Matice

Označme: Matice značíme velkými písmeny:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \overset{(m,n)}{(a_{ij})} = \overset{(m,n)}{A}$$

Sčítání matic: Př: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

Obecně: $\overset{(m,n)}{(a_{ij})} + \overset{(m,n)}{(b_{ij})} = \overset{(m,n)}{(c_{ij})}$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Pozor!: Př: $\overset{(2,3)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}} + \overset{(2,2)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \neq$ není definováno, sčítáme pouze matice stejných typů!

Nulová matice: Značíme ji O. Všechny její prvky jsou rovny nule

$$\Rightarrow \quad O = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \text{ kde } \forall i \in \{1,\dots,m\}\ \forall j \in \{1,\dots,n\}: a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \overset{(m,n)}{A} + \overset{(m,n)}{O} = \overset{(m,n)}{A} \\ \overset{(m,n)}{O} + \overset{(m,n)}{A} = \overset{(m,n)}{A} \end{array}}$$

Komutativnost sčítání: $\boxed{A + B = B + A}$ - Pořadí sčítání matic můžeme měnit, plyne to z komutativnosti sčítání reálných čísel. Př:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1+0) & (-1+1) \\ (2+2) & (3+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0+1) & (1-1) \\ (2+2) & (4+3) \end{pmatrix} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} + \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Násobení matice číslem (reálným/komplexním): Př: $3\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\6&12\end{pmatrix}$

Obecně: $\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha}\,(a_{ij})^{(m,n)} = (c_{ij})^{(m,n)}$, kde $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$

Transpozice: Z řádků uděláme sloupce (případně ze sloupců řádky - vyjde totéž)

Př: $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\3&0\end{pmatrix}$

Skalární součin vektorů (aritmetických): Př: 1.) $(1,-1,2)\cdot(3,1,4)=1\cdot3+(-1)\cdot1+2\cdot4=\underline{\underline{10}}$

2.) $(1,0,3,0)\cdot(2,1,-1,0)=1\cdot2+0\cdot1+3\cdot(-1)+0\cdot0=\underline{\underline{-1}}$

3.) $(1,2,0)\cdot(1,3,2) = 1+6+0=\underline{\underline{7}}$

4.) $(1,-1,3)\,(1,3,6) = 1-3+18=\underline{\underline{16}}$

5.) $(1,2,5)\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = 1-2+20=\underline{\underline{19}}$

Násobení matic: Př: 1.) $\overset{(1,3)}{(1\;\;2\;\;5)}\overset{(3,2)}{\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\4&3\end{pmatrix}} = \overset{(1,2)}{(19\;\;17)}$

2.) $\overset{(1,3)}{(1\;\;0\;\;-1)}\overset{(3,3)}{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&5&4\end{pmatrix}} = \overset{(1,3)}{(-1\;\;-3\;\;-1)}$

3.) $\overset{(2,3)}{\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}}\overset{(3,3)}{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&5&4\end{pmatrix}} = \overset{(2,3)}{\begin{pmatrix}1&-3&-1\\8&20&19\end{pmatrix}}$

obecně: $\underbrace{(a_{ij})^{(m,n)}}_{A}\cdot\underbrace{(b_{ij})^{(n,p)}}_{B} = (c_{ij})^{(m,p)}$, kde

$c_{ij}=\overline{r}_{iA}\cdot\overline{s}_{jB}$ = řádek i-tý z matice A krát sloupec j-tý z matice B - výsledné číslo je v i-tém řádku a j-tém sloupci matice (A·B)

Jednotková matice : Je to čtvercová matice, která má na diagonále jedničky, jinde nuly. Násobíme-li matici A jednotkovou maticí, výsledkem je opět A:

Př:

1.) $\underbrace{\overset{(3,3)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{E} \underbrace{\overset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}}_{A} = \underbrace{\overset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}}_{A}$

2.) $\underbrace{\overset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}}_{A} \underbrace{\overset{(2,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A}$

obecně:

$$\boxed{\begin{aligned} \overset{(m,n)}{A} \cdot \overset{(n,n)}{E} &= A \\ \overset{(m,m)}{E} \cdot \overset{(m,n)}{A} &= A \end{aligned}}$$

Pozor! Násobení matic není komutativní! Tj. obecně neplatí, že $A \cdot B = B \cdot A$ (ale stát se to může).

