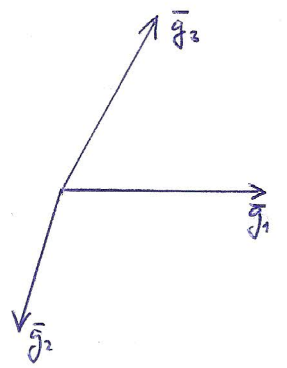
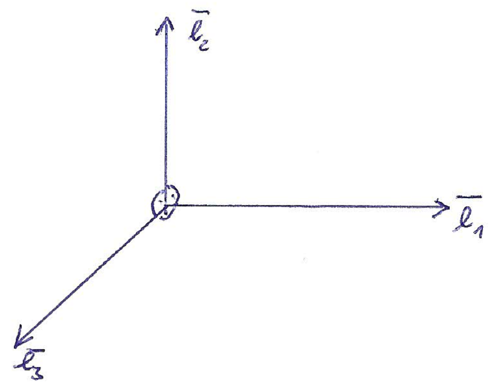
Gramm-Schmidtův ortonormalizační proces





Báze $G = \{\bar g_1, \bar g_2, \bar g_3\}$ $\longrightarrow$ Báze $E = \{\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\}$

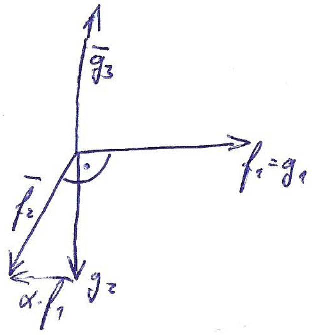
jsou navzáj. kolmé $\Leftrightarrow$
1.) $(\bar e_1, \bar e_2) = 0$
2.) $(\bar e_1, \bar e_3) = 0$
3.) $(\bar e_2, \bar e_3) = 0$
} je ortogonální } je ortonormální

mají jednotkovou Eukl. normu („délku“ - pokud jde o obvyklý skal. součin) $\Leftrightarrow$
1.) $(\bar e_1, \bar e_1) = 1$
2.) $(\bar e_2, \bar e_2) = 1$
3.) $(\bar e_3, \bar e_3) = 1$

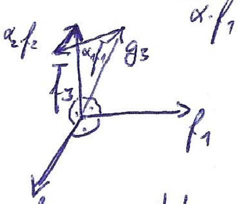
Postup: I.) Nejprve vytvoříme bázi $F = \{\bar f_1, \bar f_2, \bar f_3\}$, která je ortogonální.

1.) $\bar f_1 = \bar g_1$

2.) $\bar f_2 = \bar g_2 + \alpha . \bar f_1$ tak, aby $\bar f_1 \cdot \bar f_2 = 0$



3.) $\bar f_3 = \bar g_3 + \alpha_1 \bar f_1 + \alpha_2 \bar f_2$ tak, aby $\bar f_1 \cdot \bar f_3 = 0$
$\bar f_2 \cdot \bar f_3 = 0$



II.) Normujeme vektory z báze F na „jednotkovou velikost“

1.) $\bar e_1 = \frac{1}{\|\bar f_1\|} \cdot \bar f_1 = \frac{1}{\sqrt{\bar f_1 \cdot \bar f_1}} \bar f_1$

2.) $\bar e_2 = \frac{1}{\|\bar f_2\|} \bar f_2 = \frac{1}{\sqrt{\bar f_2 \cdot \bar f_2}} \bar f_2$

3.) $\bar e_3 = \frac{1}{\|\bar f_3\|} \bar f_3 = \frac{1}{\sqrt{\bar f_3 \cdot \bar f_3}} \bar f_3$

Př. Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte ortonormální bázi E víte-li, že vektory $\bar{g}_1 = (1,1,0)$, $\bar{g}_2 = (0,1,1)$, $\bar{g}_3 = (1,0,1)$ tvoří bázi a skalární součin je dán předpisem $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)$ a $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3)$.

I) 1.) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = \underline{\underline{(1,1,0)}}$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{f}_1 = (0,1,1) + \alpha(1,1,0)$ tak, aby $\bar{f}_1 \bar{f}_2 = 0$

$$(1,1,0)[(0,1,1) + \alpha(1,1,0)] = 0$$
$$1 + \alpha \cdot 2 = 0$$
$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$\bar{f}_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}(-1,1,2)$

přeznačíme:

$\underline{\underline{\bar{f}_2 = (-1,1,2)}}$

3.) $\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 = (1,0,1) + \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-1,1,2)$ tak, aby $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_3 = 0$, $\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_3 = 0$

$$(1,1,0) \cdot [(1,0,1) + \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-1,1,2)] = 0$$
$$(-1,1,2) \cdot [(1,0,1) + \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-1,1,2)] = 0$$

$$1 + \alpha_1 \cdot 2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}$$
$$1 + 0 + \alpha_2 6 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{6}$$

