-15, 15, -9) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{6}}.$$

Poznamenejme, že hodnotu $f\left(x^2 - x + 3; x + 1\right)$ můžeme snadno určit přímo z předpisu:

$$f\left(\underbrace{x^2 - x + 3}_{=p(x)}; \underbrace{x + 1}_{=r(x)}\right) = 2p(1)r(0) - 3p(2)r(-1) = 2(1^2 - 1 + 3)(0 + 1) - 3(2^2 - 2 + 3)(-1 + 1) = 6.$$

6. Bilineární forma $f : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem:

$$f(p(x), r(x)) = p(1)r(0) - p(0)r(1)$$

Nalezněte matici bilineární formy f vzhledem k bázi $G = \{\overline{g_1} = x^2 - x; \overline{\mathbf{e_2}} = x + 1; \overline{\mathbf{e_3}} = x + 2\}$.

Řešení : Označme $p(x) = x_1x^2 + x_2x + x_3$ a $r(x) = y_1x^2 + y_2x + y_3$. Toto označení jsme zvolili proto, aby $p_{\langle S\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$ a $r_{\langle S\rangle} = (y_1, y_2, y_3)$, kde $S = \{\overline{\mathbf{e_1}} = x^2; \overline{\mathbf{e_2}} = x; \overline{\mathbf{e_3}} = 1\}$ je standardní báze. Nyní můžeme určit předpis pomocí souřadnic x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3:

$$\begin{aligned}
f(p(x), r(x)) &= p(1)r(0) - p(0)r(1) \\
&= (x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 1 + x_3)(y_1 \cdot 0^2 + y_2 \cdot 0 + y_3) \\
&\quad -(x_1 \cdot 0^2 + x_2 \cdot 0 + x_3)(y_1 \cdot 1^2 + y_2 \cdot 1 + y_3) = \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)(y_3) - x_3(y_1 + y_2 + y_3) = \\
&= x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_3 = \\
&= x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2
\end{aligned}$$

Matici vzhledem ke standardní bázi sestavíme z koeficientů před x_iy_j v předpisu bilineární formy. Zbývající pozice doplníme nulami:

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici vzhledem k bázi G pak obdržíme jako součin matic:

$$
\begin{aligned}
B_{f\langle G\rangle} &= \begin{pmatrix} f(\overline{g_1},\overline{g_1}) & f(\overline{g_1},\overline{g_2}) & f(\overline{g_1},\overline{g_3}) \\ f(\overline{g_2},\overline{g_1}) & f(\overline{g_2},\overline{g_2}) & f(\overline{g_2},\overline{g_3}) \\ f(\overline{g_3},\overline{g_1}) & f(\overline{g_3},\overline{g_2}) & f(\overline{g_3},\overline{g_3}) \end{pmatrix} = \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{souř. báz. vektorů v řádcích}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_{f\langle S\rangle}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{souř. báz. vektorů ve sloupcích}} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}
\end{aligned}
$$

5.1.1 Matice bilineární formy - příklady k procvičení

1. Určete matici bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_2 + x_3y_3$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Určete matici bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_2 + x_3y_3$$

a to vzhledem k bázi $G = \{(1,0,1), (0,1,-1), (0,1,1)\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle G\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Určete matici bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_3$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Určete matici bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_3$$

a to vzhledem k bázi $G = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,2,1)\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle G\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -4 & 6 & 6 \\ -6 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

5. Určete matici bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(0)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Určete matici bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(0)$$

a to vzhledem k bázi $H = \{x^2 - x, x^2 + 2x, -1\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle H\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Určete matici bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(1)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Určete matici bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(1)$$

a to vzhledem k bázi $K = \{x^2 + x + 1, x^2, 1\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle K\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 12 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Určete matici bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(1) + g(0)h(0)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Určete matici bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(1) + g(2)h(0)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$B_{f\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.2 Symetrická a antisymetrická část bilineární formy

Bilineární forma je obecně zobrazení, do nějž dosazujeme dva vektory z nějakého vektorového prostoru a vyjde reálné číslo (uvažujeme vektorové prostory nad tělesem reálných čísel, obecně by vyšel nějaký skalár). Například vezměme nějakou bilineární formu, kde pro dané vektory $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$ vyjde $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 5$. Pokud ale změníme pořadí dosazovaných vektorů, hodnota $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ nemusí být 5!

Existují však i bilineární formy u nichž na pořadí $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ nezáleží, a také bilineární formy u nichž změna pořadí $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ způsobí jen změnu znaménka výsledku. Takovým budeme říkat symetrická, respektive antisymetrická bilineární forma.

Definice 50. *(*Symetrická bilineární forma*) Bilineární formu $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ nazveme symetrickou bilineární formou právě když $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ platí:*

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}).$$

Definice 51. *(*Antisymetrická bilineární forma*) Bilineární formu $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ nazveme symetrickou bilineární formou právě když $\forall \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ platí:*

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = -f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}).$$

Jak ale poznat, zda je daná bilineární forma symetrická, antisymetrická, nebo ani jedno z toho?

Jednou z možností je vyjít z definice. Uvažujme například bilineární formu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1 y_1.$$

Potom

$$f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}) = y_1 x_1.$$

Ale násobení reálných čísel je komutativní, takže $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 = y_1 x_1 = f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$. Můžeme proto říci, že tato bilineární forma je symetrická.

O tom, zda je daná bilineární forma symetrická či antisymetrická ale můžeme rozhodnout i podle její matice (vzhledem k libovolné bázi). Zavedeme pro tyto účely pojem symetrická a antisymetrická matice.

Definice 52. *(*Symetrická matice*) Symetrickou maticí nazveme libovolnou čtvercovou matici A splňující:*

$$A = A^T$$

Příklad 53. *Například matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

je symetrická. Všimněme si, že čísla v symetrické matici jsou v ní umístěna symetricky podle hlavní diagonály.

Definice 54. *(*Antisymetrická matice*) Antisymetrickou maticí nazveme libovolnou čtvercovou matici A splňující:*

$$A = -A^T$$

Příklad 55. *Například matice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

je antisymetrická. Všimněme si, že čísla v antisymetrické matici jsou v ní umístěna symetricky podle hlavní diagonály, ale s opačnými znaménky. Navíc matice, která by na diagonále měla nějaké nenulové číslo, by jistě nebyla antisymetrická.

Věta 56. *Nechť $B_{f\langle E\rangle}$ je matice bilineární formy $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ vzhledem k bázi E vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$. Potom*

1.) f je symetrická bilineární forma právě thedy, když $B_{f\langle E\rangle}$ je symetrická matice.

2.) f je antisymetrická bilineární forma právě thedy, když $B_{f\langle E\rangle}$ je antisymetrická matice.

Důkaz. Dokážeme jen první tvrzení. Důkaz druhého by byl analogický. Využijeme značení a poznatky uvedené v Poznámce 49.

Kdyby matice $B_{f\langle E\rangle}$ nebyla symetrická, znamenalo by to, že existují vektory $\overline{\mathbf{e_i}}, \overline{\mathbf{e_j}} \in E$, kde $i \neq j$ takové, že $f(\overline{\mathbf{e_i}}, \overline{\mathbf{e_j}}) \neq f(\overline{\mathbf{e_j}}, \overline{\mathbf{e_i}})$. To by ale znamenalo, že f není symetrická bilineární forma.

Symetrie matice $B_{f\langle E\rangle}$ je tedy nutnou podmínkou pro to, aby f byla symetrickou bilineární formou.

Ukážeme, že jde i o podmínku postačující. Předpokládejme, že f je symetrická bilineární forma. Potom pro libovolné $i, j \in \{1, \ldots, n\} : f(\overline{\mathbf{e_i}}, \overline{\mathbf{e_j}}) = f(\overline{\mathbf{e_j}}, \overline{\mathbf{e_i}})$

Proto

$$
\begin{aligned}
f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{\mathbf{e_i}}, \overline{\mathbf{e_j}}) x_i y_j = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{\mathbf{e_j}}, \overline{\mathbf{e_i}}) x_i y_j = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{\mathbf{e_j}}, \overline{\mathbf{e_i}}) y_j x_i = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\mathbf{e_j}}, \overline{\mathbf{e_i}}) y_j x_i = \\
&= f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})
\end{aligned}
$$

□

Následující Věta říká, že každou bilineární formu lze zapsat jako součet dvou bilineárních forem - jedné symetrické a druhé antisymetrické.

Věta 57. *Nechť $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ je bilineární forma. Potom existuje symetrická bilineární forma $f_s : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ a antisymetrická bilineární forma $f_a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ taková, že pro každé $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V$ platí:*

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$$

Bilineární formu f_s z Věty 57 nazýváme symetrickou částí *bilineární formy f a bilineární formu f_a z Věty 57 nazýváme* antisymetrickou částí *bilineární formy f.*

Důkaz. Snadno se ověří, že zobrazení f_s a f_a definovaná rovnostmi

$$\begin{aligned} f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) \\ f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) - f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

jsou symetrická, respektive antisymetrická bilineární forma a $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$.

□

Předpis symetrické a antisymetrické části zadané bilineární formy f dokážeme snadno určit pomocí rovnic (5.3), známe-li předpis f.

Můžeme ale mít trochu jiný úkol. Řekněme, že známe matici bilineární formy f a chceme určit matice její symetrické a antisymetrické části f_s a f_a (vzhledem ke stejné bázi).

Pro tyto účely je třeba si rozmyslet, že výsledkem součtu matice a matice transponované je matice symetrická a že rozdíl matice a matice transponované je matice antisymetrická.

1. Dokažte, že pro libovolnou matici A platí, že matice $A + A^T$ je matice symetrická.

Řešení :

Z druhého tvrzení Poznámky 14 a z komutativity sčítání matic plyne, že $\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$.

2. Dokažte, že pro libovolnou matici A platí, že matice $A - A^T$ je matice antisymetrická.

Řešení :

Z prvního a druhého tvrzení Poznámky 14 a z komutativity sčítání matic plyne, že
$\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -(A - A^T)$.

3. A ještě jeden příklad navíc. Dokažte, že pro libovolnou matici A platí, že matice AA^T i matice A^TA je matice symetrická.

Řešení :

Ze třetího tvrzení Poznámky 14 v podkapitole 1.5 plyne, že

$\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T$, obdobně $\left(A^TA\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^TA$.

Pokračujme v hledání matic symetrické a antisymetrické části zadané bilineární formy f. Nechť $B_{f\langle S\rangle}$ je matice této bilineární formy vzhledem k bázi S. Označme

$$B_{f_s\langle S\rangle} = \tfrac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle} + B^T_{f\langle S\rangle}\right) \quad \text{a} \quad B_{f_a\langle S\rangle} = \tfrac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle} - B^T_{f\langle S\rangle}\right) \tag{5.4}$$

Podle výše uvedených tvrzení je matice $B_{f_s\langle S\rangle}$ symetrická (i po vynásobení součtu $A + A^T$ jednou polovinou bude výsledná matice symetrická). Jedná se proto o matici nějaké symetrické bilineární formy f_s vzhledem k bázi S.

Obdobně matice $B_{f_a\langle S\rangle}$ je antisymetrická (i po vynásobení rozdílu $A - A^T$ jednou polovinou bude výsledná matice antisymetrická). Jedná se proto o matici nějaké antisymetrické bilineární formy f_a vzhledem k bázi S.

