Vektorový prostor

Def. (Reálný vektorový prostor): Vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel (nebo též reálným vektorovým prostorem) nazveme uspořádanou trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je množina, $+$ je zobrazení definované na $V \times V$, $\cdot$ je zobrazení definované na $\mathbb{R} \times V$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$:

1.) $\alpha . \bar{x} \in V$
2.) $\bar{x} + \bar{y} \in V$
3.) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ (sčítání je asociativní)
4.) $\exists \bar{o} \in V\ \forall \bar{x} \in V: \bar{o} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{o} = \bar{x}$ (existence nulového vektoru $\bar{o}$)
5.) $\forall \bar{x} \in V\ \exists -\bar{x} \in V: \bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{o}$ (ke každému vekt. existuje v. opačný)
6.) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (sčítání je komutativní)

7.) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$
8.) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$
9.) $\alpha . (\beta . \bar{x}) = (\alpha . \beta) . \bar{x}$
10.) $1 . \bar{x} = \bar{x}$

Prvky množiny V nazýváme vektory vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.

Poznámka: Formálně - podle definice - je vektorový prostor uspořádaná trojice $(V, +, \cdot)$ s vlastnostmi popsanými v definici. Intuitivně můžeme vektorový prostor chápat jako množinu, na níž jsme definovali sčítání (vektorů) a násobení (číslo krát vektor) a toto sčítání a násobení má „hezké" vlastnosti - tj. vlastn. 1.) - 10.).

Množinu na níž je definováno sčítání jejích prvků tak, že jsou splněny podmínky 2.) až 6.) nazýváme komutativní grupou. Tj. $(V, +)$ je komutativní grupa.

Příklady vektorových prostorů:

1.) Reálná čísla : $V = \mathbb{R}$. zvolíme-li v definici vektorového prostoru za V množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a uvažujeme-li obvyklé sčítání a násobení reálných čísel, pak platí: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1.) $u+v \in \mathbb{R}$

2.) $(u+v)+w = u+(v+w)$

3.) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $u+0 = 0+u = u$
   (nula)

4.) $\forall u \in \mathbb{R}\ \exists -u \in \mathbb{R}$: $u+(-u) = 0 = (-u)+u$

5.) $u+v = v+u$

6.) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

7.) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

8.) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

9.) $1 . u = u$

Proto $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$).

2.) Matice daného typu (m,n) : $V = M_{m,n}$ = množina matic reálných čísel o m řádcích a n sloupcích

Matici A obsahující prvky $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ budeme značit (a_{ij})

sčítání matic a jejich násobení definujeme $\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{m,n}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ následovně:

a) sčítání : $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ (tj. sečteme prvky na stejných místech napři. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$)

b) násobení : $\alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$ (tj. číslem α vynásobíme každý prvek matice, např. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$)

Definujeme-li sčítání a násobení takto, potom $\forall$ matici $A, B, C \in M_{m,n}$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

1.) $A + B \in M_{m,n}$ (součet dvou matic typu (m,n) je zase matice typu (m,n))

2.) $(A+B)+C = A+(B+C)$

3.) nulová matice $O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}$ a platí $\forall A \in M_{m,n}$: $O+A = A+O = A$

4.) $\forall A = (a_{ij}) \in M_{m,n}\ \exists -A = (-a_{ij}) \in M_{m,n}$: $A+(-A) = O = (-A)+(A)$

5.) $A+B = B+A$

6.) $\alpha \cdot (A+B) = \alpha A + \alpha B$

7.) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

8.) $\alpha \cdot (\beta A) = \alpha . \beta A$

9.) $1 . A = A$

3.) Aritmetické vektory : $V = \mathbb{R}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$,

$\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel.
Sčítání n-tic a jejich násobení reálným číslem definujeme $\forall (a_1, \dots, a_n) = \bar{a}, (b_1, \dots, b_n) = \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ následovně

a) Sčítání : $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ (např. $(1,-1,3)+(1,0,2) = (2,-1,5)$)

b) Násobení : $\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$ (např. $3 \cdot (1,-1,3,5) = (3,-3,9,15)$)

Potom $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí podmínky 1.) až 9.)
(viz. definice vektorového prostoru!!!).

