Soustavy lineárních rovnic

Př: $3x_1 - 2x_2 = 1$
$2x_1 + 5x_2 = 7$ } soustava 2 rovnic o 2 neznámých

otázka: Jaká čísla musíme dosadit za x_1 a x_2 ~~musíme~~, aby byly splněny rovnosti?

řešení: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Obecně: Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých zapisujeme ve tvaru:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

matice soustavy: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

matice soust. rozšířená: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ $\quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Čísla a_{ij} a b_i známe, cílem je určit $x_1, \dots, x_n$. Pozor! řešení nemusí vždy existovat! Pokud ano, jak jej určíme? Existuje více metod.

Gaussova eliminační metoda: Cílem je upravit matici M tak, aby pod diagonálou byly nuly. Pak určit $\bar{x}$.

Př: $x_1 + x_2 = 2$
$-x_1 + x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 2$
$0x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$ $\Rightarrow x_1 + 1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1)^T$

maticový zápis:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; +1\times(1.ř)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \; 1:2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \underline{\underline{1 \cdot x_2 = 1}} \Rightarrow$ $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 + 1 = 2$, $\underline{\underline{x_1 = 1}}$

Př. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$
$-x_1 + x_2 - x_3 = -2$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \text{ výměna řádků } \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. řádek vynásobit 3 a přičíst k 2. řádku pak 1. řádek vynásobíme 2 a přičteme k 3. řádku $\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \cdot 5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

3. řádek $\Rightarrow -3x_3 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$ 2. řádek $\Rightarrow 5x_2 - 2x_3 = -2 \Rightarrow 5x_2 - 2 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

1. řádek $\Rightarrow -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \Rightarrow -x_1 + 0 - 1 = -2$
$\underline{\underline{x_1 = 1}}$

9:30

Př. Následující soustava nemá řešení:

$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$-x_1+2x_2-x_3=2$$
$$x_1+x_2+x_3=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 0=-1 \text{ spor!} \Rightarrow$$ neexistují x_1, x_2, x_3 takové, aby platily všechny rovnosti zároveň.

$\Rightarrow$ nemá řešení

Př. Následující soustava má nekonečně mnoho řešení

$$x_1+x_3=5$$
$$x_1+x_2-x_3=0$$
$$3x_1+x_2+x_3=10$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)\text{ krát} \quad (-3)\text{ krát} \\ + \\ \quad\quad\quad + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1)\text{ krát} \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. řádek: $x_2-2x_3=-5$ (2 neznámé v jedné rovnici, proto jednu z nich zvolíme za parametr. Třeba $x_3=t\in\mathbb{R}$, x_2 pak musíme dopočítat) $\Rightarrow$ $x_3=t$

$$x_2-2t=-5$$
$$x_2=2t-5$$

1. řádek: $x_1+x_3=5$

$$x_1+t=5$$
$$x_1=-t+5$$

$\Rightarrow$ vektor řešení $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)=(-t+5,\ 2t-5,\ t)$, $t\in\mathbb{R}$

Př. Pomocí Gaussovy eliminační metody určete řešení soustavy:

1.) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 \quad + x_4 &= -1 \\ -x_1 \quad + x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

hodnost A = hodnost matice rozšířené = 3 < 4 = počet neznámých => volíme parametr

$\Rightarrow 2x_3 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = \frac{3}{2}}}$; z 2. rovnice plyne $-x_2 - x_4 = 1$ volíme

$\underline{\underline{x_4 = t \in \mathbb{R}}} \Rightarrow -x_2 - t = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -t - 1}}$; z 1. rovnice :

$x_1 + (-t-1) + \frac{3}{2} + 2t = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{2} - t \Rightarrow$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - t \\ -1 - t \\ \frac{3}{2} \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ t \in \mathbb{R}}}$$

2) $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$h(A) = h(M) = 2 < 4$ neznámé => 2 parametry :

$2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow$ zvolíme $\underline{\underline{x_2 = t \in \mathbb{R}}} \Rightarrow x_3 = \underline{\underline{1 - 2t}}$; z 1. rovnice:

$3x_1 + t - (1 - 2t) + x_4 = -1 \Rightarrow$ zvolíme $\underline{\underline{x_1 = s \in \mathbb{R}}} \Rightarrow$