Navíc

$$B_{f_s\langle S\rangle} + B_{f_a\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle} + B^T_{f\langle S\rangle}\right) + \frac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle} - B^T_{f\langle S\rangle}\right) = B_{f\langle S\rangle}.$$

To ale znamená, že

$$\begin{aligned}
f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} B_{f_s\langle E\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle E\rangle} + \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} B_{f_a\langle E\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle E\rangle} = \\
&= \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} \left(B_{f_s\langle E\rangle} + B_{f_a\langle E\rangle}\right) \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle E\rangle} = \\
&= \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} B_{f\langle E\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle E\rangle} = \\
&= f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})
\end{aligned}$$

Poznámka 58. *Symetrickou a antisymetrickou část zadané bilineární formy f můžeme určit z rovnic*

$$\begin{aligned} f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) \\ f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) - f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Poté můžeme najít jejich matice.

Symetrickou a antisymetrickou část zadané bilineární formy f ale můžeme najít i tak, že nalezneme jejich matice podle vzorců

$$B_{f_s\langle S\rangle} = \tfrac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle} + B^T_{f\langle S\rangle}\right) \quad a \quad B_{f_a\langle S\rangle} = \tfrac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle} - B^T_{f\langle S\rangle}\right) \tag{5.6}$$

a z matic $B_{f_s\langle S\rangle}$ a $B_{f_a\langle S\rangle}$ pak odvodíme předpisy f_s a f_a.

Postupy popsané v Poznámce 58 ukážeme na následujících příkladech.

1. Nalezněte symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 - 5x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_3$$

Řešení :

První postup. Nejprve určíme $f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right)$:

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= 3x_1y_1 + 4x_1y_2 - 5x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_3 \\ f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}) &= 3y_1x_1 + 4y_1x_2 - 5y_2x_2 + y_2x_3 + y_3x_3 \\ \hline f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}) &= 6x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 10x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 \\ \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) &= 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2 + \tfrac{1}{2}x_2y_3 + \tfrac{1}{2}x_3y_2 + x_3y_3 \\ f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \underline{\underline{3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2 + \tfrac{1}{2}x_2y_3 + \tfrac{1}{2}x_3y_2 + x_3y_3}} \end{aligned}$$

Dále určíme $f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) - f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right)$:

$$\begin{array}{rcl} f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) &=& 3x_1y_1+4x_1y_2-5x_2y_2+x_2y_3+x_3y_3 \\ f(\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}}) &=& 3y_1x_1+4y_1x_2-5y_2x_2+y_2x_3+y_3x_3 \\ \hline f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})-f(\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}}) &=& 4x_1y_2-4x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2 \\ \frac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})+f(\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}})\right) &=& 2x_1y_2-2x_2y_1+\frac{1}{2}x_2y_3-\frac{1}{2}x_3y_2 \\ f_a(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) &=& \underline{\underline{2x_1y_2-2x_2y_1+\frac{1}{2}x_2y_3-\frac{1}{2}x_3y_2}} \end{array}$$

Druhý postup:

Snadno určíme matici $B_{f\langle S\rangle}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Potom

$$\begin{aligned} B_{f_s\langle S\rangle} &= \frac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle}+B^T_{f\langle S\rangle}\right)= \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Odtud $f_s(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=\underline{\underline{3x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1-5x_2y_2+\frac{1}{2}x_2y_3+\frac{1}{2}x_3y_2+x_3y_3}}$.

A dále

$$\begin{aligned} B_{f_a\langle S\rangle} &= \frac{1}{2}\left(B_{f\langle S\rangle}-B^T_{f\langle S\rangle}\right)= \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & -0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Odtud $f_a(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=\underline{\underline{2x_1y_2-2x_2y_1+\frac{1}{2}x_2y_3-\frac{1}{2}x_3y_2}}$.

Zkouška:

$$\begin{aligned} f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= (3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2 + \tfrac{1}{2}x_2y_3 + \tfrac{1}{2}x_3y_2 + x_3y_3) + \\ &\quad +(2x_1y_2 - 2x_2y_1 + \tfrac{1}{2}x_2y_3 - \tfrac{1}{2}x_3y_2) = \\ &= 3x_1y_1 + 4x_1y_2 - 5x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_3 = f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

2. Určete symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(3)h(4).$$

Řešení : Předpis symetrické a antisymetrické části bilineární formy f můžeme nalézt pomocí vztahů:

$$\begin{aligned} f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) \\ f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \tfrac{1}{2}\left(f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) - f(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})\right) \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme:

$$\begin{aligned} f_s(g(x), h(x)) &= \tfrac{1}{2}(f(g(x), h(x)) + f(h(x), g(x))) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}g(3)h(4) + \tfrac{1}{2}h(3)g(4)}} \\ f_a(g(x), h(x)) &= \tfrac{1}{2}(f(g(x), h(x)) - f(h(x), g(x))) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}g(3)h(4) - \tfrac{1}{2}h(3)g(4)}} \end{aligned}$$

5.2.1 Symetrická a antisymetrická část bilineární formy - příklady k procvičení

1. Nalezněte matice symetrické a antisymetrické části bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_2 + x_3y_3$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{B_{f_s\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{a} \quad \underline{\underline{B_{f_a\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}}}$$

2. Nalezněte symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_2y_3 - 2x_3y_2 + x_3y_3$$

.

Řešení :

$$f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \underline{\underline{x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 - \tfrac{1}{2}x_2y_3 - \tfrac{1}{2}x_3y_2 + x_3y_3}}$$

$$f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \underline{\underline{x_1y_2 - x_2y_1 + \tfrac{3}{2}x_2y_3 - \tfrac{3}{2}x_3y_2}}$$

3. Nalezněte matice symetrické a antisymetrické části bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_3 - x_2y_2$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{B_{f_s\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{B_{f_a\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

4. Nalezněte symetrickou a antisymetrickou části bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_3 - x_2y_2$$

Řešení :

$$\begin{aligned} f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \underline{\underline{3x_1y_1 + x_1y_3 - x_2y_2 + x_3y_1}} \\ f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \underline{\underline{x_1y_3 - x_3y_1}} \end{aligned}$$

5. Určete matici symetrické a antisymetrické části bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_3$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{B_{f_s\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{B_{f_a\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}}}$$

6. Určete symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_3 - 2x_3y_1 + x_3y_3.$$

Řešení :

$$\begin{aligned} f_s(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x_1y_2 - x_1y_3 + \tfrac{1}{2}x_2y_1 + \tfrac{5}{2}x_2y_3 - x_3y_1 + \tfrac{5}{2}x_3y_2 + x_3y_3}} \\ f_a(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \underline{\underline{\tfrac{5}{2}x_1y_2 + x_1y_3 - \tfrac{5}{2}x_2y_1 + \tfrac{5}{2}x_2y_3 - x_3y_1 - \tfrac{5}{2}x_3y_2}} \end{aligned}$$

7. Určete matici symetrické a antisymetrické části bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(0)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{B_{f_s\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{B_{f_a\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

8. Určete symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(0).$$

Řešení :

$$f_s(g(x), h(x)) = \tfrac{1}{2}(f(g(x), h(x)) + f(h(x), g(x))) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}g(2)h(0) + \tfrac{1}{2}h(2)g(0)}}$$

$$f_a(g(x), h(x)) = \tfrac{1}{2}(f(g(x), h(x)) - f(h(x), g(x))) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}g(2)h(0) - \tfrac{1}{2}h(2)g(0)}}$$

9. Určete matici symetrické a antisymetrické části bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(1)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$\underline{\underline{B_{f_s\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \frac{5}{2} \\ 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{B_{f_a\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}}$$

10. Určete symetrickou a antisymetrickou část bilineární formy $f : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, g(x), h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$f(g(x), h(x)) = g(2)h(1).$$

Řešení :

$$\begin{aligned} f_s(g(x), h(x)) &= \tfrac{1}{2}(f(g(x), h(x)) + f(h(x), g(x))) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}g(2)h(1) + \tfrac{1}{2}h(2)g(1)}} \\ f_a(g(x), h(x)) &= \tfrac{1}{2}(f(g(x), h(x)) - f(h(x), g(x))) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}g(2)h(1) - \tfrac{1}{2}h(2)g(1)}} \end{aligned}$$

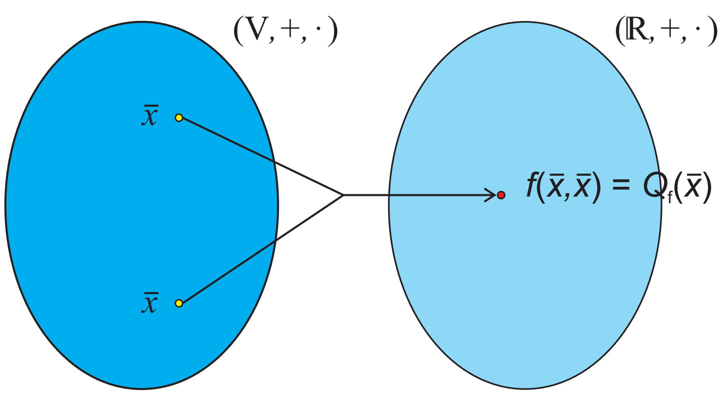
Kapitola 6

Kvadratické formy

6.1 Matice kvadratické formy

Definice 59. *(*Kvadratická forma*) Nechť $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ je bilineární formou na $(V, +, \cdot)$. Kvadratickou formou příslušející k bilineární formě f nazveme zobrazení $Q_f : V \mapsto \mathbb{R}$ dané pro každé $\overline{\mathbf{x}} \in V$ předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}).$$



Poznámka 60. *Do bilineární formy f „dosazujeme” vektory $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ (mohou být různé). Kvadratickou formu „vyrobíme” z f tak, že do ní budeme „dosazovat” vždy dva stejné vektory, to jest $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{x}}$.*

Příklad 61. *Určete kvadratickou formu Q_f příslušející k bilineární formě $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, která je pro každé $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem:*

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_2 - x_3y_3.$$

Řešení : *Podle definice je* $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})$. *Proto předpis* f *upravíme tak, že* $\overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}}$. *To znamená, že* $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ *a* $y_2 = x_2$. *To jest,*

$$
\begin{aligned}
Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = f(\overline{\mathbf{x}}, \underbrace{\overline{\mathbf{y}}}_{=\overline{\mathbf{x}}}) &= x_1 \underbrace{y_1}_{x_1} + 2x_1 \underbrace{y_2}_{x_2} - x_2 \underbrace{y_1}_{x_1} + 5x_2 \underbrace{y_2}_{x_2} + x_3 \underbrace{y_2}_{x_2} - x_3 \underbrace{y_3}_{x_3} = \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_1 + 5x_2^2 + x_3x_2 - x_3^2 = \\
&= \underline{\underline{x_1^2 + x_2x_1 + 5x_2^2 + x_3x_2 - x_3^2.}}
\end{aligned}
$$

Příklad 62. *Určete bilineární formu* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *k níž přísluší kvadratická forma* Q_f, *která je pro každé* $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_2.$$

Řešení : *Postupujeme opačným směrem než v předchozím příkladu. Například kvadratický člen* x_1^2 *jistě „vznikl” z* x_1y_1 *v pedpisu bilineární formy,* $3x_2^2$ *z* $3x_2y_2$ *a* $-5x_3^2$ *z* $-5x_3y_3$.