4.) Reálné funkce : $V = \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ = množina funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jejichž definičním oborem je $\mathbb{R}$, tj. $f(x)$ je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$.
Součet dvou funkcí z $\mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ a násobení funkcí číslem definujeme $\forall f, g \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ následovně :

a) Sčítání : $f+g$ je funkce daná předpisem : $\forall x \in \mathbb{R} : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
(tj. funkční hodnotu funkce $f+g$ v bodě x určíme jako součet funkčních hodnot $f(x)$ a $g(x)$)
(např. $f(x) = x^2$, $g(x) = x \Rightarrow (f+g)(x) = x^2 + x$)

b) Násobení : $\alpha \cdot f$ je funkce daná předpisem : $\forall x \in \mathbb{R} : (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
(tj. funkční hodnotu funkce $\alpha \cdot f$ v bodě x určíme jako součin reálných čísel α a $f(x)$)
(např. $\alpha = 5$, $f(x) = x^3 \Rightarrow (5f)(x) = 5x^3$)

Definujeme-li na $\mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ sčítání a násobení takto, potom $\forall f, g, h \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

1.) $f + g \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ (f i g jsou definované na $\mathbb{R} \Rightarrow$ existují hodnoty $f(x)$ i $g(x) \Rightarrow$ existuje i $(f+g)(x) \Rightarrow$ $f+g$ je také definovaná na $\mathbb{R}$)

2.) $(f+g)+h = f+(g+h)$ (neboť $\forall x \in \mathbb{R} : (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$)

3.) definujeme-li : $o \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ je funkce daná předpisem $o(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall f \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}} : f + o = o + f = f$

4.) $\forall f \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$ $\exists -f \in \mathbb{F}_{\mathbb{R}}$, kde $(-f)(x) = -f(x)$: $f + (-f) = (-f) + f = o$
(neboť $f(x) + (-f(x)) = -f(x) + f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

5.) $f+g=g+f$ (neboť $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$)

6.) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $(\alpha(f+g))(x)=\alpha\cdot(f+g)(x)=\alpha(f(x)+g(x))=$
$=\alpha f(x)+\alpha g(x)$)

7.) $(\alpha+\beta)\cdot f=\alpha f+\beta f$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $((\alpha+\beta)f)(x)=(\alpha+\beta)\cdot f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)$)

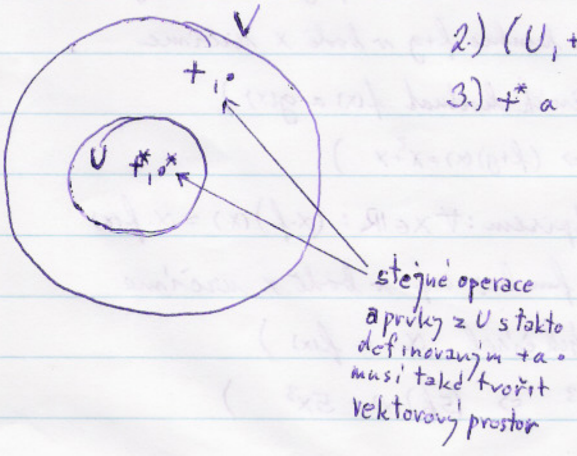
8.) $(\alpha\cdot\beta)f=\alpha(\beta f)$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $((\alpha\cdot\beta)f)(x)=(\alpha\cdot\beta)f(x)=\alpha\cdot(\beta f(x))$)

9.) $1.f=f$ (neboť $\forall x\in\mathbb{R}$ platí $(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$)

Podprostor

Def (Podprostor): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor. Potom $(U,+^*,\cdot^*)$ je podprostor vektorového prostoru V, právě když jsou splněny podmínky:

1.) $U\subseteq V$
2.) $(U,+^*,\cdot^*)$ je vektorový prostor
3.) $+^*$ a $\cdot^*$ jsou restrikce $+$ a $\cdot$ (tj. sčítání a násobení na U definováno stejně jako na V, ale jen pro prvky z U).



Příklad: Zvolme za V vektorový prostor matic $M_{(2,2)}$, tj. matic o dvou řádcích a dvou sloupcích. Uvažujme množinu U, která obsahuje matice typu $(2,2)$, které mají na diagonále nuly, tj. matice $\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$, kde $a,b\in\mathbb{R}$.
Tvoří U podprostor V (jestliže na U definujeme $+$ a $\cdot$ stejně jako na V)?

