Lineární kombinace vektorů

Def (Lin. kombinace): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Říkáme, že vektor $\bar{v} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \in V$ právě když existují čísla $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\bar{v} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n$$

Příklad: Snadno ověříme, že $\underbrace{2}_{k_1} \cdot \underbrace{(1,-1)}_{\bar{v}_1} + \underbrace{3}_{k_2}\underbrace{(1,2)}_{\bar{v}_2} = \underbrace{(5,4)}_{\bar{v}}$

Proto můžeme říci, že vektor $(5,4)$ je lineární kombinací vektorů $(1,-1)$

Příklad: Zjistěte, zda vektor $\bar{v} = (2,1,-3)$ je lineární kombinací vektorů $\bar{v}_1 = (1,1,0)$, $\bar{v}_2 = (0,1,1)$ a $\bar{v}_3 = (1,0,1)$.

=>

Musíme zjistit, zda existují čísla x_1, x_2, x_3 takové, že

$\bar{v} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + x_3 \bar{v}_3$ / úpravami tohoto vztahu dojdeme k soustavě lineárních rovnic:

$$(2,1,-3) = x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(1,0,1)$$
$$(2,1,-3) = (x_1,x_1,0) + (0,x_2,x_2) + (x_3,0,x_3)$$
$$(2,1,-3) = (x_1+x_3, x_1+x_2, x_2+x_3)$$

/ vektory jsou si rovny, jestliže mají stejné souřadnice => musí platit:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

=> Dospěli jsme k tomu, že

$$\bar{v} = (2,1,-3) = 3\underbrace{(1,1,0)}_{\bar{v}_1} - 2\underbrace{(0,1,1)}_{\bar{v}_2} - 1 \cdot \underbrace{(1,0,1)}_{\bar{v}_3}$$

=> vektor $\bar{v}$ je lineární kombinací vektorů $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

Poznámka: Pokud by $\bar{v}$ nebyl lineární kombinací $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ a $\bar{v}_3$, projevilo by se to ve výše uvedeném postupu tak, že řešená soustava rovnic by neměla řešení.

Př: Zjistěte, zda vektor $\vec{v} = (1,0,3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (1,-1,3)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$ a $\vec{v}_3 = (1,1,5)$.

$\Rightarrow$ Hledáme $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$: $k_1(1,-1,3) + k_2(0,1,1) + k_3(1,1,5) = (1,0,3)$.

To vede na soustavu (neznámé jsou k_1, k_2, k_3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = -1 \text{ spor!}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array}$$

Soustava nemá řešení $\Rightarrow$ $\vec{v}$ není lin. kombinací $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Př: Zjistěte, zda polynom $p = 3x^2 - x - 2$ je lineární kombinací polynomů $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = 2x^2 + x$

Polynomy můžeme reprezentovat aritmetickými vektory:

$3x^2 - x - 2 \Rightarrow (3,-1,-2)$ $\quad x^2 - 1 \Rightarrow (1,0,-1)$, $\quad x+1 \Rightarrow (0,1,1)$, $\quad 2x^2 + x \Rightarrow (2,1,0)$

$\Rightarrow$ Řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 + 2\cdot 2 = 3 \Rightarrow k_1 = -1 \\ \Rightarrow k_2 + 2 = -1 \Rightarrow k_2 = -3 \\ \Rightarrow k_3 = 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ p je lin. komb. p_1, p_2, p_3 : $3x^2 - x - 2 = -1(x^2-1) - 3(x+1) + 2(2x^2 + x)$

Př: Zjistěte, zda je polynom $p = 3x - 3$ lineární kombinací polynomů $p_1 = x - 1$ $\quad p_2 = -x + 1$ a $p_3 = 2x - 1$

Polynomy „převedeme" na aritm. vektory a řešíme soustavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow k_1 - k_2 + 2\cdot 0 = 3 \Rightarrow k_1 - k_2 = 3 \Rightarrow \begin{array}{l} k_2 = t \in \mathbb{R} \\ k_1 = 3 + t \end{array} \\ \Rightarrow k_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ p je lin. kombinací p_1, p_2, p_3 : $3x - 3 = (3+t)(x-1) + t(-x+1) + 0(2x-1)$, $t \in \mathbb{R}$

(a dá se z nich vykombinovat nekonečně mnoho způsobů)

Lineární kombinace

Vektor $\vec{v} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V \iff \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v} = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_n \vec{v}_n$$

Př: Zjistěte, zda vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$

1.) $\vec{v} = (3,-2,4)$; $\vec{v}_1 = (1,-1,3)$; $\vec{v}_2 = (1,0,1)$; $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ [$(3,-2,4) = 1\cdot(1,-1,3) + 2(1,0,1) - 1(0,1,1)$]

2.) $\vec{v} = (1,3,3)$; $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$; $\vec{v}_3 = (1,1,3)$ [$(1,3,3) = -1(1,2,0) + 3(0,1,0) + 2(1,1,3)$]

