Vlastní čísla a vlastní vektory

- Jestliže A je komplexní ~~m~~ čtvercová matice, pak vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme vektor $\bar{x} \in \mathbb{C}^n - \{\bar{o}\}$ splňující

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}}$$

Př:

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{\underset{\parallel}{3}} \cdot \underset{\bar{x}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = (0,2)$ je vlastní vektor matice A

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = (1,2)$ není vlastní vektor matice A

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\alpha(0,2)}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix}}} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = (0,2)$ je vl. vektor $\Rightarrow$ $\alpha(0,2)$ je také vlastní vektor matice A pro $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$

Př: Naleznete vlastní čísla a vlastní vektory dané matice A (komplexní čtvercové)

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$$
$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot E \cdot \bar{x}$$
$$A \cdot \bar{x} - \lambda E \bar{x} = \bar{o}$$
$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{o}$$
$$\underbrace{(A - \lambda E)}_{A^*}$$
$$A^* \bar{x} = \bar{o}$$

$\Rightarrow$ řešíme soustavu lin. rovnic $A^* \bar{x} = \bar{o}$, ta určitě řešení má, a to $\bar{x} = \bar{o}$, ale vlastní vektor musí být nenulový

$\Rightarrow$ chceme, aby tato soustava měla i jiné řešení

$\Leftrightarrow$ má nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow$

některý z řádků se při GEM vynuluje $\left(A^* \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow$

$|A^*| = 0$

$\Rightarrow$ 1) $|A - \lambda E| = 0$ $\Rightarrow$ určíme λ

2.) $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{o}$ $\Rightarrow$ určíme $\bar{x}$

Př: Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.) $|A - \lambda \cdot E| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 \\ -1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{3}} \end{cases}$$

2.) $(A - \lambda E) \cdot \bar{v} = \bar{o} \quad \Rightarrow$ řešme Gaussovou eliminační metodou

α) $\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} (1-1) & 0 & 0 \\ -1 & (3-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$v_2 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow v_1 = 2t \Rightarrow$

$\underline{\underline{\bar{v} = (2t, t) = t(2,1) \,,\, t \in \mathbb{R} - \{0\}}}$ $\qquad$ Zk: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

β) $\boxed{\lambda_2 = 3}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} (1-3) & 0 & 0 \\ -1 & (3-3) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} :(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$v_1 = 0 \,,\; v_2 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\underline{\underline{\bar{v} = (0, t) = t(0,1) \,,\, t \in \mathbb{R} - \{0\}}}$ $\qquad$ Zk: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

Př. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.) Nalezneme vlastní čísla λ : $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & 2 \\ 1 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right] =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (2-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = \begin{cases} \underline{\underline{2}} \\ \underline{\underline{3}} \\ \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

2.) Určíme vlastní vektory : $(A - \lambda I) \cdot \bar{v} = \bar{o}$

a) $\boxed{\lambda_1 = 2}$

GEM: $\left(\begin{array}{ccc|c} (2-2) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (2-2) & 2 & 0 \\ 1 & 0 & (2-2) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_2 = t \in \mathbb{C} \end{array}$

(neznámé v_1, v_2, v_3)

$\Rightarrow \bar{v}_1 = (0, t, 0) = \underline{\underline{t\,(0,1,0)\ ,\ t \in \mathbb{C} - \{0\}}}$

Zk: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

b) $\boxed{\lambda_2 = 3}$

GEM: $\left(\begin{array}{ccc|c} (2-3) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (2-3) & 2 & 0 \\ 1 & 0 & (2-3) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_2 = 2t \\ v_3 = t \end{array} \quad v_1 = t$

$\Rightarrow \bar{v}_2 = (t, 2t, t) = \underline{\underline{t\,(1,2,1)\ ,\ t \in \mathbb{C} - \{0\}}}$

Zk: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

c) $\boxed{\lambda_3 = 1}$

GEM: $\left(\begin{array}{ccc|c} (2-1) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (2-1) & 2 & 0 \\ 1 & 0 & (2-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = -t \\ v_2 = -2t \\ v_3 = t \in \mathbb{C} \end{array}$

$\Rightarrow \bar{v}_3 = (-t, -2t, t) = \underline{\underline{t\,(-1,-2,1)\ ,\ t \in \mathbb{C} - \{0\}}}$

Zk: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

Př: Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.) $\begin{vmatrix} (0-\lambda) & -1 \\ 1 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \begin{cases} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{-i}} \end{cases}$

2.) α) $\boxed{\lambda = i}$ $\Rightarrow$ řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right)_{\cdot i} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{array}\right)_{+r_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -ix_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = t \in \mathbb{C} \\ x_2 = -it \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{x} = (t, -it) = t(1, -i), \quad t \in \mathbb{C} - \{0\}}}$$

Zk: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ✓

β) $\boxed{\lambda = -i}$ $\Rightarrow$ řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right)_{\cdot i} \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right)_{-r_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow ix_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = t \in \mathbb{C} \\ x_2 = it \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{x} = (t, it) = t(1, i), \quad t \in \mathbb{C} - \{0\}}}$$

Zk: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ✓