Řešení: Zkontrolujeme platnost podmínek z definice podprostoru:

ad 3.) Podle zadání předpokládáme, že sčítání a násobení na U definujeme stejně jako na V (ale jen pro prvky z U) $\Rightarrow$ Podmínka 3.) je splněna.

ad 1.) Všechny matice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in U$ patří také do $V = M_{(2,2)}$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow U \subseteq V$ $\Rightarrow$ Podmínka 1.) je splněna.

ad 2.) Je $(U,+,\cdot)$ vektorový prostor? Měli bychom (podle def.) ověřit že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in U$ platí:

1.) $\alpha \cdot \bar{x} \in U$
2.) $\bar{x} + \bar{y} \in U$
3.) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x} + (\bar{y}+\bar{z})$
4.) $\exists \bar{o} \in U\ \forall \bar{x} \in U: \bar{x} + \bar{o} = \bar{o} + \bar{x} = \bar{x}$
⋮
10.) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

Podmínky 3.) až 10.) ale nemusíme ověřovat! Jsou jistě splněny, neboť $U \subseteq V$ a $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor.

$\Rightarrow$ I.) Ověříme, že $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in U: \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in U$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ \alpha b & 0 \end{pmatrix} \in U \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ II.) Ověříme, že $\forall \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in U: \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in U$

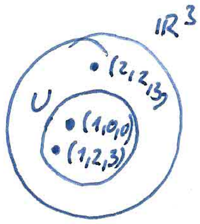
$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a_1+a_2) \\ (b_1+b_2) & 0 \end{pmatrix} \in U \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Podmínka 3.) je také splněna $\Rightarrow$ $\underline{(U,+,\cdot)}$ je podprostor $(V,+,\cdot)$.

Pozn.: Toto platí obecně! Ověřujeme-li, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem vekt. prostoru $(V,+,\cdot)$, kde $U \subseteq V$, (pokud není řečeno jinak, předpokládáme, že na U sčítáme stejně jako na V) stačí ověřit:
I.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \bar{x} \in U: \alpha \cdot \bar{x} \in U$ II.) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U: \bar{x} + \bar{y} \in U$

Př: Ověřte, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(1, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$



$U \subseteq \mathbb{R}$, ale není splněno: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U: \ \bar{x}+\bar{y} \in U$

například: $\underbrace{(1,0,0)}_{\in U} + \underbrace{(1,2,3)}_{\in U} = (\overset{\neq 1}{2}, 2, 3) \notin U$

do U patří ty vektory, které mají první složku 1, ale tady je to 2!

$\Rightarrow$ $(U,+,\cdot)$ není podprostorem $(V,+,\cdot)$

b) $V = F_{\mathbb{R}}$ ... mža reálných fcí reálné proměnné s def. oborem $D(f) = \mathbb{R}$.

$P_2 = U = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c, \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ... mža polynomických funkcí stupně nejvýše 2.

Polynomická fce daná předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$ má $D(f) = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $U \subseteq V$

Navíc: I.) $\forall f_1 \in U$, kde $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; $f_2 \in U$, kde $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c$:

$f_1 + f_2$ je funkce daná předpisem:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = \underbrace{(a_1+a_2)}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(b_1+b_2)}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{(c_1+c_2)}_{\in \mathbb{R}}$$

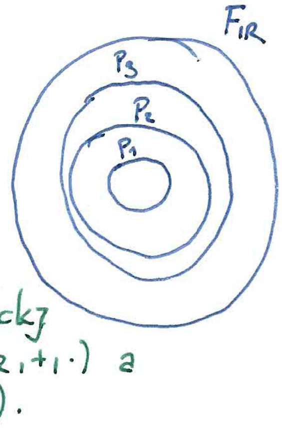
$\Rightarrow f_1 + f_2 \in U$

II.) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall f \in U$, kde $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$\alpha \cdot f$ je funkce daná předpisem:

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha(ax^2 + bx + c) = \underbrace{(\alpha a)}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(\alpha b)}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{(\alpha c)}_{\in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \alpha \cdot f \in U$



$\Rightarrow$ $(P_2,+,\cdot)$ je podprostorem $(V,+,\cdot)$

Označíme-li $P_3 = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ a $P_1 = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$, mohli bychom analogicky ověřiti, že $(P_3,+,\cdot)$ i $(P_1,+,\cdot)$ jsou podprostory v. prostoru $(F_{\mathbb{R}},+,\cdot)$ a že $(P_1,+,\cdot)$ je podprostorem $(P_2,+,\cdot)$ a to je podprostor $(P_3,+,\cdot)$.