Determinant

1. řádu: $|a| = a$ $\Rightarrow$ Např. $|5| = 5$, $|-3| = -3$ (Pozor, nejde o absolutní hodnotu, i když se značí stejně!!!)

2. řádu: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ $\Rightarrow$ Např. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-1)(2) = 2+2 = \underline{4}$

3. řádu: Můžeme počítat rozvojem podle sloupce (či řádku), Sarrusovým pravidlem, nebo úpravou na Δ tvar. Např.: Určete hodnotu determinantu matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

a) Rozvojem: Můžeme si vybrat libovolný sloupec, nebo řádek. My si vybereme třeba 2. řádek (snažíme se, aby vybraný sloupec/řádek měl co nejvíce nul – usnadní nám to výpočet)

řádek, sloupec, kde je 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

vynecháme v A řádek a sloupec kde je 3.

$$= 3\cdot(-1)^3\Big[\underbrace{(-1)(-1) - 5\cdot 2}_{1-10}\Big] + 2(-1)^5\Big[\underbrace{1\cdot 5 - 0\cdot(-1)}_{5}\Big] = \underbrace{-3\cdot(-9)}_{27} \underbrace{-2\cdot 5}_{-10} = \underline{\underline{17}}$$

b) Sarrusovo pravidlo: Např.: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 7) - (3\cdot 5\cdot 7 + 4\cdot 2\cdot 9 + 8\cdot 6\cdot 1) \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 0\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 5\cdot 2 - (0\cdot 0\cdot 2 + 3(-1)(-1) + 5\cdot 2\cdot 1) =$$

$$= 0 + 0 + 30 - (0 + 3 + 10) = 30 - 13 = \underline{\underline{17}}$$

c) Úpravou na $\triangle$ tvar: Musíme vědět:

Např.: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4$

Např.: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ (výměnou sloupců se změní znaménko výsl. determinantu, taktéž u výměny řádků!)

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Např. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ (vynásobili jsme 1. řádek číslem 3 => => musíme kompenzovat vynásobeného determinantu číslem $\frac{1}{3}$)

Např.: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5)(-1) = 5$

Např.: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (Stačilo by udělat rozvoj podle 2. řádku)

=> Př.: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3r_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \end{matrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 15 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -5r_2 \end{matrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 17 = \underline{17}$

Př: Určete hodnotu determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Rozvojem: (Podle 1. sloupce)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\Big[\underbrace{1\cdot2\cdot1}_{2} + \underbrace{2\cdot1\cdot1}_{2} + \underbrace{1\cdot1\cdot(-1)}_{-1} - \big(\underbrace{1\cdot2\cdot(-1)}_{-2} + \underbrace{1\cdot2\cdot1}_{2} + \underbrace{1\cdot1\cdot1}_{1}\big)\Big] + 0 -$$

$- 1\cdot$ [vyjde nula - v determinantu jsou dva stejné řádky] $=$

$$= 2\cdot[\,3 - 1\,] = \underline{\underline{4}}$$

b) Úpravou na △ tvar

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ +2r_1 \\ +r_1 \end{array} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ -r_2 \end{array} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ (-3) \end{array} =$$

$$= (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ +5r_3 \end{array} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-1)\cdot(1)\cdot(-3)\cdot(4) = \underline{\underline{4}}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť A je čtvercová matice. Řešíme soustavu lineárních rovnic

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

Jestliže $|A| \neq 0$, pak

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|},$$

kde A_{x_i} vznikne z A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\overline{b}$.

Př: Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 2 - (0 + 4 - 1) = \underline{-3}$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} \ldots + 0 \cdot (-1)^{2+2} \ldots + (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) \cdot 0 = \underline{0}$$

$$|A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(6 - 3) = \underline{-6}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ x_2 &= \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{0}{-3} = 0 \\ x_3 &= \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\overline{x} = (1, 0, 2)}$$

Zk:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot 0 + 2 &= 3 \\ 2 \cdot 1 \quad - 2 &= 0 \\ -1 + 0 - 2 &= -3 \end{aligned} \quad \checkmark$$

Výpočet matice inverzní pomocí determinantů (matice adjungované)

Př: Určete matici inverzní k matici A

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.) Určíme $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$

2.) Určíme $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|4| & (-1)^{1+2}|2| \\ (-1)^{2+1}|-1| & (-1)^{2+2}|1| \end{pmatrix}^T$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Zk: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

1.) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3r_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$

2.) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19 & -11 & 5 \\ -11 & 7 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19 & -11 & -5 \\ -11 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}}}$

Zk: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 & -11 & -5 \\ -11 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