U smíšeného členu $6x_1x_2$ *to ale tak jednoznačné není. Mohl vzniknout ze členu* $6x_1y_2$, *nebo* $6y_1x_2$, *ale třeba i ze dvojice členů* $2x_1y_2 + 4x_2y_1$. *Řešení je proto nekonečně mnoho. Tato kvadratická forma mohla vzniknout například z bilineárních forem*

$$
\begin{aligned}
f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= x_1y_1 + 3x_2y_2 - 5x_3y_3 + 6x_1y_2, \\
&\textit{nebo} \\
f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= x_1y_1 + 3x_2y_2 - 5x_3y_3 + 6y_1x_2, \\
&\textit{nebo} \\
f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= x_1y_1 + 3x_2y_2 - 5x_3y_3 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 \\
&\textit{nebo} \\
f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= x_1y_1 + 3x_2y_2 - 5x_3y_3 + 2,5x_1y_2 + 3,5x_2y_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Všimněme si ale, že mezi těmito bilineárními formami je jen jediná, která je symetrická! Připomeňme, že to je taková bilineární forma, která má symetrickou matici. Taková bilineární forma má ve svém předpisu stejný koeficient před x_iy_j *jako před* x_jy_i. *Zadaná kvadratická forma proto přísluší symetrické bilineární formě*

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 - 5x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1$$

1. Určete kvadratickou formu Q_f příslušející k bilineární formě $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, která je pro každé $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = -2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 7x_3y_3 - 4x_2y_3 + x_2y_1 + 5x_3y_2.$$

Řešení : V předpisu bilineární formy místo y napíšeme x. Dostaneme tak předpis kvadratické formy:

$$\begin{aligned} Q_f(\overline{\mathbf{x}}) &= -2x_1x_1 + 3x_2x_2 - 7x_3x_3 - 4x_2x_3 + x_2x_1 + 5x_3x_2 = \\ &= \underline{\underline{-2x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 + x_2x_3 + x_2x_1.}} \end{aligned}$$

2. Určete **symetrickou** bilineární formu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ k níž přísluší kvadratická forma Q_f, která je pro každé $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem:

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = 4x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_1x_2.$$

Řešení : U kvadratických členů stačí jedno x nahradit ypsilonem. Smíšený člen ax_ix_j je třeba nahradit součtem $\frac{a}{2}x_iy_j + \frac{a}{2}x_jy_i$. V tomto případě to znamená, že zadaná kvadratická forma

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = 4x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_1x_2$$

přísluší symetrické bilineární formě

$$\underline{\underline{f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 4x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + \frac{5}{2}x_1y_2 + \frac{5}{2}x_2y_1.}}$$

Poznámka 63. *Podle Poznámky 49 můžeme funkční hodnotu bilineární formy vypočítat pomocí její matice $B_{f\langle E\rangle}$ následujícím způsobem: $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} B_{f\langle E\rangle} \overline{\mathbf{y}}^T_{\langle E\rangle}$. K dané kvadratické formě Q_f vždy můžeme nalézt symetrickou bilineární formu k níž přísluší a její funkční hodnoty určit pomocí matice této symetrické bilineární formy:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} B_{f\langle E\rangle} \overline{\mathbf{x}}^T_{\langle E\rangle}.$$

Maticí kvadratické formy Q_f nazveme matici symetrické bilineární formy f k níž přísluší. *To jest, maticí kvadratické formy Q_f vzhledem k bázi E je matice $B_{f\langle E\rangle}$. Budeme ji ale značit $(Q_f)_{\langle E\rangle}$.*

1. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení : Matice kvadratické formy Q_f vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ je vlastně matice symetrické bilineární formy k níž Q_f přísluší, a to vzhledem ke standardní bázi S. Snadno ji vytvoříme z koeficientů před x_ix_j v předpisu zadané kvadratické formy. Koeficienty před kvadratickými členy umístíme na diagonálu. Například číslo 7, které je před $x_1^2 = x_1x_1$ umístíme do prvního řádku prvního sloupce, číslo 3, které je před $x_2^2 = x_2x_2$ umístíme do druhého řádku druhého sloupce,...

Koeficienty před smíšenými členy rozdělíme na poloviny a umístíme symetricky podle diagonaly. Například koeficient před $x_1x_2 = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_1$ je číslo 8. Proto umístíme číslo 4 do prvního řádku druhého sloupce a také do druhého řádku prvního sloupce.

$$(Q_f)_{\langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = 7x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$$

a to vzhledem k bázi $G = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$.

Řešení : Nejprve určíme matici zadané kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi. Matice kvadratické formy Q_f vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ je vlastně matice symetrické bilineární formy k níž Q_f přísluší, a to vzhledem ke standardní bázi S. Snadno ji vytvoříme z koeficientů před x_ix_j v předpisu zadané kvadratické formy. Koeficienty před kvadratickými členy umístíme na diagonálu. Například číslo 7, které je před $x_1^2 = x_1x_1$ umístíme do prvního řádku prvního sloupce, číslo 3, které je před $x_2^2 = x_2x_2$ umístíme do druhého řádku druhého sloupce,...

Koeficienty před smíšenými členy rozdělíme na poloviny a umístíme symetricky podle diagonály. Například koeficient před $x_1x_2 = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_1$ je číslo 8. Proto umístíme číslo 4 do prvního řádku druhého sloupce a také do druhého řádku prvního sloupce.

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice zadané kvadratické formy Q_f vzhledem k bázi $G = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ je vlastně matice symetrické bilineární formy k níž Q_f přísluší, a to vzhledem k bázi G. Určíme ji proto tak, jak se určuje matice bilineární formy vzhledem k bázi G, známe-li její matici vzhledem ke standardní bázi S:

$$(Q_f)_{\langle G\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{souř. báz. vektorů v řádcích}} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{(Q_f)_{\langle S\rangle}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{souř. báz. vektorů ve sloupcích}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 15 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

6.1.1 Matice kvadratické formy - příklady k procvičení

1. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2$$

a to vzhledem k bázi $G = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle G \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -7 & -8 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

a to vzhledem k bázi $G = \{(1,0,2), (0,3,0), (0,0,1)\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle G\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 2 \\ 12 & 45 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

a to vzhledem ke standardní bázi
$S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Nalezněte matici kvadratické formy $Q_f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, která je $\forall\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 6x_3x_4$$

a to vzhledem ke standardní bázi
$S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Určete matici kvadratické formy $Q_f : P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$Q_f(h(x)) = h(2)h(1)$$

a to vzhledem ke standardní bázi $S = \{x^2, x, 1\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \frac{5}{2} \\ 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

8. Určete matici kvadratické formy $Q_f : P_2 \to \mathbb{R}$, kde $P_2 = \{ax^2+bx+c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, která je $\forall\, h(x) \in P_2$ dána předpisem

$$Q_f(h(x)) = h(2)h(1)$$

a to vzhledem k bázi $G = \{x^2 - x, 2x+3, x+1\}$.

Řešení :

$$(Q_f)_{\langle G\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & \frac{5}{2} \\ 3 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & 35 & \frac{29}{2} \\ 2 & \frac{29}{2} & 6 \end{pmatrix}}}$$

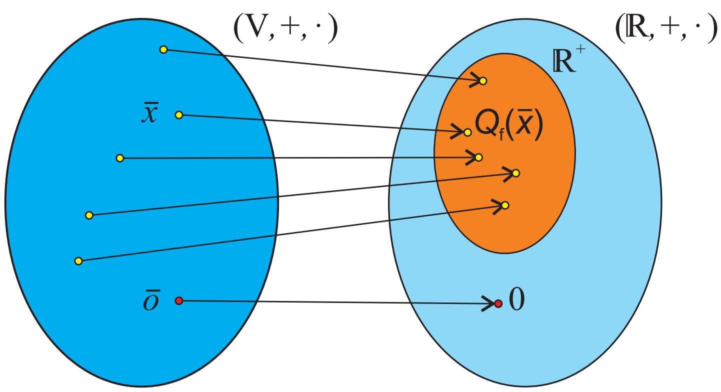
6.2 Klasifikace kvadratických forem

Kvadratická forma danému vektoru z vektorového prostoru přiřazuje reálné číslo. Uvažujme například kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je dána předpisem:

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3, \quad \text{kde}\, \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Všimněme si, že $Q_f((1,1,1)) = 5$, $Q_f((0,1,1)) = 10$, $Q_f((0,-2,-1)) = 26$, ... a ať dosadíme jakýkoli další vektor, vyjde číslo kladné. Pouze v případě, že do kvadratické formy dosadíme vektor $(0,0,0)$, vyjde číslo nula. O takové kvadratické formě budeme říkat, že je pozitivně definitní.

Podobně bychom mohli najít kvadratické formy, jejichž hodnoty vycházejí vždy záporné. Ale jsou i kvadratické formy, které některým vektorům přiřadí kladné a některým záporné číslo.



Obrázek 6.1: Pozitivně definitní kvadratická forma přiřazuje všem vektorům kladné reálné číslo. Jedinou výjimkou je nulový vektor. Ten každá kvadratická forma zobrauje na nulu.

Definice 64. (Definitnost kvadratické formy) *Kvadratická forma* $Q_f : V \mapsto \mathbb{R}$, *kde* $(V, +, \cdot)$ *je vektorový prostor nad tělesem* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *a* $\overline{\mathbf{o}}$ *je nulový vektor na* $(V, +, \cdot)$, *je*

1.) pozitivně definitní, *právě když* $\forall\, \overline{\mathbf{x}} - \{\overline{\mathbf{o}}\} : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) > 0$

2.) negativně definitní, *právě když* $\forall\, \overline{\mathbf{x}} - \{\overline{\mathbf{o}}\} : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) < 0$

3.) pozitivně semidefinitní, *právě když* $\forall\, \overline{\mathbf{x}} : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) \geq 0$

4.) negativně semidefinitní, *právě když* $\forall\, \overline{\mathbf{x}} : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) \leq 0$

5.) indefinitní, *právě když* $\exists\, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in V : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) > 0 \wedge Q_f(\overline{\mathbf{y}}) < 0$

Příklad 65. *Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$.

Řešení : Uvažme, že pro libovolná $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ je $x_1^2 \geq 0$, $x_2^2 \geq 0$ a také $x_3^2 \geq 0$. Navíc, jestliže je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ různý od nulového vektoru, pak je alespoň jedno z čísel x_1, x_2, x_3 nenulové. A tak je alespoň jedno z čísel x_1^2, x_2^2, x_3^2 ostře větší, než nula. Můžeme proto tvrdit, že

$$\forall\, \overline{\mathbf{x}} - \{\overline{\mathbf{o}}\} : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} + \underbrace{5x_3^2}_{\geq 0} > 0$$

Z Definice 64 pak plyne, že zadaná kvadratická forma $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ je pozitivně definitní.

Řešení tohoto příkladu bylo jednoduché, neboť se v předpisu zadané kvadratické formy vyskytovaly pouze „kvadratické“ členy a před každým z nich byl kladný koeficient. Matice této kvadratické formy má proto nenulová čísla jen na diagonále a všechna jsou kladná :

$$(Q_f)_{\langle S \rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Naopak, pokud bude mít nějaká kvadratická forma vzhledem k nějaké (nemusí být standardní) bázi E matici, která má mimo diagonálu nuly a čísla na diagonále jsou všechna kladná :

$$(Q_f)_{\langle E \rangle} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

pak je dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = \underbrace{\overbrace{a_{11}}^{>0} x_1^2 + \overbrace{a_{22}}^{>0} x_2^2 + \overbrace{a_{33}}^{>0} x_3^2}_{>0 \text{ pro } \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{o}}},$$

kde $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E \rangle} = (x_1, x_2, x_3)$. A je jasné, že **je pozitivně definitní**.