3.) $\vec{v} = (1,1,2)$; $\vec{v}_1 = (1,1,3)$, $\vec{v}_2 = (-1,0,-2)$; $\vec{v}_3 = (2,3,7)$ [$\vec{v}$ není lin. kombinací $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$]

4.) $\vec{v} = 3x^2 - 2x + 4$; $\vec{v}_1 = x^2 - x + 3$; $\vec{v}_2 = x^2 + 1$, $\vec{v}_3 = x + 1$ [stejné řešení jako 1.) $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -1$]

5.) $\vec{v} = x^2 + 3x + 3$; $\vec{v}_1 = x^2 - 2x + 1$, $\vec{v}_2 = -x^2 + x$, $\vec{v}_3 = x^2 + 4x + 2$ [$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$]

6.) $\vec{v} = x^2 - 5x + 1$; $\vec{v}_1 = x^2$, $\vec{v}_2 = x$, $\vec{v}_3 = 1$ [$\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + 1\cdot\vec{v}_3$]

7.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ [např. $\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 + 1\cdot\vec{v}_2 - 1\cdot\vec{v}_3$]

8.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ [$\vec{v} = 1\cdot\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 - 1\cdot\vec{v}_4$]

9.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [$\vec{v} = 1\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 + 8\vec{v}_4$]

Lineární obal množiny vektorů

Def (Lineární obal): Nechť $(V,+,\cdot)$ je vektorový prostor nad R. Lineárním obalem množiny $M=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ nazveme množinu:

$$\langle M\rangle = \{k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\dots+k_n\vec{v}_n \mid k_1,k_2,\dots,k_n\in R\}$$

(značíme též $\langle M\rangle = \langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\rangle$)

Poznámka: Tj. lineární obal množiny M značíme $\langle M\rangle$ a je to množina všech možných lineárních kombinací vektorů z M.

Poznámka: Jestliže $M\subseteq V$, kde V je vektorový prostor, pak $\langle M\rangle$ je podprostor vektorového prostoru V (dá se dokázat).

Příklad: Dokažte, že $U=\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 \mid u_1+u_2-u_3=0\}$ je podprostor $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ Zjistíme, jaké vektory konkrétně patří do U $\Rightarrow$ jde o vektory (u_1,u_2,u_3), jejichž souřadnice splňují $u_1+u_2-u_3=0$ $\Rightarrow$

3 neznámé a jedna rovnice $\Rightarrow$ volíme 2 parametry $\Rightarrow$

$u_3=t\in\mathbb{R}$, $u_2=s\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $u_1=t-s$ $\Rightarrow$

$$(u_1,u_2,u_3)=(t-s,\ s,\ t)=(t,0,t)+(-s,s,0)=t(1,0,1)+s(-1,1,0)$$

$\Rightarrow$

$U=\{t(1,0,1)+s(-1,1,0) \mid t,s\in\mathbb{R}\}$ $\Rightarrow$ U je množina všech lineárních kombinací vektorů $(1,0,1)$ a $(-1,1,0)$ $\Rightarrow$

$U=\langle(1,0,1),(-1,1,0)\rangle$ $\Leftrightarrow$ U je lineární obal vektorů $(1,0,1)$ a $(-1,1,0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ U je podprostor $\mathbb{R}^3$

Př.: Ověřte, zda $(U,+,\cdot)$ je podprostorem $(V,+,\cdot)$.

1.) $U = \{(a,b,a,c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$; $V = \mathbb{R}^4$

$U \subseteq V$ a navíc platí:

$U = \{a(1,0,1,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,0,1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle (1,0,1,0); (0,1,0,0); (0,0,0,1) \rangle$

Lineární obal vektorů z V je podprostorem $(V,+,\cdot) \Rightarrow$

$\underline{\underline{(U,+,\cdot) \text{ je podprostorem } (\mathbb{R}^4,+,\cdot)}}$

2.) $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-b=0,\ a+b+c=0\}$, $V = \mathbb{R}^3$

Vyřešme soustavu: $\left.\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} 2b+c=0 \Rightarrow \text{zvolíme parametr: } b = t \in \mathbb{R} \Rightarrow c = -2t \\ a+b+c=0 \Rightarrow a+t-2t=0 \Rightarrow a = t \end{array}\right\} \Rightarrow$

$U = \{(t,t,-2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-2) \rangle \Rightarrow$

$\underline{\underline{(U,+,\cdot) \text{ je podprostorem } (\mathbb{R}^3,+,\cdot)}}$

(Kdybychom změnili zadání třeba na $V = \mathbb{R}^2$, nebyl by to podprostor $\mathbb{R}^2$, neboť $U \nsubseteq \mathbb{R}^2$!)

3.) $U = \{ax^3 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, $V = P_3$ ... mn. polynomů stupně nejvýše 3.

$U = \{a \cdot (x^3) + b \cdot (x) + c \cdot (1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \langle x^3, x, 1 \rangle \Rightarrow$

$\underline{\underline{(U,+,\cdot) \text{ je podprostorem vektorového prostoru } (P_3,+,\cdot)}}$