Cvičná písemka

1.) Bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2 - x_3y_1,$$

kde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3); \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}$. Určete matici bilineární formy f vzhledem k bázi $G = \{(1, 1, 1);\ (0, -1, 1);\ (0, 1, 2)\}$.

1.) Bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + 5x_2y_2 + 8x_3y_2 + x_3y_3,$$

kde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3); \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}$. Určete matice její symetrické a antisymetrické části vzhledem ke standardní bázi a poté předpisy její symetrické a antisymetrické části.

2.) Nalezněte matici kvadratické formy Q_f, která je dána předpisem

$$Q_f(\overline{x}) = 2x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 - 7x_2x_3 + x_3^2,$$

kde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ a to vzhledem k bázi $G = \{(1, 0, -1);\ (0, 2, 1);\ (0, 0, 3)\}$.

2.) Klasifikujte kvadratickou formu $Q_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je $\forall \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dána předpisem

$$Q_f(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

3.) Nalezněte všechny vektory kolmé na vektor $(2, 1, 8)$.

3.) Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu ortogonalizujte bázi $G = \{\overline{\mathbf{g_1}} = (1, 2, -1), \overline{\mathbf{g_2}} = (0, -1, 2), \overline{\mathbf{g_3}} = (0, 1, -1)\}$ v R^3 vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

4.) Ověřte, zda jsou vektory $\overline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ vlastními vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.) Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$.

5.) Určete hodnotu determinantu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$