Příklad 66. *Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$.

Řešení : Uvažme, že pro libovolná $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ je $x_1^2 \geq 0$, $x_2^2 \geq 0$ a také $x_3^2 \geq 0$. Navíc, jestliže je vektor $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ různý od nulového vektoru, pak je alespoň jedno z čísel x_1, x_2, x_3 nenulové. A tak je alespoň jedno z čísel x_1^2, x_2^2, x_3^2 ostře větší, než nula. Můžeme proto tvrdit, že

$$\forall\, \overline{\mathbf{x}} - \{\overline{\mathbf{o}}\} : Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = \underbrace{-2x_1^2}_{\leq 0}\underbrace{-3x_2^2}_{\leq 0}\underbrace{-x_3^2}_{\geq 0} < 0$$

Z Definice 64 pak plyne, že zadaná kvadratická forma $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$ je negativně definitní.

Řešení tohoto příkladu bylo jednoduché, neboť se v předpisu zadané kvadratické formy vyskytovaly pouze „kvadratické“ členy a před každým z nich byl záporný koeficient. Matice této kvadratické formy má proto nenulová čísla jen na diagonále a všechna jsou záporná :

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Můžeme zobecnit. **Pokud má kvadratická forma vzhledem k nějaké (nemusí být standardní) bázi E matici, která má mimo diagonálu nuly a čísla na diagonále jsou všechna záporná**, pak je dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = \underbrace{\overbrace{a_{11}}^{<0} x_1^2 + \overbrace{a_{22}}^{<0} x_2^2 + \overbrace{a_{33}}^{<0} x_3^2}_{<0 \text{ pro } \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{o}}},$$

kde $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$. A je jasné, že **je negativně definitní**.

Příklad 67. *Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 4x_3^2 = x_1^2 + 0x_2^2 + 4x_3^2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$.

Řešení : Je zřejmé, že pro libovolný vektor $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$ je

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 0x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0.$$

Ale i pro nenulový vektor může vyjít hodnota této kvadratické formy rovna nule. Například pro vektor $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (0, 1, 0)$. Můžeme proto říci, že tato kvadratická forma je pozitivně semidefinitní (ale není pozitivně definitní).

Toto pozorování můžeme opět zobecnit. **Pokud má kvadratická forma vzhledem k nějaké (nemusí být standardní) bázi E matici, která má mimo diagonálu nuly a čísla na diagonále jsou všechna větší, nebo rovna nule, pak je pozitivně semidefinitní.**

Příklad 68. *Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 - 3x_2^2 = -x_1^2 - 3x_2^2 + 0x_3^2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$.

Řešení : Je zřejmé, že pro libovolný vektor $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$ je

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 0x_3^2 \leq 0.$$

Ale i pro nenulový vektor může vyjít hodnota této kvadratické formy rovna nule. Například pro vektor $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (0, 0, 1)$. Můžeme proto říci, že tato kvadratická forma je negativně semidefinitní (ale není negativně definitní).

Toto pozorování můžeme opět zobecnit. **Pokud má kvadratická forma vzhledem k nějaké (nemusí být standardní) bázi E matici, která má mimo diagonálu nuly a čísla na diagonále jsou všechna menší, nebo rovna nule, pak je negativně semidefinitní.**

Příklad 69. *Klasifikujte kvadratickou formu* $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, *která je dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 + 2x_2 - 3x_3^2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}}_{\langle E\rangle} = (x_1, x_2, x_3)$.

Řešení : V předpisu kvadratické formy :

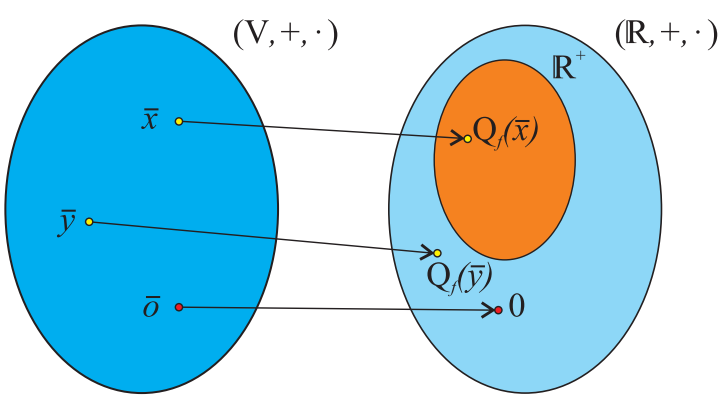
$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 + 2x_2 - 3x_3^2$$

je koeficient před x_1^2 záporný. Proto, pro vektoy, jejichž souřadnice vzhledem k bázi E jsou například $(1,0,0)$, $(2,0,0)$, $(3,0,0)$, $\ldots$, vychází záporné hodnoty $Q_f(\overline{\mathbf{x}})$.

Naopak, koeficient před x_2^2 je kladný. Proto, pro vektoy, jejichž souřadnice vzhledem k bázi E jsou například $(0,1,0)$, $(0,2,0)$, $(0,3,0)$, $\ldots$, vychází kladné hodnoty.

Můžeme proto říci, že tato kvadratická forma je indefinitní.

Toto pozorování můžeme opět zobecnit. **Pokud má kvadratická forma vzhledem k nějaké (nemusí být standardní) bázi E matici, která má mimo diagonálu nuly a čísla na diagonále některá kladná a některá záporná, pak je indefinitní.**



Obrázek 6.2: Indefinitní kvadratická forma.

Co ale dělat, když se v předpisu kvadratické formy vyskytnou i jiné než kvadratické členy?

Příklad 70. *Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f(\overline{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je dána předpisem:*

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2 + 6x_3^2,$$

kde $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$.

Řešení : Tato kvadratická forma má vzhledem ke standardní bázi matici:

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ta ale není diagonální (protože má nenulová čísla i mimo diagonálu). Nejsme proto schopni, tak jako v předešlých příkladech, určit o jaký typ kvadratické formy se jedná. To se nám ale podaří, pokud najdeme bázi, vzhledem k níž má diagonální matici. Například uvažujme bázi $E = \{(1,0,0); (-1,1,0); (0,0,1)\}$. Jak bylo ukázáno v podkapitole 6.1, matici kvadratické formy vzhledem k této bázi určíme :

$$(Q_f)_{\langle E\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Souřadnice bázových} \\ \text{vektorů z E} \\ \text{v řádcích}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{(Q_f)_{\langle S\rangle}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Souřadnice bázových} \\ \text{vektorů z E} \\ \text{ve sloupcích}}} \tag{6.1}$$

Vynásobením těchto matic zjistíme, že

$$(Q_f)_{\langle E\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Vidíme, že vzhledem k bázi E má kvadratická forma diagonílní matici, kde na diagonále jsou všechna čísla kladná. Podle zjištění učiněných v řešení Příkladu 65, je zadaná kvadratická forma **pozitivně definitní**.

Poznámka 71. *Řešení Příkladu 70 máme, to je hezké, ale co příště? Zase nějak zázračně uhodneme bázi, vzhledem k níž má zadaná kvadratická forma diagonální matici? Asi ne. Potřebujeme nějaký zaručený postup, jímž nalezneme nějakou* *diagonální matici zadané kvadratické formy (a je nám celkem jedno, vzhledem k jaké bázi je to její matice).*

Poučme se proto z řešení Příkladu 70. Podívejme se ještě jednou, jak jsme nalezli diagonální matici zadané kvadratické formy (rovnice (6.1) a (6.2)):

$$(Q_f)_{\langle E \rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Označme jako} \\ \textit{matici } E}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{(Q_f)_{\langle S \rangle}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Označme jako} \\ \textit{matici } E^T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Nyní je čas si vzpomenout na podkapitolu 1.6 o transformačních maticích. Matice E funguje jako transformační matice provádějící řádkové úpravy v matici $(Q_f)_{\langle S \rangle}$ (konkrétně přičte mínus jedna násobek řádku prvního k řádku druhému). Dá se rozmyslet, že matice E^T poté s výslednou maticí provede úplně stejné sloupcové úpravy.

Obecně tedy hledanou diagonální matici nalezneme tak, že s maticí zadané kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi provádíme řádkové úpravy tak, abychom dostali nuly pod diagonálou, ale po každé řádkové úpravě provedeme stejnou úpravu se sloupci (to zajistí, že se nuly objeví i nad diagonálou).

Tento postup, kterým jsme mohli vyřešit Příklad 70 bychom symbolicky zapsali následujícím způsobem:

$$(Q_f)_{\langle S \rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{r_1} \to \mathbf{r_2}} \sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 6 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{s_1} \to \mathbf{s_2}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{(Q_f)_{\langle E \rangle}} \right]$$

A protože na diagonále výsledné matice jsou všechna čísla kladná, je zadaná matice pozitivně definitní.

Tento postup si můžete procvičit na následujících řešených příkladech.

1. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Řešení : Nejprve nalezneme matici zadané kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi (mohli bychom i vzhledem k jiné bázi, ale vzhledem ke standardní to bude nejjednodušší):

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Tuto matici následně upravujeme tak, že střídáme stejné řádkové a stejné sloupcové úpravy. Při řádkových úpravách se snažíme dostat nuly pod diagonálou. Takto nakonec dostaneme diagonální matici (nenulová čísla mohou být jen na diagonále).

V tomto případě se nejprve snažíme „vynulovat“ číslo -3 ve třetím řádku prvním sloupci Přičteme proto trojnásobek prvního řádku k řádku třetímu. Poté proto musí následovat „stejná“ sloupcová úprava, kde přičteme trojnásobek prvního sloupce ke sloupci třetímu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{-3\mathbf{r_1}\to\mathbf{r_3}} \sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}}_{-3\mathbf{s_1}\to\mathbf{s_3}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{r_2}\to\mathbf{r_3}} \right] \sim$$

Všimněme si, že po řádkové a stejné sloupcové úpravě vznikne opět symetrická matice. (Není to náhoda, jedná se o matici zadané kvadratické formy, ale vzhledem k jiné než standardní bázi.) Zbývá „vynulovat“ číslo ve třetím řádku druhého sloupce přičtením -1–násobku druhého řádku ke třetímu a poté provést stejnou sloupcovou úpravu:

$$\sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{s_2}\to\mathbf{s_3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \right]$$

Výsledná diagonální matice má na diagonále jak čísla kladná (1 a 18), tak záporná (-4). To znamená, že zadaná kvadratická forma je <u>indefinitní</u>.

2. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 16x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3$$

Řešení : Nejprve nalezneme matici zadané kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi (mohli bychom i vzhledem k jiné bázi, ale vzhledem ke standardní to bude nejjednodušší):

$$(Q_f)_{\langle S\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici následně upravujeme tak, že střídáme stejné řádkové a stejné sloupcové úpravy. Při řádkových úpravách se snažíme dostat nuly pod diagonálou. Takto nakonec dostaneme diagonální matici (nenulová čísla mohou být jen na diagonále).