$3s + t - (1 - 2t) + x_4 = -1 \Rightarrow x_4 = \underline{\underline{-3s - 3t}}$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 - 2t \\ -3s - 3t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \ s, t \in \mathbb{R}}}$$

Př. Pomocí Gaussovy eliminační metody určete řešení soustavy :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} &= 11 \\ - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -3r_1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow (2) \\ \Rightarrow (1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$(1) \Rightarrow x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4$ / zvolíme parametry $x_4 = t \in \mathbb{R}$ $x_3 = s \in \mathbb{R}$

$$x_2 + 2s - 3t = 4$$

$$\underline{\underline{x_2 = 4 - 2s + 3t}}$$

$(2) \Rightarrow x_1 + (4 - 2s + 3t) - s + 2t = 1$

$$x_1 + 4 - 3s + 5t = 1$$

$$\underline{\underline{x_1 = -3 + 3s - 5t}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -3 + 3s - 5t \\ 4 - 2s + 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}}}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} (-3+3s-5t) + (4-2s+3t) - s + 2t &= 1 \\ (-3+3s-5t) + (8-4s+6t) + s - t &= 5 \\ (-9+9s-15t) + (20-10s+15t) + s &= 11 \\ (-4+2s-3t) - 2s + 3t &= -4 \end{aligned}$$

Př: Vyřešte soustavu lineárních rovnic s komplexními koeficienty

$$(1+i)x_1 + (2-i)x_2 = 5-2i$$
$$(3+2i)x_1 + i\,x_2 = -2+6i$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (1+i) & (2-i) & 5-2i \\ (3+2i) & i & -2+6i \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(3+2i)\\ \cdot(1+i)\end{array} \sim$$

$(1+i)\cdot(3+2i) = 1+5i$
$(2-i)\cdot(3+2i) = 8+i$
$(3+2i)\cdot(1+i) = 1+5i$
$(i)\cdot(1+i) = -1+i$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} (1+5i) & (8+i) & 19+4i \\ (1+5i) & (-1+i) & -8+4i \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -r_1\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} (1+5i) & (8+i) & 19+4i \\ 0 & -9 & -27 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 3}}$$ (Dosadíme do 1. rovnice $\Rightarrow$)

$$(1+5i)x_1 + (8+i)3 = 19+4i$$
$$(1+5i)x_1 + 24+3i = 19+4i$$
$$(1+5i)x_1 = -5+i$$

$$x_1 = \frac{-5+i}{1+5i} = \frac{(-5+i)}{(1+5i)}\cdot\frac{(1-5i)}{(1-5i)} = \frac{-5+5+i+25i}{26} = \frac{26i}{26} = \underline{\underline{i}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{X} = (i, 3)}}$$

3. Konz. cv

Gaussova eliminační metoda

Př. 1:
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Řeš: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ $\bar{x} = (2, 1, 3)$

Př. 2:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ má řešení 1/∞ mnoho?

Řeš: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ $\bar{x} = (0, 0, 0)$

Př. 3.:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Řeš: nemá řešení

Př. 4. a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Řeš: $x_1 = -1 - t$, $x_2 = 3 + t$, $x_3 = t$ $t \in \mathbb{R}$

b) nalezněte řešení kde $x_2 = 13$
$\Rightarrow \bar{x} = (-11, 13, 10)$

Př. 5.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řeš: $x_1 = 3 - 2t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$ $t \in \mathbb{R}$

Př. 6. a)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Řeš: $x_1 = -2s - 2t$, $x_2 = t - s$, $x_3 = s$, $x_4 = t$

b) nalezněte nějaké řešení, kde $x_2 = 2$
$\Rightarrow$ např. $t = 2, s = 0 \Rightarrow \bar{x} = (-4, 2, 0, 2)$

c) nalezněte všechna řešení, kde $x_2 = 2$
$\Rightarrow t - s = 2 \Rightarrow t = s + 2 \Rightarrow \bar{x} = (-4 - 4s, 2, s, s + 2),\ s \in \mathbb{R}$

Př. 7.

3  + 2  = 10 (nožiček)

2  + 4  = 16 (nožiček)

 = 3,5 nožiček

 = 1 nožička

Gauss-Jordanova metoda

$(A|\bar{b}) \to (E|\bar{x})$

Př. 8
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Řeš: $\bar{x} = (1, 1, 2)$

Př. 9.:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 \quad - 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Řeš: $\bar{x} = (1, 2, 3)$