Inverzní matice

U čtvercových matic A definujeme její inverzní matici $\bar{A}^1$ vztahem

$$A \cdot \bar{A}^1 = \bar{A}^1 \cdot A = I = \text{jednotková matice} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pro danou matici A najdeme $\bar{A}^1$ (pokud existuje) postupem:

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{na tvar}]{\text{převedeme}} (I \mid A^{-1})$$ ~~[illegible]~~

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. nalezněte $\bar{A}^1$ =>

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right)}_{\substack{\text{zde chceme} \\ \text{aby bylo} \\ 1\,0 \\ 0\,1}} \Big]+ \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Big]+ \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$\bar{A}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zkouška: $A \cdot \bar{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$ ✓ výsledek je v pořádku

Př: $\bar{A}^1 = ?$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_{\cdot(-4)} \Big]+ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right)_{\cdot(3)} \Big]+ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -20 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1:4 \\ 1:(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & +6 & 4 \end{array}\right) \Big]+ \sim$$

$$\sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$\bar{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

10:05

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí A^{-1}

Můžeme tak řešit soustavy n rovnic o n neznámých (pokud A^{-1} existuje).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad \text{.... maticový zápis soustavy lineárních rovnic}}$$

upravíme: $A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad / \cdot A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot \bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\underbrace{I \cdot \bar{x}}_{\bar{x}} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

=> **Př:** Máme nalézt řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \quad &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

=> Z předchozího příkladu víme, že $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Potom

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} = \overset{(3,3)}{\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}} \overset{(3,1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \overset{(3,1)}{\underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}}}}$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow x_1 = -5, \ x_2 = -5, \ x_3 = 7}}$$

10 : 15

Př: Vyřešte soustavu rovnic s více pravými stranami pomocí A^{-1}:

1. soust, 2. soust., 3. soustava

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \quad 0 \quad -2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \quad -2 \quad 0 \\ x_1 - 2x_2 = \underbrace{-1 \quad 1 \quad -2}_{B} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A \cdot \tilde{x} \approx B \\ \tilde{x} \approx \underbrace{A^{-1} \cdot B} \end{array}$$

~~[illegible]~~ ve sloupcích výsledné matice jsou řešení jednotlivých soustav

=> Určíme A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -3r_2 \\ \\ +5r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 9 \\ \cdot 9 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -45 & 9 & -27 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +5r_3 \\ -2r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 9 & -18 \\ 9 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

=> Řešení 1. soustavy: $\underline{\underline{\bar{x} = (1, 1, 1)}}$

=> Řešení 2. soustavy: $\underline{\underline{\bar{x} = (1, 0, -1)}}$

=> Řešení 3. soustavy: $\underline{\underline{\bar{x} = (-2, 0, 0)}}$