Abychom nemuseli přičítat zlomky řádků, nejprve vynásobíme třetí řádek dvojkou. Poté ale uděláme totéž se třetím sloupcem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\cdot\mathbf{r_3}} \sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2\cdot\mathbf{s_3}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{-2\mathbf{r_1}\to\mathbf{r_2} \\ -\mathbf{r_1}\to\mathbf{r_3}}} \right] \sim$$

Dále se snažíme pomocí řádkových úprav "vynulovat"čísla v prvním sloupci pod diagonálou. Poté ale musí následovat "stejné"sloupcové úpravy:

$$\sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{-2\mathbf{s_1}\to\mathbf{s_2} \\ -\mathbf{s_1}\to\mathbf{s_3}}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}}_{2\cdot\mathbf{r_3}} \right] \sim$$

Všimněme si, že po řádkové a stejné sloupcové úpravě vznikne opět symetrická matice. (Není to náhoda, jedná se o matici zadané kvadratické formy, ale vzhledem k jiné než standardní bázi.) Pokračujeme ve střídání řádkových a sloupcových úprav, dokud neobdržíme matici diagonální:

$$\sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix}}_{2\cdot\mathbf{s_3}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{r_2\to r_3}} \right]$$

$$\sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{s_2\to s_3}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Výsledná diagonální matice má na diagonále jak čísla kladná (2 a 8), tak nulu. To znamená, že zadaná kvadratická forma je pozitivně semidefinitní.

6.2.1 Klasifikace kvadratických forem - příklady k procvičení

1. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2.$$

Řešení : Q_f je indefinitní.

2. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Řešení : Q_f je pozitivně semidefinitní.

3. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Řešení : Q_f je indefinitní.

4. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 + 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Řešení : Q_f je indefinitní.

5. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3.$$

Řešení : Q_f je indefinitní.

6. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Řešení : Q_f je pozitivně semidefinitní.

7. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 - 10x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Řešení : Q_f je negativně semidefinitní.

8. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Řešení : Q_f je pozitivně semidefinitní.

9. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3.$$

Řešení : Q_f je pozitivně definitní.

10. Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Řešení : Q_f je negativně definitní.

Kapitola 7

Skalární součin

7.1 Skalární součin

Definice 72. *(*Skalární součin*) Skalárním součinem na vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ nazveme každou symetrickou bilineární formu $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ k níž přísluší pozitivně definitní kvadratická forma Q_f.*

1. Rozhodněte, zda je bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$$

skalárním součinem na $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Řešení : Maticí této bilineární formy vzhledem ke standardní bázi je matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta je symetrická – jedná se proto o symetrickou bilineární formu.

K ní příslušející kvadratická forma má stejnou matici (klasifikujeme ji):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{r_1} \to \mathbf{r_2}} \sim \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{s_1} \to \mathbf{s_2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Kvadratická forma příslušející k zadané (symetrické) bilineární formě je tedy pozitivně definitní. Znamená to, že zadaná bilineární forma je skalárním součinem na $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

2. Určete všechny vektory $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ kolmé na vektor $(1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$.

Řešení : Aby byl vektor $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ kolmý na vektor $(1, 2, -1)$, musí být splněno:

$$f(\overline{\mathbf{x}}, (1, 2, -1)) = 0.$$

To znamená, že musí platit

$$2x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + 2x_3 \cdot (-1) = 0.$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Zvolíme -li parametry $x_1 = t$ a $x_3 = s$, dostáváme

$$x_2 = -t + s.$$

Odtud

$\overline{x} = (t, -t + s, s) = t(1, -1, 0) + s(0, 1, 1);\ s, t \in \mathbb{R}$.

3. Určete všechny vektory $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $(1, 1, -1), (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : Aby byl vektor $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ kolmý na vektory $(1, 1, -1), (1, 2, 0)$, musí být splněno:

$$\begin{aligned} f(\overline{\mathbf{x}}, (1, 1, -1)) &= 0 \\ f(\overline{\mathbf{x}}, (1, 2, 0)) &= 0 \end{aligned}$$

To jest

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme tak soustavu lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Volbou parametru $x_3 = t$ dostaneme řešení $\overline{x} = (2t, -t, t) = t(2, -1, 1)$.

7.1.1 Skalární součin - příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda je bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

skalárním součinem na $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Řešení : Zadaná bilineární forma není symetrická, nemůže proto být skalárním součinem.

2. Rozhodněte, zda je bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

skalárním součinem na $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Řešení : Zadaná bilineární forma je symetrická, ale k ní příslušející kvadratická forma není pozitivně definitní, nemůže proto být skalárním součinem.

3. Rozhodněte, zda je bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

skalárním součinem na $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Řešení : Zadaná bilineární forma je symetrická a k ní příslušející kvadratická forma je pozitivně definitní, je proto skalárním součinem na $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

4. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ kolmé na vektor $(1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(1, 0, 1) + s(0, 1, 0);\ s, t \in \mathbb{R}$.

5. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ kolmé na vektor $(1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(1, 0, 3) + s(0, 1, 0)$; $s, t \in \mathbb{R}$.

6. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ kolmé na vektor $(1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(1, 0, -3) + s(0, 1, -4)$; $s, t \in \mathbb{R}$.

7. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $(1, 2, 1)$ a $(1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(-2, 1, 0)$; $t \in \mathbb{R}$.

8. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $(1, 0, 1)$ a $(1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(2, 1, -2)$; $t \in \mathbb{R}$.

9. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $(1, 0, 1)$ a $(1, 2, 5) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(-1, -2, 1)$; $t \in \mathbb{R}$.

10. Určete všechny vektory $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, které jsou kolmé na vektory $(1, 2, 1)$ a $(1, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, který je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dán předpisem $f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3$.

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = t(5, -5, 1)$; $t \in \mathbb{R}$.

7.2 Gramm – Schmidtův ortogonalizační proces

1. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (-2,0,1), \overline{\mathbf{g}}_2 = (1,5,-3), \overline{\mathbf{g}}_3 = (0,6,6)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : Cílem je najít bázi $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2, \overline{\mathbf{f}}_3\}$, kde jsou bázové vektory navzájem kolmé.

Krok 1. $\boxed{\overline{\mathbf{f}}_1 = \overline{\mathbf{g}}_1.}$ Proto

$$\overline{\mathbf{f}}_1 = \overline{\mathbf{g}}_1 = (-2,0,1)$$

Krok 2. $\boxed{\overline{\mathbf{f}}_2 = \overline{\mathbf{g}}_2 + \alpha\overline{\mathbf{f}}_1, \text{ kde } \overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_2 = 0.}$ Proto

$$\overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_2 = \overline{\mathbf{f}}_1(\overline{\mathbf{g}}_2 + \alpha\overline{\mathbf{f}}_1) = \overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{g}}_2 + \alpha\overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_1 = 0$$

Po dosazení do poslední rovnosti obdržíme:

$$\begin{aligned} (-2,0,1)(1,5,-3) + \alpha(-2,0,1)(-2,0,1) &= 0 \\ -5 + 5\alpha &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

Zjištěnou hodnotu α dosadíme do vztahu $\overline{\mathbf{f}}_2 = \overline{\mathbf{g}}_2 + \alpha\overline{\mathbf{f}}_1$:

$$\overline{\mathbf{f}}_2 = (1,5,-3) + \underbrace{1}_{=\alpha} \cdot (-2,0,1) = (-1,5,-2)$$

Krok 3. $\boxed{\overline{\mathbf{f}}_3 = \overline{\mathbf{g}}_3 + \alpha_1\overline{\mathbf{f}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{f}}_2, \text{ kde } \overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_3 = 0 \text{ a také } \overline{\mathbf{f}}_2\overline{\mathbf{f}}_3 = 0.}$ Proto

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_3 &= \overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{g}}_3 + \alpha_1\overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_1 + \alpha_2\underbrace{\overline{\mathbf{f}}_1\overline{\mathbf{f}}_2}_{=0} &= 0 \\ \overline{\mathbf{f}}_2\overline{\mathbf{f}}_3 &= \overline{\mathbf{f}}_2\overline{\mathbf{g}}_3 + \alpha_1\underbrace{\overline{\mathbf{f}}_2\overline{\mathbf{f}}_1}_{=0} + \alpha_2\overline{\mathbf{f}}_2\overline{\mathbf{f}}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme:

$$\begin{array}{rcl}
(-2,0,1)(0,6,6)+\alpha_1(-2,0,1)(-2,0,1) & = & 0 \\
(-1,5,-2)(0,6,6)+\alpha_2(-1,5,-2)(-1,5,-2) & = & 0 \\
\hline
6+5\alpha_1 & = & 0 \\
18+30\alpha_2 & = & 0 \\
\hline
\alpha_1 & = & -\frac{6}{5} \\
\alpha_2 & = & -\frac{18}{30}=-\frac{3}{5} \\
\hline
\end{array}$$

Zjištěné hodnoty α_1, α_2 dosadíme do vztahu $\mathbf{\overline{f}_3}=\mathbf{\overline{g}_3}+\alpha_1\mathbf{\overline{f}_1}+\alpha_2\mathbf{\overline{f}_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\overline{f}_3} &= (0,6,6)-\tfrac{6}{5}(-2,0,1)-\tfrac{3}{5}(-1,5,-2) \\
&= (0,\tfrac{30}{5},\tfrac{30}{5})+(\tfrac{12}{5},0,-\tfrac{6}{5})+(\tfrac{3}{5},-\tfrac{15}{5},\tfrac{6}{5}) \\
&= (\tfrac{15}{5},\tfrac{15}{5},\tfrac{30}{5}) \\
&= (3,3,6)
\end{aligned}$$

Nalezli jsme ortogonální bázi:

$$\underline{\underline{F=\{(-2,0,1);(-1,5,-2);(3,3,6)\}}}$$

2. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_\mathbf{1} = (1,0,1), \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{2} = (0,1,3), \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{3} = (0,1,1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : Cílem je najít bázi $F = \{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}, \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}, \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{3}\}$, kde jsou bázové vektory navzájem kolmé.

