Inverzní matice

Def. (Inverzní matice): Nechť A je čtvercová matice. Maticí inverzní k matici A nazveme matici A^{-1} splňující:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Poznámka: 1.) Ne každá matice má k sobě matici inverzní. (Ty, co mají, se nazývají regulární, ty, co ne, singulární.)

2.) Pokud $A \cdot A^{-1} = E$, bude platit i $A^{-1} \cdot A = E$.
(Ale pozor! Obecně NEPLATÍ, že $A \cdot B = B \cdot A$ – AB může vyjít jinak, než BA !!!)

3.) Postup při hledání A^{-1}:

$$(A \mid E) \sim \dots \sim (E \mid A^{-1})$$

(Můžeme vyměňovat řádky, násobit nenul. číslem, přičítat řádky k jiným.)

Př.: Nalezněte matici inverzní k matici A.

1.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\right)_{-2r_1} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right)^{+2r_2} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right)_{\cdot(-1)} \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Zk: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ OK.!

Př: Nalezněte matici inverzní k matici A

1.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} \text{ neexistuje!}}}$$

2.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} +2r_3 \\ -r_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} +3r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

ZK: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ok!

3.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{matrix} +r_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{matrix} -2r_2 \\ \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

ZK.: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ok!