$\bar{f}_3 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(-1,1,2)$

$\bar{f}_3 = \frac{1}{6}(6,0,6) + \frac{1}{6}(-3,-3,0) + \frac{1}{6}(1,-1,-2)$

$\bar{f}_3 = \frac{1}{6}(4,-4,4) = \frac{4}{6}(1,-1,1)$

přeznačíme:

$\underline{\underline{\bar{f}_3 = (1,-1,1)}}$

II.) Normujeme:

1.) $\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{f}_1\|} \cdot \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1,1,0)(1,1,0)}}(1,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

2.) $\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{f}_2\|} \cdot \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1,1,2)(-1,1,2)}}(-1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

3.) $\bar{e}_3 = \frac{1}{\|\bar{f}_3\|} \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{(1,-1,1)(1,-1,1)}}(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$$\underline{\underline{E = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0);\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2);\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}}}$$

Př. Určete souřadnice vektoru $\bar{x} = (1,-8,6)$ vzhledem k ortogonální bázi $E = \{(1,1,0);(-1,1,2);(1,-1,1)\}$.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$ řešením této soustavy jsou hledané souřadnice.

Nebo:

b)

$$(1,-8,6) \overset{?}{=} k_1(1,1,0) + k_2(-1,1,2) + k_3(1,-1,1) \quad / \cdot (1,1,0) \quad / \cdot (-1,1,2) \quad / \cdot (1,-1,1)$$

$$-7 = k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0$$

$$3 = 0 \cdot k_1 + k_2 \cdot 6 + k_3 \cdot 0$$

$$15 = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 3$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{7}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad (1,-8,6)_{\langle E \rangle} = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 5\right)$$

Př: Je dána báze $G=\{(1,0,-1);(0,1,3);(0,1,-1)\}$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte bázi E, která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, kde $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

1.) $\underline{\bar{f}_1=\bar{g}_1 = (1,0,-1)}$

2.) $\bar{f}_2=\bar{g}_2+\alpha\bar{f}_1 = (0,1,3)+\alpha(1,0,-1)$, kde $\bar{f}_1\cdot\bar{f}_2=0 \Rightarrow$

$$(1,0,-1)\left[(0,1,3)+\alpha(1,0,-1)\right]=0$$
$$-3+\alpha\cdot 2 = 0$$
$$\alpha=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\bar{f}_2 = (0,1,3)+\frac{3}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{3}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ přeznačíme: $\underline{\bar{f}_2=(3,2,3)}$

3.) $\bar{f}_3=\bar{g}_3+\alpha_1\bar{f}_1+\alpha_2\bar{f}_2 = (0,1,-1)+\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(3,2,3)$, kde $\bar{f}_1\bar{f}_3=0$ a $\bar{f}_2\bar{f}_3=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&(1,0,-1)\cdot\left[(0,1,-1)+\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(3,2,3)\right]=0\\&(3,2,3)\cdot\left[(0,1,-1)+\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(3,2,3)\right]=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\begin{aligned}&1+\alpha_1\cdot 2+\alpha_2\cdot 0=0 \Rightarrow \alpha_1=-\frac{1}{2}\\&-1+\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 22=0 \Rightarrow \alpha_2=\frac{1}{22}\end{aligned}$$

$\bar{f}_3=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)+\frac{1}{22}(3,2,3) = \left(0,\frac{22}{22},-\frac{22}{22}\right)+\left(-\frac{11}{22},0,\frac{11}{22}\right)+\left(\frac{3}{22},\frac{2}{22},\frac{3}{22}\right)=\left(-\frac{8}{22},\frac{24}{22},-\frac{8}{22}\right) \Rightarrow$

přeznačíme $\underline{\bar{f}_3=(-1,3,-1)}$

4.)

$$\left.\begin{aligned}\bar{e}_1&=\frac{1}{\|\bar{f}_1\|}\cdot\bar{f}_1=\frac{1}{\sqrt{(1,0,-1)(1,0,-1)}}(1,0,-1)=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}}\\ \bar{e}_2&=\frac{1}{\|\bar{f}_2\|}\bar{f}_2=\frac{1}{\sqrt{(3,2,3)(3,2,3)}}(3,2,3)=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{22}}(3,2,3)}}\\ \bar{e}_3&=\frac{1}{\|\bar{f}_3\|}\bar{f}_3=\frac{1}{\sqrt{(-1,3,-1)(-1,3,-1)}}(-1,3,-1)=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{11}}(-1,3,-1)}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{E=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1);\frac{1}{\sqrt{22}}(3,2,3);\frac{1}{\sqrt{11}}(-1,3,-1)\right\}}}$$