Krok 1. $\boxed{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1} = \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{1}.}$ Proto

$$\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1} = \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{1} = (1,0,1)$$

Krok 2. $\boxed{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{2} + \alpha\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}, \text{ kde } \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = 0.}$ Proto

$$\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}(\overline{\mathbf{g}}_\mathbf{2} + \alpha\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}) = \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{g}}_\mathbf{2} + \alpha\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1} = 0$$

Po dosazení do poslední rovnosti obdržíme:

$$\begin{aligned} (1,0,1)(0,1,3) + \alpha(1,0,1)(1,0,1) &= 0 \\ 3 + 2\alpha &= 0 \\ \alpha &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Zjištěnou hodnotu α dosadíme do vztahu $\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{2} + \alpha\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}$:

$$\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = (0,1,3) \underbrace{-\frac{3}{2}}_{=\alpha} \cdot (1,0,1) = (-\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2})$$

Nalezený bázový vektor $\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}$ můžeme (pro jednoduchost dalších výpočtů) nahradit jeho dvojnásobkem - to nezmění jeho "směr"- zůstane kolmý na $\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}$. Přeznačme proto:

$$\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} = (-3,2,3).$$

Krok 3. $\boxed{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{3} = \overline{\mathbf{g}}_\mathbf{3} + \alpha_1\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1} + \alpha_2\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}, \text{ kde } \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{3} = 0 \text{ a také } \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{3} = 0.}$ Proto

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{3} &= \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{g}}_\mathbf{3} + \alpha_1\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1} + \alpha_2\underbrace{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}}_{=0} &= 0 \\ \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{3} &= \overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\overline{\mathbf{g}}_\mathbf{3} + \alpha_1\underbrace{\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}}_{=0} + \alpha_2\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\overline{\mathbf{f}}_\mathbf{2} &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení obdržíme:

$$
\begin{array}{rcl}
(1,0,1)(0,1,1)+\alpha_1(1,0,1)(1,0,1) & = & 0 \\
(-3,2,3)(0,1,1)+\alpha_2(-3,2,3)(-3,2,3) & = & 0 \\
\hline
1+2\alpha_1 & = & 0 \\
5+22\alpha_2 & = & 0 \\
\hline
\alpha_1 & = & -\frac{1}{2}=-\frac{11}{22} \\
\alpha_2 & = & -\frac{5}{22} \\
\hline
\end{array}
$$

Zjištěné hodnoty α_1, α_2 dosadíme do vztahu $\overline{\mathbf{f_3}}=\overline{\mathbf{g_3}}+\alpha_1\overline{\mathbf{f_1}}+\alpha_2\overline{\mathbf{f_2}}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{f_3}} &= (0,1,1)-\tfrac{11}{22}(1,0,1)-\tfrac{5}{22}(-3,2,3)= \\
&= (\tfrac{4}{22},\tfrac{12}{22},-\tfrac{4}{22})= \\
&= \tfrac{4}{22}(1,3,-1)
\end{aligned}
$$

Nalezený bázový vektor $\overline{\mathbf{f_3}}$ můžeme nahradit jeho nenulovým násobkem - zůstane kolmý na $\overline{\mathbf{f_1}}$ i na $\overline{\mathbf{f_2}}$. Přeznačme proto:

$$\overline{\mathbf{f_3}}=(1,3,-1).$$

Nalezli jsme ortogonální bázi:

$$\underline{\underline{F=\{(1,0,1);(-3,2,3);(1,3,-1)\}}}$$

7.2.1 Gramm – Schmidtův ortogonalizační proces - příklady k procvičení

1. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G=\{\overline{\mathbf{g_1}}=(1,0,-1),\overline{\mathbf{g_2}}=(0,1,2),\overline{\mathbf{g_3}}=(0,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F=\{\overline{\mathbf{f_1}}=(1,0,-1),\overline{\mathbf{f_2}}=(1,1,1),\overline{\mathbf{f_3}}=(-1,2,-1)\}$

2. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (1,2,-1), \overline{\mathbf{g}}_2 = (0,1,2), \overline{\mathbf{g}}_3 = (0,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (1,2,-1), \overline{\mathbf{f}}_2 = (0,1,2), \overline{\mathbf{f}}_3 = (-5,2,-1)\}$

3. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (1,2,-1), \overline{\mathbf{g}}_2 = (0,0,2), \overline{\mathbf{g}}_3 = (0,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (1,2,-1), \overline{\mathbf{f}}_2 = (1,2,5), \overline{\mathbf{f}}_3 = (-4,2,0)\}$

4. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (1,2,-1), \overline{\mathbf{g}}_2 = (0,-1,2), \overline{\mathbf{g}}_3 = (0,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (1,2,-1), \overline{\mathbf{f}}_2 = (2,1,4), \overline{\mathbf{f}}_3 = (-3,2,1)\}$

5. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (1,1,0), \overline{\mathbf{g}}_2 = (0,-1,2), \overline{\mathbf{g}}_3 = (0,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (1,1,0), \overline{\mathbf{f}}_2 = (1,-1,4), \overline{\mathbf{f}}_3 = (-2,2,1)\}$

6. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (-2,1,0), \overline{\mathbf{g}}_2 = (0,-1,1), \overline{\mathbf{g}}_3 = (1,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (-2,1,0), \overline{\mathbf{f}}_2 = (-2,-4,5), \overline{\mathbf{f}}_3 = (1,2,2)\}$

7. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (-2,1,1), \overline{\mathbf{g}}_2 = (0,-1,1), \overline{\mathbf{g}}_3 = (1,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (-2,1,1), \overline{\mathbf{f}}_2 = (0,-1,1), \overline{\mathbf{f}}_3 = (1,1,1)\}$

8. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g}}_1 = (-2,0,1), \overline{\mathbf{g}}_2 = (1,5,-3), \overline{\mathbf{g}}_3 = (-1,1,-1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení : $F = \{\overline{\mathbf{f}}_1 = (-2,0,1), \overline{\mathbf{f}}_2 = (-1,5,-2), \overline{\mathbf{f}}_3 = (-1,-1,-2)\}$

7.3 Souřadnice vzhledem k ortogonální bázi

1. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (1,2,1)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1,1,0); (-1,1,2); (1,-1,1)\}$.

Řešení : Hledané souřadnice tvoří vektor $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (k_1, k_2, k_3)$, kde:

$$k_1(1,1,0) + k_2(-1,1,2) + k_3(1,-1,1) = (1,2,1)$$

Tuto vektorovou rovnici (přesněji její levou a pravou stranu) můžeme vynásobit bázovým vektorem $(1,1,0)$, $(-1,1,2)$, respektive $(1,-1,1)$. Obdržíme tak tři rovnice, kde využijeme faktu, že bázové vektory jsou na sebe kolmé (pokud jsou různé, je jejich skalární součin roven nule):

$$\begin{aligned}
k_1(1,1,0)(1,1,0) + k_2\underbrace{(-1,1,2)(1,1,0)}_{=0} + k_3\underbrace{(1,-1,1)(1,1,0)}_{=0} &= (1,2,1)(1,1,0)\\
\underbrace{k_1(1,1,0)(-1,1,2)}_{=0} + k_2(-1,1,2)(-1,1,2) + k_3\underbrace{(1,-1,1)(-1,1,2)}_{=0} &= (1,2,1)(-1,1,2)\\
\underbrace{k_1(1,1,0)(1,-1,1)}_{=0} + k_2\underbrace{(-1,1,2)(1,-1,1)}_{=0} + k_3(1,-1,1)(1,-1,1) &= (1,2,1)(1,-1,1)
\end{aligned}$$

Obdržíme tak soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
2k_1 &= 3\\
6k_2 &= 3\\
3k_3 &= 0
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne řešení:

$$\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

2. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (2,1,0)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1,0,-1); (3,2,3); (-1,3,-1)\}$.

Řešení : Hledané souřadnice tvoří vektor $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (k_1, k_2, k_3)$, kde:

$$k_1(1,0,-1) + k_2(3,2,3) + k_3(-1,3,-1) = (2,1,0)$$

Tuto vektorovou rovnici (přesněji její levou a pravou stranu) můžeme vynásobit bázovým vektorem $(1,0,-1)$, $(3,2,3)$, respektive $(-1,3,-1)$. Obdržíme tak tři rovnice, kde využijeme faktu, že bázové vektory jsou na sebe kolmé (pokud jsou různé, je jejich skalární součin roven nule):

$$
\begin{aligned}
k_1(1,0,-1)(1,0,-1) + k_2\underbrace{(3,2,3)(1,0,-1)}_{=0} + k_3\underbrace{(-1,3,-1)(1,0,-1)}_{=0} &= (2,1,0)(1,0,-1)\\
\underbrace{k_1(1,0,-1)(3,2,3)}_{=0} + k_2(3,2,3)(3,2,3) + k_3\underbrace{(-1,3,-1)(3,2,3)}_{=0} &= (2,1,0)(3,2,3)\\
\underbrace{k_1(1,0,-1)}_{=0} + k_2\underbrace{(3,2,3)(1,-1,1)}_{=0} + k_3(-1,3,-1)(-1,3,-1) &= (2,1,0)(-1,3,-1)
\end{aligned}
$$

Obdržíme tak soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
2k_1 &= 2\\
22k_2 &= 8\\
11k_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Odtud okamžitě plyne řešení:

$$\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (k_1,k_2,k_3) = \left(1, \frac{4}{11}, \frac{1}{11}\right).$$

7.3.1 Souřadnice vzhledem k ortogonální bázi

1. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (3,1,2)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1,1,0); (-1,1,2); (1,-1,1)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

2. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (1,0,5)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1,1,0); (-1,1,2); (1,-1,1)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$.

3. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (2, 1, 2)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1, 0, -1); (3, 2, 3); (-1, 3, -1)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = \left(0, \frac{7}{11}, \frac{-1}{11}\right)$.

4. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (1, 0, 1)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1, 0, -1); (3, 2, 3); (-1, 3, -1)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = \left(0, \frac{3}{11}, \frac{-2}{11}\right)$.

5. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (4, 1, -1)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1, 0, -1); (3, 2, 3); (-1, 3, -1)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

6. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (15, 4, 5)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1, 0, -3); (9, 10, 3); (-6, 6, -2)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (0, 1, -1)$.

7. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (1, 16, 7)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1, 0, -3); (9, 10, 3); (-6, 6, -2)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (-2, 1, 1)$.

8. Nalezněte souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{b}} = (-1, 6, -17)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1, 0, -3); (9, 10, 3); (-6, 6, -2)\}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{b}}_{\langle E\rangle} = (5, 0, 1)$.

7.4 Ortogonální projekce

1. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (1, 2, 1)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1, -1, 5)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1, 0, 1)$.

Řešení : Rozložíme vektor $\overline{\mathbf{u}}$ na součet vektorů:

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{x}},$$

kde $\overline{\mathbf{n}}$ je vektor kolmý na rovinu zadanou vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1, -1, 5)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1, 0, 1)$ (proto $\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0$ a také $\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{w}} = 0$) a $\overline{\mathbf{x}}$ je vektor ležící v této rovině. Proto

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1(1,-1,5) + k_2(1,0,1).$$

Cílem je určit vektor $\overline{\mathbf{x}}$. Všimněme si, že

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{v}} &= (\overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{x}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} = \underbrace{\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{v}}}_{=0} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{v}} = (k_1(1,-1,5) + k_2(1,0,1)) \cdot \overline{\mathbf{v}} \\
\overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{w}} &= (\overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{x}}) \cdot \overline{\mathbf{w}} = \underbrace{\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{w}}}_{=0} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{w}} = (k_1(1,-1,5) + k_2(1,0,1)) \cdot \overline{\mathbf{w}}
\end{aligned}$$

Roznásobením závorek vpravo a dosazením za $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}}$ a $\overline{\mathbf{w}}$ obdržíme:

$$\begin{aligned}
(1,2,1)(1,-1,5) &= k_1(1,-1,5)(1,-1,5) + k_2(1,0,1)(1,-1,5) \\
(1,2,1)(1,0,1) &= k_1(1,-1,5)(1,0,1) + k_2(1,0,1)(1,0,1)
\end{aligned}$$

Vynásobením vektorů obdržíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
4 &= 27k_1 + 6k_2 \\
2 &= 6k_1 + 2k_2
\end{aligned}$$

Zapíšeme maticově a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 27 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{array}\right) \ \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \ \sim \left(\begin{array}{rr|r} 6 & 2 & 2 \\ 27 & 6 & 4 \end{array}\right) \ :2 \ \sim \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 1 \\ 27 & 6 & 4 \end{array}\right) \ -9\mathbf{r_1} \ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{9} \\ \Rightarrow k_2 = \frac{5}{3} \end{array}$$

Nyní můžeme určit výsledek:

$$\overline{\mathbf{x}} = -\frac{2}{9}(1,-1,5) + \frac{5}{3}(1,0,1) = \underline{\underline{\frac{1}{9}(13,2,5)}}.$$

2. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (1,0,3)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1,1,0)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (0,1,2)$.