Př: Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

Př: Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$

$0.)\ (A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Vlastnosti:

$1.)\ A+B = B+A$

$2.)\ (A+B)+C = A+(B+C)$

$3.)\ (\alpha+\beta)\cdot A = \alpha A+\beta A$

$4.)\ \alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$

$5.)\ \alpha(\beta A) = (\alpha\cdot\beta)A$

$6.)\ E\cdot A = A\cdot E = A$

$7.)\ A\cdot 0 = 0\cdot A = 0 \qquad \left(0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right)$

$8)\ A(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

$9.)\ A(B+C) = AB+A\cdot C$

$10.)\ (A+B)\cdot C = AC+BC$

Důkaz:

$1.)\ (a_{ij})+(b_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = (b_{ij})+(a_{ij})$

$2.)\ (A+B)+C = ((a_{ij})+(b_{ij}))+(c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) =$

$= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) = (a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij}) = (a_{ij})+((b_{ij})+(c_{ij})) = A+(B+C)$

$3.)\ (\alpha+\beta)\cdot A = (\alpha+\beta)(a_{ij}) = ((\alpha+\beta)a_{ij}) = (\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij})+(\beta a_{ij}) = \alpha(a_{ij})+\beta(a_{ij}) =$

$= \alpha A+\beta A$

4.)

⋮

$$8.)\ \overset{(m,n)}{(A}\cdot\overset{(m,p)}{B)}\cdot\overset{(p,s)}{C} = \left[(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}\ (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}\right]\cdot(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,s}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}\cdot(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,s}} =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,s}} =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kr}c_{rj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,s}} = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{p} a_{ik}(b_{kr}c_{rj})\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,s}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot\left(\sum_{r=1}^{p} b_{kr}c_{rj}\right)\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,s}} = (a_{ij})\cdot((b_{ij})\cdot(c_{ij})) =$$

$$= A\cdot(B\cdot C)$$

Př. Nechť $A = \begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\2&0&3\end{pmatrix}$. Numericky výhodně vypočtěte:

a) $3A+3B =$

$$\underbrace{3\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\2&0&3\end{pmatrix}}_{9\text{ násobení}} = \underbrace{\begin{pmatrix}3&-3&0\\9&0&3\\6&0&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3&3&3\\-3&0&3\\6&0&9\end{pmatrix}}_{9\text{ součtů}} = \begin{pmatrix}6&0&3\\6&0&6\\12&0&12\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{3(A+B) = 3\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\2&0&3\end{pmatrix}}_{9\text{ součtů}}\Bigg) = \underbrace{3\begin{pmatrix}2&0&1\\2&0&2\\4&0&4\end{pmatrix}}_{9\text{ násobení}}}_{\Downarrow} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}6&0&3\\6&0&6\\12&0&12\end{pmatrix}}}$$

„správný" postup

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}}_{3\cdot(3m+2s)\,+\,3\cdot(3m+2s)\,=\,18m+12s} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\10\\8\end{pmatrix}}_{3s} = \begin{pmatrix}2\\14\\11\end{pmatrix}$$

$18m+15s$

$$A\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right)}_{3s} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}}_{3\cdot(3m+2s)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\14\\11\end{pmatrix}}}$$

$9m+9s$

c) $(A\cdot B)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} =$

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\2&0&3\end{pmatrix}\right)}_{9\cdot(3m+2s)\,=\,27m+18s}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2&1&0\\5&3&6\\4&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{3\cdot(3m+2s)\,=\,9m+6s} = \begin{pmatrix}3\\14\\11\end{pmatrix}$$

$36m+24s$

$$A\cdot\left(B\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = A\cdot\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{9m+6s}\Bigg) = \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}}_{9m+6s} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\14\\11\end{pmatrix}}}$$

$18m+12s$

2. k. cvičení

Př: Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ určete

1.) $A+B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$

2.) $3A+3B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 15 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}}}$

3.) $A^T + B^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

4.) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}$

5.) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}}$

6.) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$

7.) $(A^3 =)\ A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 18 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}}}$

8.) $A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 18 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}}}$

9.) $A \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 11 & -1 & 9 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}}}$

10.) $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}}}$

11.) $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}}$

12.) $\underbrace{A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}_{\text{Toto uzávorkování je numericky výhodnější}}$