Př: Je dána báze $G = \{(1,1,1); (0,1,3); (0,0,1)\}$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte bázi E, která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \quad, \text{kde } \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ \bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$$

1.) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = \underline{(1,1,1)}$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{f}_1$, kde $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) + \alpha(1,1,1)$, kde $(1,1,1)\cdot[(0,1,3)+\alpha(1,1,1)] = 0$

$5 + \alpha \cdot 5 = 0$

$\Leftarrow \quad \alpha = -1$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) - 1\cdot(1,1,1)$

$\bar{f}_2 = \underline{(-1,0,2)}$

3.) $\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2$, kde: $\bar{f}_1\bar{f}_3 = 0$, $\bar{f}_2\bar{f}_3 = 0$

$\bar{f}_3 = (0,0,1) + \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,2)$, kde: $(1,1,1)[(0,0,1)+\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,0,2)] = 0$

$(-1,0,2)[(0,0,1)+\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(-1,0,2)] = 0$

$1 + 5\alpha_1 + \alpha_2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{5}$

$2 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{3}$

$\bar{f}_3 = (0,0,1) - \frac{1}{5}(1,1,1) - \frac{1}{3}(-1,0,2) = \left(\frac{2}{15}, \frac{-3}{15}, \frac{2}{15}\right)$

přeznačíme: $\bar{f}_3 = \underline{(2,-3,2)}$

4.)

$\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\bar{f}_1\|}\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot1^2+2\cdot1^2+1^2}}(1,1,1) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1)}}$

$\bar{e}_2 = \frac{1}{\|\bar{f}_2\|}\cdot\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot(-1)^2+2\cdot0^2+2^2}}(-1,0,2) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2)}}$

$\bar{e}_3 = \frac{1}{\|\bar{f}_3\|}\cdot\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot2^2+2\cdot(-3)^2+2^2}}(2,-3,2) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-3,2)}}$

tvoří bázi E

Př: Je dána báze $G = \{(1,0,-3);\ (0,1,3);\ (0,1,-1)\}$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu vytvořte bázi E, která je ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\ ,\ \text{kde}\ \bar{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\ \text{a}\ \bar{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$$

1.) $\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = \underline{(1,0,-3)}$

2.) $\bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \cdot \bar{f}_1 = (0,1,3) + \alpha(1,0,-3)$

chceme: $\bar{f}_1 \perp \bar{f}_2 \Leftrightarrow \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$

$(1,0,-3) \cdot [(0,1,3) + \alpha(1,0,-3)] = 0$

$-9 + \alpha \cdot 10 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{10}$

$\bar{f}_2 = (0,1,3) + \frac{9}{10}(1,0,-3) = \left(\frac{9}{10}, \frac{10}{10}, \frac{3}{10}\right)$

přeznačíme:

$\bar{f}_2 = \underline{(9,10,3)}$

3.) $\bar{f}_3 = g_3 + \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 = (0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(9,10,3)$

chceme: $\bar{f}_1 \perp \bar{f}_3$ a $\bar{f}_2 \perp \bar{f}_3$ tzn.

$(1,0,-3)[(0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(9,10,3)] = 0$

$(9,10,3)[(0,1,-1) + \alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(9,10,3)] = 0$

$3 + \alpha_1 10 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-3}{10}$

$7 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 190 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{-7}{190}$

$\bar{f}_3 = (0,1,-1) + \frac{-3}{10}(1,0,-3) + \frac{-7}{190}(9,10,3)$

$\bar{f}_3 = \left(0, \frac{190}{190}, \frac{-190}{190}\right) + \left(\frac{-57}{190}, 0, +\frac{171}{190}\right) + \left(\frac{-63}{190}, \frac{-70}{190}, \frac{-21}{190}\right)$

$\bar{f}_3 = \left(\frac{-120}{190}, \frac{120}{190}, \frac{-40}{190}\right) \Rightarrow$ přeznačíme $\bar{f}_3 = \underline{(-6,6,-2)}$

4.)

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \frac{1}{\|\bar{f}_1\|} \cdot \bar{f}_1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (1,0,-3)}} \\ \bar{e}_2 &= \frac{1}{\|\bar{f}_2\|} \cdot \bar{f}_2 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{190}} (9,10,3)}} \\ \bar{e}_3 &= \frac{1}{\|\bar{f}_3\|} \bar{f}_3 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{76}} (-6,6,-2)}} \end{aligned}\right\}\ \text{tvoří bázi E}$$