Řešení : Rozložíme vektor $\overline{\mathbf{u}}$ na součet vektorů:

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{x}},$$

kde $\overline{\mathbf{n}}$ je vektor kolmý na rovinu zadanou vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1,1,0)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (0,1,2)$ (proto $\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{v}} = 0$ a také $\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{w}} = 0$) a $\overline{\mathbf{x}}$ je vektor ležící v této rovině. Proto

$$\overline{\mathbf{x}} = k_1(1,1,0) + k_2(0,1,2).$$

Cílem je určit vektor $\overline{\mathbf{x}}$. Všimněme si, že

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{v}} &= (\overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{x}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} = \underbrace{\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{v}}}_{=0} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{v}} = (k_1(1,1,0) + k_2(0,1,2)) \cdot \overline{\mathbf{v}} \\
\overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{w}} &= (\overline{\mathbf{n}} + \overline{\mathbf{x}}) \cdot \overline{\mathbf{w}} = \underbrace{\overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{w}}}_{=0} + \overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{w}} = (k_1(1,1,0) + k_2(0,1,2)) \cdot \overline{\mathbf{w}}
\end{aligned}$$

Roznásobením závorek vpravo a dosazením za $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}}$ a $\overline{\mathbf{w}}$ obdržíme:

$$\begin{aligned}
(1,0,3)(1,1,0) &= k_1(1,1,0)(1,1,0) + k_2(0,1,2)(1,1,0) \\
(1,0,3)(0,1,2) &= k_1(1,1,0)(0,1,2) + k_2(0,1,2)(0,1,2)
\end{aligned}$$

Vynásobením vektorů obdržíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
1 &= 2k_1 + k_2 \\
6 &= k_1 + 5k_2
\end{aligned}$$

Zapíšeme maticově a vyřešíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -9 & -11 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow k_1 = -\tfrac{1}{9}$$

$$\Rightarrow k_2 = \tfrac{11}{9}$$

Nyní můžeme určit výsledek:

$$\overline{\mathbf{x}} = -\frac{1}{9}(1,1,0) + \frac{11}{9}(0,1,2) = \underline{\underline{\frac{1}{9}(-1,10,22)}}.$$

7.4.1 Ortogonální projekce - příklady k procvičení

1. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (1,2,1)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (-1,2,1)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1,0,-1)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = 1(-1,2,1) + 1(1,0,-1) = \underline{\underline{(0,2,0)}}.$$

2. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (1,2,3)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (-1,2,1)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1,0,1)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = 1(-1,2,1) + 2(1,0,1) = \underline{\underline{(1,2,3)}}.$$

3. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (1,1,2)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1,-1,0)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (3,1,2)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = -\frac{2}{3}(1,-1,0) + \frac{2}{3}(3,1,2) = \underline{\underline{\frac{2}{3}(2,2,2)}}.$$

4. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (9,9,12)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1,-1,0)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1,1,2)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = 0(1,-1,0) + 7(1,1,2) = \underline{\underline{(7,7,14)}}.$$

5. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (2,-2,3)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1,-1,0)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1,1,2)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = 2(1,-1,0) + 1(1,1,2) = \underline{\underline{(3,-1,2)}}.$$

6. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (2,-2,1)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1,0,-1)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (0,1,2)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{5}{6}(1,0,-1) + \frac{2}{6}(0,1,2) = \underline{\underline{\frac{1}{6}(5,2,-1)}}.$$

7. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (5, 0, 1)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1, 0, -1)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (0, 1, 2)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = 4(1, 0, -1) + 2(0, 1, 2) = \underline{\underline{(4, 2, 0)}}.$$

8. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (-1, 1, 3)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (1, 0, -1)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (0, 1, 2)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = -1(1, 0, -1) + 1(0, 1, 2) = \underline{\underline{(-1, 1, 3)}}.$$

9. Vypočtěte ortogonální (v eukleidovském skalárním součinu) projekci vektoru $\overline{\mathbf{u}} = (1, 2, 4)$ do roviny určené vektory $\overline{\mathbf{v}} = (2, 1, -1)$ a $\overline{\mathbf{w}} = (1, 0, -1)$.

Řešení :

$$\overline{\mathbf{x}} = 3(2, 1, -1) - 6(1, 0, -1) = \underline{\underline{(0, 3, 3)}}.$$

Kapitola 8

Determinant

8.1 Determinant prvního řádu

Determinant prvního řádu přiřazuje matici typu $(1, 1)$ reálné číslo podle předpisu:

$$|a| = a$$

1. Vypočtěte determinant $|-1|$.

Řešení : Pozor na záměnu s absolutní hodnotou! Determinant čísla (matice o jednom řádku a jednom sloupci) mínus jedna je číslo mínus jedna:

$$|-1| = -1$$

8.1.1 Determinant prvního řádu - příklady k procvičení

1. Vypočtěte determinant $|5|$.

Řešení : $|5| = 5$

2. Vypočtěte determinant $|-3|$.

Řešení : $|-3| = -3$

3. Vypočtěte determinant $|-7|$.

Řešení : $|-7| = -7$

8.2 Determinant druhého řádu

Determinant druh0ho řádu přiřazuje matici typu $(1,1)$ reálné číslo podle předpisu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

1. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Řešení : Nejprve vynásobíme čísla na hlůavní diagonále a odečteme součin čísel na vedlejší diagonále:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3$$

8.2.1 Determinant druhého řádu - příklady k procvičení

1. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Řešení : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$

2. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Řešení : $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$

3. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Řešení : $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2$

8.3 Determinant třetího řádu

8.3.1 Determinant třetího řádu - příklady k procvičení

1. Nalezněte

Řešení :

8.4 Výpočet determinantu rozvojem

8.4.1 Výpočet determinantu rozvojem - příklady k procvičení

1. Nalezněte

Řešení :

8.5 Výpočet determinantu elementárními úpravami

Hodnotu determinantu je možné zjistit také následujícím způsobem. Upravíme determinant na schodový tvar pomocí elementárních řádkových (nebo sloupcových) úprav, přičemž vezmeme v úvahu, že:

- Přičtením násobku jednoho řádku (sloupce) k nějakému jinému řádku (sloupci) se hodnota determinantu nezmění.
- Výměnou řádků (sloupců) se změní znaménko determinantu.
- Vynásobíme-li nějaký řádek nenulovou konstantou c, bude hodnota tohoto determinantu c-násobkem hodnoty determinantu původního. Aby se tedy hodnota nezměnila, musíme upravený determinant vynásobit číslem $\frac{1}{c}$.

Determinant matice, která je ve schodovém tvaru je roven součinu prvků na diagonále (plyne to z postupu výpočtu determinantu rozvojem). Například kdybychom počítali hodnotu determinantu (nejprve rozvojem podle prvního sloupce a v dalším kroku opět):

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{5 \cdot (-1)^2}_{=5} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot (-1)^2 |3| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

1. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \\ -5\mathbf{r_1} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -15 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathbf{r_2} \\ -\mathbf{r_2} \end{array} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & -10 & -12 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\mathbf{r_3} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 1 \cdot 1 \cdot (-10) \cdot (-28) = 280
$$

2. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Řešení :

$$
|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \ \mathbf{s_1} \circlearrowleft \mathbf{s_3} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\mathbf{r_1} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} =
$$

$$
= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\mathbf{r_2} \\ -\mathbf{r_2} \end{array} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\mathbf{9} \end{array} =
$$

$$
= \frac{-1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -2\mathbf{r_3} \end{array} = \frac{-1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}
$$

$$
= \tfrac{-1}{9} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-9) \cdot (-26) = -26
$$

3. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\mathbf{\frac{1}{3}} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathbf{r_1} \\ \\ +\mathbf{r_1} \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot\mathbf{3} \\ \cdot\mathbf{3} \end{matrix} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2\mathbf{r_2} \\ +2\mathbf{r_2} \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot\mathbf{5} \end{matrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & 30 & -25 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\mathbf{r_3} \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (15) \cdot (-9) = 27$$

8.5.1 Výpočet determinantu elementárními úpravami - příklady k procvičení

1. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 8$

2. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 6$

3. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 13$

4. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 9$

5. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 12$

6. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 4$

7. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 0$

8. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 7$

9. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = -3$

10. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 5$

11. Vypočtěte determinant matice A pomocí Gaussových úprav (na trojúhelníkový tvar), jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : $|A| = 0$

8.6 Cramerovo pravidlo

Řešíme-li soustavu lineárních rovnic

$$A\overline{\mathbf{x}} = \overline{b},$$

kde A je čtvercová matice, jejíž determinant je nenulový, můžeme určit neznámou x_i následujícím způsobem. Nejprve určíme determinant $|A|$ a determinant $|A_{x_i}|$, kde matice A_{x_i} vznikne z matice A nahrazením jejího i-tého sloupce sloupcovým vektorem $\overline{b}$. Neznámou x_i potom určíme z rovnice:

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}.$$

Poznamenejme, že pomocí výše uvedeného postupu můžeme řešit jen soustavy n rovnic o n neznámých (to odpovídá požadavku, aby matice A byla čtvercová), které mají jediné řešení (to odpovídá požadavku, aby $|A| \neq 0$).

1. Pomocí Cramerova pravidla nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \end{array}$$

Řešení : Nejprve určíme determinant soustavy:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathbf{r_1} \\ +2\mathbf{r_1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Poté určíme determinanty (vzniknou náhradou prvního, druhého, respektive třetího sloupce determinantu soustavy sloupcem pravých stran soustavy):

$$\begin{aligned} |A_{x_1}| &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \mathbf{r_1} \circlearrowleft \mathbf{r_2} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -5\mathbf{r_1} \\ +2\mathbf{r_1} \end{matrix} = \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\frac{1}{6}\mathbf{r_2} \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{6} \end{vmatrix} = -(1 \cdot 6 \cdot (-\tfrac{3}{6})) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_{x_2}| &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathbf{r_1} \\ +2\mathbf{r_1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Rozvojem podle} \\ \text{prvního} \\ \text{sloupce} \end{matrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 9 \end{aligned}$$

$$|A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathbf{r_1} \\ +2\mathbf{r_1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathbf{r_2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Nakonec určíme řešení soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{|A_{x_1}|}{|A|} = \tfrac{3}{3} = 1 \\ x_2 &= \tfrac{|A_{x_2}|}{|A|} = \tfrac{9}{3} = 3 \\ x_3 &= \tfrac{|A_{x_3}|}{|A|} = \tfrac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

2. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_2, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -8 \end{array}$$

Řešení : Nejprve určíme determinant soustavy:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{r} \\ -\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \\ -3\mathbf{r_1} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{r} \\ \\ -3\mathbf{r_2} \\ +7\mathbf{r_2} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 25$$

Poté určíme determinant (vznikne náhradou druhého sloupce determinantu soustavy sloupcem pravých stran soustavy):

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -8 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{r} \\ -\mathbf{r_1} \\ +\mathbf{r_1} \\ -3\mathbf{r_1} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & -29 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{r} \\ \\ -8\mathbf{r_2} \\ +29\mathbf{r_2} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 29 & -5 \end{vmatrix} = 50$$

Nakonec určíme řešení soustavy:

$$x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{50}{25} = 2$$

8.6.1 Cramerovo pravidlo - příklady k procvičení

1. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_1, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -8 \end{array}$$

Řešení : $x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{25}{25} = 1$

2. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_3, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -8 \end{array}$$

Řešení : $x_3 = \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{-25}{25} = -1$

3. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_4, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -8 \end{array}$$

Řešení : $x_4 = \frac{|A_{x_4}|}{|A|} = \frac{75}{25} = 3$

4. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_1, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & -7 \end{array}$$

Řešení : $x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{-64}{-64} = 1$

5. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_2, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & -7 \end{array}$$

Řešení : $x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{64}{-64} = -1$

6. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_3, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & -7 \end{array}$$

Řešení : $x_3 = \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{0}{-64} = 0$

7. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_4, jestliže

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & -7 \end{array}$$

Řešení : $x_4 = \frac{|A_{x_4}|}{|A|} = \frac{-128}{-64} = 2$

8. Pomocí Cramerova pravidla nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \end{array}$$

Řešení : $\overline{\mathbf{x}} = (3, 2, 1)$

Kapitola 9

Vlastní čísla a vlastní vektory

9.1 Vlastní čísla a vlastní vektory

1. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{v}}$ je vlastním vektorem matice A, jestliže výsledek součinu $A\overline{\mathbf{v}}$ je vektor, který je násobkem vektoru $\overline{\mathbf{v}}$.

Protože

$$A\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

je vektor $\overline{\mathbf{v}} = (1, 1, 1)$ vlastním vektorem zadané matice A. Podobně:

$$A\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

proto je vektor $\overline{\mathbf{v}} = (2, 2, 2)$ vlastním vektorem zadané matice A.

2. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vektor $\overline{\mathbf{v}}$ je vlastním vektorem matice A, jestliže výsledek součinu $A\overline{\mathbf{v}}$ je vektor, který je násobkem vektoru $\overline{\mathbf{v}}$.

Protože

$$A\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

je vektor $\overline{\mathbf{v}} = (0, -1, 1)$ vlastním vektorem zadané matice A. Ale:

$$A\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

není násobek vektoru $\overline{\mathbf{v}} = (2, 2, 2)$. Proto $\overline{\mathbf{v}} = (2, 2, 2)$ není vlastním vektorem zadané matice A.

3. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Nejprve určíme vlastní čísla z rovnice:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Úpravou pravé strany obdržíme:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 &= 0 \\ 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této kvadratické rovnice jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 1$.

Pro každé z těchto vlastních čísel nalezneme k němu příslušející vlastní vektory.

Nejprve uvažujme vlastní číslo $\lambda_1 = 3$ a hledejme k němu příslušející vlastní vektor $\overline{\mathbf{v}} = (x_1, x_2)$. Jeho složky jsou řešením soustavy lineárních rovnic (zapsáno maticově):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (2-\lambda_1) & 1 & 0 \\ 1 & (2-\lambda_1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Volíme-li parametr $x_2 = t$, zjistíme z první rovnice, že $x_1 = t$. Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ proto přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1,1)$, kde $t \in \mathbb{C} - \{0\}$ (uvažujeme komplexní nenulové vektory).

Nyní uvažujme vlastní číslo $\lambda_2 = 1$ a hledejme k němu příslušející vlastní vektor $\overline{\mathbf{v}} = (x_1, x_2)$. Jeho složky jsou řešením soustavy lineárních rovnic (zapsáno maticově):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (2-\lambda_2) & 1 & 0 \\ 1 & (2-\lambda_2) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Volíme-li parametr $x_2 = t$, zjistíme z první rovnice, že $x_1 = -t$. Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ proto přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(-1,1)$, kde $t \in \mathbb{C} - \{0\}$ (uvažujeme komplexní nenulové vektory).

Výsledkem tedy je:

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1,1)$, kde $t \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(-1,1)$, kde $t \in \mathbb{C} - \{0\}$.

9.1.1 Vlastní čísla a vlastní vektory - příklady k procvičení

1. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ a $\overline{\mathbf{v}}_2$ jsou vlastními vektory matice A, $\overline{\mathbf{v}}_3$ není vlastním vektorem matice A.

2. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ je vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ není vlastním vektorem matice A.

3. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ je vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ je vlastním vektorem matice A.

4. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ je vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ není vlastním vektorem matice A.

5. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ není vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ je vlastním vektorem matice A.

6. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ je vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ není vlastním vektorem matice A.

7. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ je vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ není vlastním vektorem matice A.

8. Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : $\overline{\mathbf{v}}_1$ není vlastním vektorem matice A, $\overline{\mathbf{v}}_2$ není vlastním vektorem matice A.

9. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vlastnímu číslu $\lambda_1 = -2$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(-4, 3)$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 5$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1, 1)$.

10. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vlastnímu číslu $\lambda_1 = -2$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(-4, 5)$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 7$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1, 1)$.

11. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1,1)$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(-2,1)$.

12. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(-5,4)$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1,0)$.

13. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1,0)$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(3,1)$.

14. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

Řešení : Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 5$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(2,3)$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 6$ přísluší vlastní vektory $\overline{\mathbf{v}} = t(1,2)$.

9.2 Lokalizace spektra

1. Lokalizujte spektrum komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & i & -i \\ 0 & 3+4i & 1+i \end{pmatrix}$$

Řešení : Podle Geršgorinovy věty leží vlastní čísla matice A uvnitř kruhů K_1, K_2 a K_3, v Gaussově rovině, kde středem kruhu K_1 je $a_{11} = 1$, středem kruhu K_2 je $a_{22} = i$ a středem kruhu K_3 je $a_{33} = 1 + i$. Poloměr kruhu K_i získáme tak, že sečteme absolutní hodnoty čísel v i-tém řádku, kromě čísla na diagonále. To jest:

$$\begin{aligned} r_1 &= |2| + |-1| = 2 + 1 = 3 \\ r_2 &= |2| + |-i| = 2 + 1 = 3 \\ r_3 &= |0| + |3 + 4i| = 0 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{aligned}$$

Proto pro množinu vlastních čísel (tzv. spektrum) matice A (značíme ji $\sigma(A)$) platí:

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3,}}$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 3\}}} \\ K_2 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 3\}}} \\ K_3 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1 + i)| \leq 5\}}} \end{aligned}$$

2. Lokalizujte spektrum reálné symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení : V případě, že matice A je reálná a symetrická, leží její vlastní čísla uvnitř intervalů K_1, K_2 a K_3 (na reálné ose), kde středem intervalu K_1 je $a_{11} = 1$, středem intervalu K_2 je $a_{22} = 3$ a středem intervalu K_3 je $a_{33} = 0$. Poloměr intervalu K_i získáme tak, že sečteme absolutní hodnoty čísel v i-tém řádku, kromě čísla na diagonále. To jest:

$$\begin{aligned} r_1 &= |2| + |-1| = 2 + 1 = 3 \\ r_2 &= |2| + |-3| = 2 + 3 = 5 \\ r_3 &= |-1| + |3| = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Proto pro množinu vlastních čísel (tzv. spektrum) matice A (značíme ji $\sigma(A)$) platí:

$$\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3,$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \langle 1-3, 1+3\rangle = \langle -2, 4\rangle \\ K_1 &= \langle 3-5, 3+5\rangle = \langle -2, 8\rangle \\ K_3 &= \langle 0-4, 0+4\rangle = \langle -4, 4\rangle \end{aligned}$$

Proto

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq \langle -2, 4\rangle \cup \langle -2, 8\rangle \cup \langle -4, 4\rangle = \langle -4, 8\rangle}}$$

3. Lokalizujte spektrum reálné symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 12 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a ověřte, že je pozitivně definitní.

Řešení : V případě, že matice A je reálná a symetrická, leží její vlastní čísla uvnitř intervalů K_1, K_2 a K_3 (na reálné ose), kde středem intervalu K_1 je $a_{11} = 5$, středem intervalu K_2 je $a_{22} = 12$ a středem intervalu K_3 je $a_{33} = 2$. Poloměr intervalu K_i získáme tak, že sečteme absolutní hodnoty čísel v i-tém řádku, kromě čísla na diagonále. To jest:

$$\begin{aligned} r_1 &= |1| + |-1| = 1 + 1 = 2 \\ r_2 &= |1| + |0| = 1 + 0 = 1 \\ r_3 &= |-1| + |0| = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Proto pro množinu vlastních čísel (tzv. spektrum) matice A (značíme ji $\sigma(A)$) platí:

$$\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3,$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \langle 5-2, 5+2\rangle = \langle 3,7\rangle \\ K_1 &= \langle 12-1, 12+1\rangle = \langle 11,13\rangle \\ K_3 &= \langle 2-1, 2+1\rangle = \langle 1,3\rangle \end{aligned}$$

Proto

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq \langle 3,7\rangle \cup \langle 11,13\rangle \cup \langle 1,3\rangle = \langle 1,7\rangle \cup \langle 11,13\rangle}}$$

Z tohoto výsledku je jasné, že **všechna vlastní čísla zadané matice jsou kladná**. Jestliže má reálná symetrická matice kladná vlastní čísla, **je jistě pozitivně definitní** (plyne to okamžitě z jejího spektrálního rozkladu).

9.2.1 Lokalizace spektra - příklady k procvičení

1. Lokalizujte spektrum komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ 1+i & i & 0 \\ 1 & 2+i & 2-i \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3,}}$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 3\}}} \\ K_2 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq \sqrt{2}\}}} \\ K_3 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z-(2-i)| \leq 1+\sqrt{5}\}}} \end{aligned}$$

2. Lokalizujte spektrum komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} i & 3i & 1 \\ 1+3i & 1+i & 2 \\ 1 & 8+6i & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3,}}$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 4\}}} \\ K_2 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1+i)| \leq 2 + \sqrt{10}\}}} \\ K_3 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| \leq 11\}}} \end{aligned}$$

3. Lokalizujte spektrum komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} -i & i & -i \\ 3i & 2i & 2 \\ 4 & 8 & 2i \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3 = K_1 \cup K_3,}}$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| \leq 2\}}} \\ K_2 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| \leq 5\}}} \\ K_3 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| \leq 12\}}} \end{aligned}$$

4. Lokalizujte spektrum komplexní matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -11 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3,}}$$

kde

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 3\}}} \\
K_2 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \le 6\}}} \\
K_3 &= \underline{\underline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z+11| \le 3\}}}
\end{aligned}
$$

5. Lokalizujte spektrum reálné symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq \langle -2, 4\rangle \cup \langle -5, 5\rangle \cup \langle 11, 19\rangle = \langle -5, 5\rangle \cup \langle 11, 19\rangle}}$$

6. Lokalizujte spektrum reálné symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq \langle 9, 11\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 3, 7\rangle}}$$

7. Lokalizujte spektrum reálné symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq \langle 1, 9\rangle \cup \langle -1, 3\rangle \cup \langle 0, 8\rangle = \langle -1, 9\rangle}}$$

8. Lokalizujte spektrum reálné symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení :

$$\underline{\underline{\sigma(A) \subseteq \langle -2, 2\rangle \cup \langle 5, 9\rangle \cup \langle 2, 6\rangle = \langle -2, 9\rangle}}$$